Ю. В. ГОФМАН

ЗАКОНЫ ФОРМУЛЫ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ

СПРАВОЧНИК

Ю. В. ГОФМАН

ЗАКОНЫ, ФОРМУЛЫ, ЗАДАЧИ ФИЗИКИ

СПРАВОЧНИК

КИЕВ
«НАУКОВА ДУМКА»
1977

53
Г74

УДК 53(083)

Законы, формулы, задачи физики. Справочник. Гофман Ю. В. К., «Наук. думка», 1977. 576 с.

Настоящий справочник содержит основные законы и формулы элементарной физики, а также более 800 задач с подробными решениями, не требующими применения высшей математики. Объем теоретической части достаточен для того, чтобы, имея под рукой справочник, можно было решать задачи из любых сборников задач по элементарной физике.

Справочник может быть полезен молодым специалистам, студентам техникумов и первых курсов технических вузов, а также преподавателям школ и учащимся старших классов, желающим пополнить знания по физике.

Ил. 112. Список использ. лит.: с. 571.

Рецензенты В. Т. Гороновская, М. О. Лежен, М. С. Соскин

Редакция справочной литературы

Г $\frac{00001-059}{М221(04)-77}$ 422—77

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель предлагаемого справочника — показать и практически разъяснить способы применения физических законов и формул в различных вопросах физики и техники.

Наряду с традиционными разделами (механика, теплота, электричество, оптика) сюда включены также элементы атомной и ядерной физики, теории относительности, некоторые вопросы механики вращательного движения, электротехники и квантовой оптики.

При подборе задач имелось в виду, что, встретившись с конкретной задачей, читатель будет искать в справочнике либо прямые, либо косвенные указания на способ ее решения. По этой причине задачи, включенные в справочник, не претендуют ни на оригинальность, ни на замысловатость. Наоборот, они скорее являются типовыми задачами, чаще всего встречающимися в разнообразных задачниках по физике и инженерных расчетах, не требующих применения высшей математики. По этим же соображениям почти все они решены в общем виде; для конкретных численных расчетов можно воспользоваться табличными данными, приведенными в Приложении.

Большинство задач по механике, электричеству и оптике снабжено рисунками, поскольку нередко оказывается, что правильно сделанный рисунок — это наполовину решенная задача. Однако графическое решение задач не используется, так как оно, позволяя иногда добиться качественной ясности, часто оставляет чувство неудовлетворенности: с одной стороны, из-за свойственной графикам неточности, а с другой — из-за досады, порождаемой неумением или невозможностью решить задачу аналитически. Кроме того, для применяемых повсюду цифровых вычислительных машин графическое представление неудобно.

Каждый раздел начинается с необходимых определений, законов и формул, после которых даются задачи. В нескольких частных случаях формулы даются непосредственно в текстах соответствующих задач. Законы и формулы по возможности приводятся в компактной векторной форме, как и решения ряда задач, особенно в механике. Однако компактность записи не является самоцелью, и в тех случаях, когда векторная форма не содействует быстрому численному решению задач, например в электродинамике, соответствующий закон записы-

вается в скалярной форме. Необходимый минимум сведений по векторной алгебре дается во Введении.

Что касается квантовой механики, физики твердого тела и других разделов современной физики, то в справочнике даны некоторые элементарные понятия из этих разделов, но без задач, так как решение соответствующих типовых задач требует более основательной математической подготовки.

Список литературы, использованной при составлении справочника, приведен в конце книги.

Все замечания читателей будут приняты с благодарностью.

Июнь 1976 г. *Автор*

ВВЕДЕНИЕ

1. Элементы векторной алгебры

Скаляры и векторы. Многие физические величины, например масса, энергия, количество теплоты, электрический заряд, не имеют направления в пространстве. Они называются скалярными величинами или просто скалярами и обладают только численными значениями.

Величины, характеризуемые не только численным значением, но и направлением, например сила, скорость, называются векторными величинами или векторами. Их изображают на чертежах направленными отрезками (рис. 1), длины которых пропорциональны численным значениям векторов. Так, если два автомобиля движутся в противоположных направлениях со скоростями 50 и 80 км/ч, их скорости можно изобразить двумя антипараллельными векторами, длины которых равны пяти и восьми масштабным единицам по 10 км/ч каждая.

Вектор обычно обозначают принятой для данной физической величины буквой со стрелкой над ней, например $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{R}$. В печати векторы часто набирают полужирным шрифтом без стрелки, например **v**, **a**, **R**.

Численное значение вектора называется его модулем и обозначается вертикальными чертами слева и справа: $|v|$, $|a|$, $|R|$ либо теми же буквами v, a, R без стрелки.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ мы будем обозначать $(\vec{a}, \vec{b})$.

Сложение и вычитание векторов. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2, *а*), из конца вектора $\vec{a}$ строят вектор $\vec{b}$. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$ изображается вектором, направленным из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$. Иначе говоря, сложение двух векторов $\vec{a}+\vec{b}$ геометрически изображается треугольником.

Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, нужно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $(-\vec{b})$ (рис. 2, *б*), т. е. вектор, равный по длине и противоположный по направлению вектору $\vec{b}$.

Для нахождения суммы нескольких векторов $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{k}=\vec{l}$ из конца вектора $\vec{a}$ строят вектор $\vec{b}$, из конца вектора $\vec{b}$ — вектор $\vec{c}$ и т. д. Результирующий вектор $\vec{l}$ направлен из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{k}$ и замыкает ломаную линию, состоящую из слагаемых векторов (рис. 3). Таким образом, векторное равенство $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{k}=\vec{l}$ геометрически изображается многоугольником.

Если привести векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу и построить на них параллелограмм (рис. 4), то одна из диагоналей будет представлять сумму векторов $(\vec{a}+\vec{b})$, а другая — их разность $(\vec{a}-\vec{b})$.

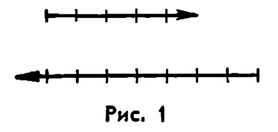


Рис. 1

Приведенные правила позволяют найти направление и величину суммы (или разности) векторов геометрическим путем. Для алгебраического вычисления суммы (или разности) векторов пользуются известными теоремами косинусов и синусов (рис. 5):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

где $a = |\vec{a}|$; $b = |\vec{b}|$; $c = |\vec{c}|$.

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Умножение вектора на скаляр. Если умножить вектор $\vec{a}$ на скаляр, т. е. на некоторое число n, то получится вектор $n\vec{a}$, который в n раз больше по величине, чем вектор $\vec{a}$ (рис. 6), и направлен в ту же сто-

рону, что и вектор $\vec{a}$. Если n — отрицательное число, то результирующий вектор будет равен $(-n\vec{a})$ и направлен в сторону, противоположную вектору $\vec{a}$.

Умножение вектора на вектор. Различают два произведения векторов — скалярное и векторное.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скалярная величина $ab\cos(\vec{a}, \vec{b})$, где $(\vec{a}, \vec{b})$ — угол между направлениями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 7). Скалярное произведение часто обозначают $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

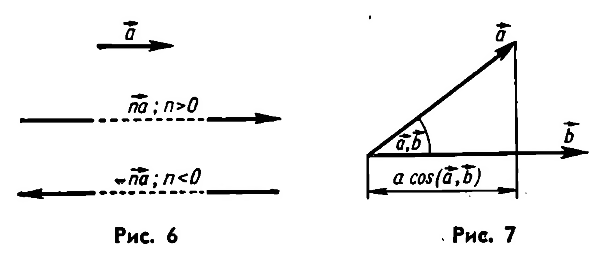


Рис. 6 Рис. 7

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны или антипараллельны, их скалярное произведение равно произведению их модулей, взятому соответственно со знаком плюс или минус, так как $\cos 0° = 1$ и $\cos 180° = -1$:

$$\text{при } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = ab;$$
$$\text{при } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = -ab.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю, так как $\cos 90° = 0$:

$$\text{при } \vec{a} \perp \vec{b} \qquad \vec{a} \cdot \vec{a} = 0.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны по модулю и совпадают по направлению, их скалярное произведение равно квадрату модуля одного из них

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2.$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, численное значение которого равно $ab\sin(\vec{a}, \vec{b})$. Этот вектор перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 8, *а*), и его направление определяется по правилу буравчика: если ручку буравчика кратчайшим путем повернуть от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, то направление поступательного движения буравчика укажет направление вектора $\vec{c}$. Векторное произведение обычно обозначают $\vec{a} \times \vec{b}$.

Если поменять местами векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то по правилу буравчика найдем, что произведение $\vec{b} \times \vec{a}$ изобразится вектором, направленным в сторону, противоположную вектору $\vec{a} \times \vec{b}$ (рис. 8, *б*). Таким образом, перестановка множителей в векторном произведении приводит к тому, что произведение меняет знак на обратный, т. е.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны или антипараллельны, то их векторное произведение, очевидно, равно нулю, так как $\sin 0° = \sin 180° = 0$.

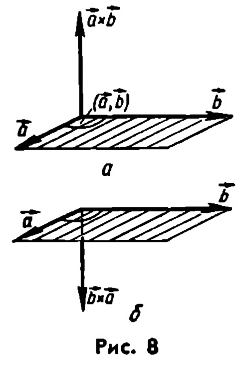


Рис. 8

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, модуль их векторного произведения равен произведению их модулей, так как $\sin 90° = 1$:

$$\text{при } \vec{a} \perp \vec{b} \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = ab.$$

Разложение вектора на составляющие. Разложить данный вектор на составляющие — значит заменить его несколькими векторами, сумма которых равна данному вектору.

Задача разложения вектора на две составляющие сводится к нахождению элементов треугольника по данным задачи (см. рис. 5). При этом пользуются вышеприведенными теоремами косинусов и синусов. Этот способ удобен, когда даны (или надо найти) углы между векторами.

Метод проекций. Вектор можно задать не только путем указания его модуля и угла, который он образует с другим вектором, но также путем задания его проекций на какие-либо произвольные направления, например оси прямоугольной системы координат.

Пусть вектор $\vec{c}$ лежит в координатной плоскости XY (рис. 9). Если известна длина вектора c и угол γ, который он образует с одной из осей (например, с осью X), то его проекции на оси X и Y равны

$$c_x = c \cos \gamma; \quad c_y = c \sin \gamma.$$

Наоборот, если заданы проекции c_x и c_y, то легко найти длину вектора и угол γ по формулам

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{c_y}{c_x}.$$

Пользуясь проекциями, можно выполнять алгебраические действия с векторами. Пусть мы имеем векторное равенство (рис. 10)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

Проектируя каждый из векторов на оси X и Y, получаем для каждого вектора два скалярных равенства:

$$a_x = a \cos \alpha; \quad b_x = b \cos \beta; \quad c_x = c \cos \gamma;$$
$$a_y = a \sin \alpha; \quad b_y = b \sin \beta; \quad c_y = c \sin \gamma.$$

Проекция суммарного вектора равна сумме проекций составляющих:

$$c_x = a_x + b_x = a \cos \alpha + b \cos \beta = c \cos \gamma;$$
$$c_y = a_y + b_y = a \sin \alpha + b \sin \beta = c \sin \gamma.$$

Таким образом, складывая проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, мы находим проекции вектора $\vec{c}$ и по вышеприведенным формулам вычисляем его длину и угол γ между ним и осью, т. е. определяем вектор $\vec{c}$.

Примечание. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы не на плоскости, а в трехмерном пространстве, то каждый вектор будет иметь не две,

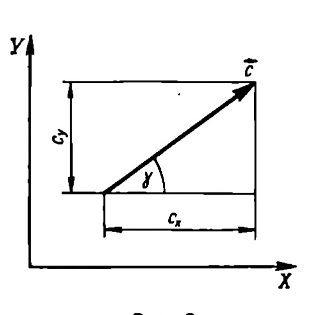


Рис. 9

Рис. 10

а три проекции (на оси X, Y и Z) и каждому векторному равенству будут соответствовать не два, а три скалярных равенства, выражающие проекции на три координатные оси.

С помощью проекций можно также вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если проекции этих векторов равны соответственно a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, выраженное через их проекции, будет равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Можно показать, что это выражение равно выражению $ab \cos (\vec{a}, \vec{b})$, приведенному выше.

Вычисление векторов с помощью проекций удобно в тех случаях, когда все углы задаются по отношению к некоторым осям или когда векторы заданы через их проекции.

Иногда бывает целесообразно проектировать векторы не на координатные оси, а на другие направления, выбор которых диктуется условиями задачи.

Классификация векторов. В зависимости от свойств физических величин, изображаемых векторами, последние разделяют на свободные, скользящие и неподвижные.

Свободный вектор изображает векторную величину, которая может быть отнесена к любой точке тела (например, скорость поступательного движения тела).

Скользящий вектор изображает величину, которая может быть отнесена к любой из точек, лежащих на прямой ее действия (например, силу, приложенную к неподвижному твердому телу).

Неподвижный вектор изображает величину, которая относится лишь к определенной точке пространства (например, напряженность электростатического поля).

1.1. Найти равнодействующую $\vec{R}$ двух приложенных в одной точке сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, модули которых $F_1 = 5$, $F_2 = 7$; угол между силами $\varphi = 60°$. Определить также углы α и β, образуемые равнодействующей $\vec{R}$ с силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 11).

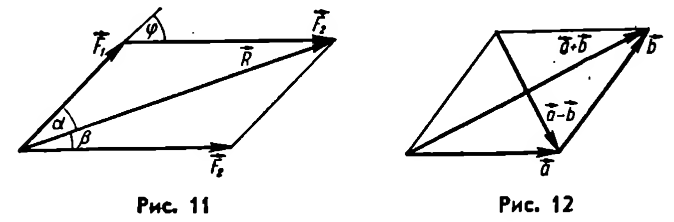


Рис. 11 Рис. 12

Модуль равнодействующей определяем по теореме косинусов

$$R = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 120°} \approx 10{,}44.$$

Углы α и β находим по теореме синусов ($\varphi = \alpha + \beta$)

$$\frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(180° - \varphi)}.$$

Но

$$\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi,$$

и тогда

$$\sin\alpha = \frac{F_2 \sin\varphi}{R} = 0{,}581; \quad \alpha = 35°\,30';$$

$$\sin\beta = \frac{F_1 \sin\varphi}{R} = 0{,}415; \quad \beta = 24°\,30'.$$

Проверяем: $\alpha + \beta = 35°\,30' + 24°\,30' = 60° = \varphi$.

1.2. Найти условие, при котором диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны.

Если стороны параллелограмма «векторизовать», т. е. считать векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 12), то одна из диагоналей будет представлять собой вектор $\vec{a} + \vec{b}$, а другая — вектор $\vec{a} - \vec{b}$. Для того чтобы диагонали были перпендикулярны, необходимо, чтобы скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$ равнялось нулю. Отсюда следует, что $\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$, т. е. $a^2 - b^2 = 0$, или $a = b$. Таким образом, диагонали параллелограмма перпендикулярны при условии, что этот параллелограмм — ромб.

1.3. Найти $|\vec{a} \times \vec{b}|$, зная, что $a = 1$, $b = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$.

Из формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b})$ находим

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{-3}{5}; \quad \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{4}{5};$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 4.$$

1.4. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проекции которых на координатные оси X, Y и Z равны: $a_x = 3$; $a_y = 4$; $a_z = -2$; $b_x = 1$; $b_y = -1$; $b_z = 0$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

откуда

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}.$$

Модуль вектора $\vec{a}$ равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{29} \approx 5,4;$$

модуль вектора $\vec{b}$ равен

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{2} \approx 1,41;$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 - 4 + 0}{5,4 \cdot 1,41} \approx -0,13;$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \approx 97^\circ 30'.$$

2. Кинематика

Движение материальной точки определено, если известен закон ее движения, т. е. закон, по которому меняется положение точки в пространстве с течением времени.

Положение точки в пространстве может быть задано радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат выбранной системы отсчета к этой точке (рис. 13), или посредством проекций r_x, r_y, r_z радиус-вектора на координатные оси X, Y, Z. Эти проекции одновременно являются координатами точки, так что $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$.

Закон движения точки можно представить в виде одного векторного уравнения

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

или трех скалярных уравнений

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Перемещение и путь. Пусть за промежуток времени $t_2 - t_1 = \Delta t$ точка переместится из положения, определяемого радиус-вектором $\vec{r}_1$, в положение, определяемое радиус-вектором $\vec{r}_2$ (рис. 14). Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ называется перемещением точки.

Длина Δs участка кривой, по которой движется точка, называется путем точки и является скаляром. Величины $|\Delta\vec{r}|$ и Δs совпадают лишь в случае прямолинейного движения. В СИ перемещение и путь измеряются в метрах.

Скорость. Отношение перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (см. рис. 14) к промежутку времени $\Delta t = t_2 - t_1$, за который это перемещение произошло, называется средней скоростью перемещения $\vec{v}_{\text{ср}}$:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}.$$

Средняя скорость перемещения также является вектором.

Средняя скорость прохождения пути $\Delta s = s_2 - s_1$ за время Δt, равная $v'_{\text{ср}} = \Delta s/\Delta t$, является скаляром.

Если за промежутки времени Δt_1, Δt_2, ..., Δt_n произошли перемещения $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, ..., $\Delta\vec{r}_n$, причем пройдены отрезки кривой Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n, то средняя скорость всего перемещения

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \cdots + \Delta\vec{r}_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_n},$$

а средняя скорость прохождения всего пути

$$v'_{ср} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_n} = \frac{s}{t}.$$

В СИ скорость измеряется в метрах в секунду.

Ускорение. Отношение изменения скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ к промежутку времени $\Delta t = t_2 - t_1$, за который это изменение произошло, называется средним ускорением:

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

В СИ ускорение измеряется в метрах на секунду в квадрате.

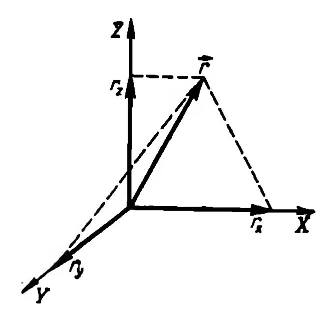


Рис. 13

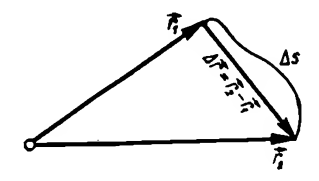


Рис. 14

Формулы кинематики для равномерного прямолинейного движения в векторной форме:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}t;$$

в скалярной форме (в проекциях на оси X, Y):

$$x - x_0 = v_x t;$$
$$y - y_0 = v_y t,$$

где x_0 и y_0 — начальные координаты точки.

Обычно принимают, что точка начинает двигаться из начала координат, так что

$$x_0 = y_0 = 0; \quad \begin{matrix} x = v_x t; \\ y = v_y t; \end{matrix} \quad |\vec{r}| = s = vt.$$

Формулы кинематики для равнопеременного прямолинейного движения

в векторной форме:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t; \quad \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где $\vec{v}$ — мгновенная скорость;

в скалярной форме (в проекциях на оси X, Y):

$$v_x = v_{0x} + a_x t;$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t;$$
$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2};$$
$$y - y_0 = v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Для равнопеременного движения справедливо также скалярное равенство

$$v^2 - v_0^2 = 2as.$$

П р и м е ч а н и е. Согласно последней формуле тело, падающее с высоты h под действием силы тяжести, приобретает в конце пути скорость $\sqrt{2gh}$. Следует иметь в виду, что оно приобретает эту скорость независимо от того, по какой траектории оно опускалось. Оно может свободно падать, соскальзывать (без трения) по наклонной плоскости, по поверхности полусферы или по любой другой гладкой поверхности. Во всех случаях его конечная скорость будет равна $\sqrt{2gh}$. Это получается потому, что в поле силы тяжести конечная скорость не зависит от формы пути.

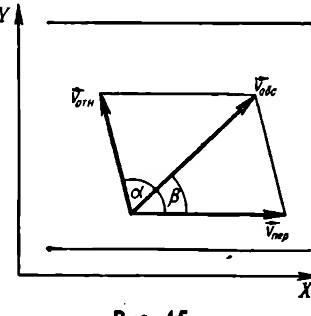


Рис. 15

Одновременное перемещение в двух направлениях. Абсолютные, относительные и переносные перемещения и скорости. Рассмотрим лодку, пересекающую реку под действием весел и одновременно увлекаемую течением (рис. 15). Перемещение и скорость лодки относительно берега (т. е. относительно неподвижной системы координат, связанной с берегом) называются абсолютными перемещением $\vec{r}_{абс}$ и скоростью $\vec{v}_{абс}$.

Перемещение и скорость лодки относительно воды (т. е. относительно системы координат, движущейся вместе с водой) называются относительными перемещением $\vec{r}_{отн}$ и скоростью $\vec{v}_{отн}$.

Наконец, перемещение и скорость воды относительно берега (т. е. движущейся системы координат относительно неподвижной) называются переносными перемещением $\vec{r}_{пер}$ и скоростью $v_{пер}$. Все эти величины связаны соотношениями

$$\vec{r}_{абс} = \vec{r}_{отн} + \vec{r}_{пер}; \quad \vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}.$$

Для вычисления относительной скорости точки можно воспользоваться таким приемом: мысленно остановить переносное движение

и вычислить относительную скорость по обычным правилам, как если бы точка двигалась в неподвижной системе.

Для вычисления переносной скорости точки следует мысленно остановить относительное движение и искать переносную скорость, как скорость той точки движущейся системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Взаимные перемещения двух тел в одной системе отсчета. Рассмотрим два корабля, вышедшие из одной точки A. Радиус-вектор одного из них — $\vec{r}_1$, другого — $\vec{r}_2$ (рис. 16, *а*). Их относительное перемещение определяется вектором $\vec{r}_{1,2}$:

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{r}_{2,1}.$$

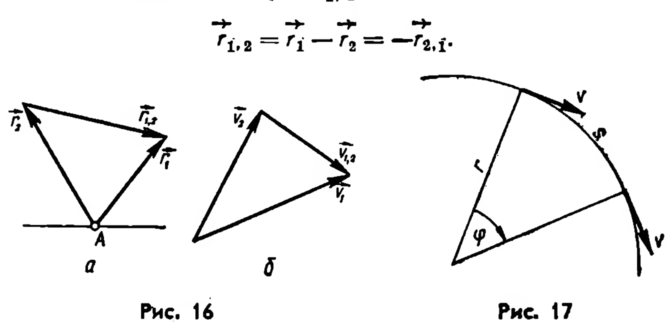


Рис. 16

Рис. 17

Скорость одного корабля по отношению к другому кораблю равна (рис. 16, *б*)

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{v}_{2,1}.$$

Формулы кинематики для движения точки по окружности. Точка вращающегося тела описывает дугу s окружности радиуса r. Центр окружности лежит на оси вращения. Радиус-вектор точки при этом описывает угол φ. Между дугой s, радиусом r и углом φ существует соотношение (рис. 17)

$$s = \varphi r.$$

Отношение угла $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, описанного радиус-вектором точки, к промежутку времени $\Delta t = t_2 - t_1$, за который произошел этот поворот, называется угловой скоростью ω,

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью $v = s/t = \frac{2\pi r}{T}$ движения точки по окружности соотношением

$$v = \omega r.$$

Единицей угловой скорости в СИ является радиан в секунду.

Чтобы охарактеризовать скорость равномерного вращательного движения, применяют также число оборотов за единицу времени, обозна-

чаемое буквой n. Время T, в течение которого совершается один оборот, называется периодом. Очевидно, что

$$n = \frac{1}{T}; \quad T = \frac{1}{n}.$$

Угловая скорость ω и число оборотов n за единицу времени связаны соотношением

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}.$$

Угол, описанный радиус-вектором за время t при равномерном движении по окружности,

$$\varphi = \omega t = 2\pi n t = 2\pi \frac{t}{T}.$$

При равномерном движении точки по окружности линейная скорость меняется только по направлению. Ускорение в этом случае направлено по радиусу к центру окружности и называется центростремительным. Центростремительное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = 4\pi^2 n^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r = \omega v.$$

При неравномерном движении точки по окружности скорость меняется не только по направлению, но и по величине. Вектор полного ускорения $\vec{a}$ состоит из двух составляющих: центростремительного ускорения a_n, направленного по радиусу перпендикулярно скорости, и ускорения a_t, направленного по касательной вдоль скорости,

$$a_t = \varepsilon r,$$

где ε — угловое ускорение, равное $(\omega - \omega_0)/t$.

Перпендикулярная составляющая a_n, совпадающая с центростремительным ускорением, называется нормальной, а касательная a_t — тангенциальной (отсюда индексы n и t). Нормальная составляющая приводит к изменению только направления вектора скорости, но не модуля. Наоборот, тангенциальная составляющая характеризует изменение только модуля скорости точки, движущейся по окружности, но не направления. Модуль вектора полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}.$$

Формулы кинематики равнопеременного вращательного движения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

Ниже сопоставлены формулы кинематики поступательного и вращательного движений:

Поступательное движение	Вращательное движение	Формулы перехода
Путь s	Угол φ	$s = \varphi r$
Скорость v	Угловая скорость ω	$v = \omega r$
Ускорение a	Угловое ускорение ε	$a_t = \varepsilon r$
		$a_n = \omega^2 r$
$s = vt$	$\varphi = \omega t$	
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	
$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$	
$v^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$	

Поступательное и вращательное движения твердого тела. Мгновенный центр скоростей. Пусть по прямолинейному рельсу катится колесо. Это движение происходит в одной плоскости — плоскости колеса — и поэтому называется плоским или плоскопараллельным.

Точки колеса участвуют в двух видах движения: поступательном (вдоль рельса) и вращательном (вокруг оси колеса).

При поступательном движении всякая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе.

При вращательном движении все точки тела описывают окружности вокруг неподвижной прямой — оси вращения.

Всякое плоскопараллельное движение можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного движения тела вместе с некоторой выбранной точкой, называемой полюсом, и вращательного движения тела относительно этого полюса

$$\vec{v} = \vec{v}_{пост} + \omega\vec{r},$$

где $\vec{v}$ — абсолютная скорость произвольной точки тела; $\vec{v}_{пост}$ — скорость поступательного движения полюса; ω — угловая скорость вышеуказанной произвольной точки, если она удалена от полюса на расстояние r.

В общем случае плоскопараллельного движения существует точка, скорость которой в данный момент равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей. В частности, при качении тела по поверхности (без проскальзывания) скорость точки соприкосновения тела с поверхностью в каждый данный момент равна нулю. Поэтому точка касания является мгновенным центром скоростей. Если одна точка тела неподвижна, то движение тела в данный момент и в последующие моменты можно представить, как непрерывный ряд вращений вокруг центров скоростей.

Если принять мгновенный центр скоростей за полюс, то:

1) абсолютная линейная скорость любой точки фигуры, удаленной на расстояние r от мгновенного центра скоростей, равна ωr;

2) если известны линейные скорости двух любых точек тела, мгновенный центр находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из этих точек к направлениям скоростей (рис. 18, *а*);

3) если направления скоростей параллельны, то мгновенный центр находится в точке пересечения перпендикуляра к этим направлениям с прямой, проведенной через концы векторов скоростей обеих точек (рис. 18, *б*).

2.1. Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, вторую — со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найти среднюю скорость на всем пройденном пути.

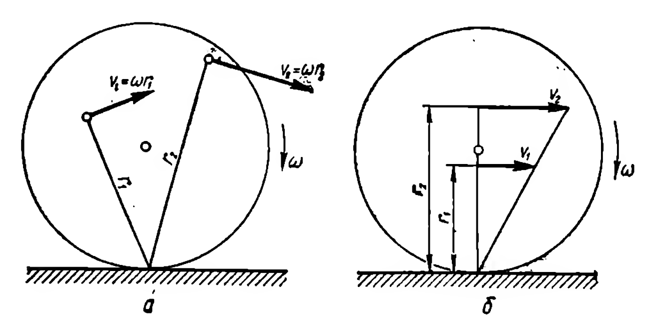


Рис. 18

Не следует поддаваться первому впечатлению и считать, что средняя скорость $v_{ср}$ в данном случае равна $\frac{40+60}{2} = 50$ км/ч. Это неверно. Обратимся к формуле

$$v_{ср} = \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}.$$

Обозначим весь путь через $2l$. Тогда $\Delta r_1 = \Delta r_2 = l$ и $\Delta t_1 = l/v_1$; соответственно $\Delta t_2 = l/v_2$. Теперь мы можем написать

$$v_{ср} = \frac{2l}{l/v_1 + l/v_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 60}{40 + 60} = 48 \text{ км/ч}.$$

Этот результат может показаться неожиданным, так как в курсе физики при выводе формулы для пути при равноускоренном движении используется формула $v_{ср} = (v_0 + v_1)/2$, согласно которой средняя скорость должна была бы равняться 50 км/ч. Следует иметь в виду, что эта формула для $v_{ср}$ пригодна только в случае равноускоренного движения.

2.2. Первую половину времени своего движения автомобиль двигался со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а вторую половину — со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найти среднюю скорость за время движения.

Полное перемещение $\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2$. Средняя скорость

$$v_{ср} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{2 \cdot \Delta t/2} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{40 + 60}{2} = 50 \text{ км/ч}.$$

2.3. Автомобиль проходит первую треть пути со скоростью v_1, а оставшуюся часть пути — со скоростью $v_2 = 50$ км/ч. Определить скорость на первом участке пути, если средняя скорость на всем пути $v_{ср} = 37{,}5$ км/ч.

Обозначим весь путь через s; время, затраченное на прохождение первого участка пути, — через t_1; время движения на втором участке пути — через t_2. Очевидно, что

$$t_1 + t_2 = \frac{s/3}{v_1} + \frac{2s/3}{v_2} = \frac{s}{v_{ср}},$$

откуда

$$v_1 = \frac{v_{ср}\, v_2}{3v_2 - 2v_{ср}} = \frac{37{,}5 \cdot 50}{3 \cdot 50 - 2 \cdot 37{,}5} = 25 \text{ км/ч}.$$

2.4. Первую половину времени тело движется со скоростью $v_1 = 20$ м/с под углом $\alpha_1 = 60°$ к заданному направлению, а вторую половину времени — под углом $\alpha_2 = 120°$ к тому же направлению со скоростью $v_2 = 40$ м/с. Найти среднюю скорость движения $v_{ср}$ (рис. 19).

Так как тело совершило два перемещения $\Delta\vec{r}_1$ и $\Delta\vec{r}_2$, то полное перемещение $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$. Отсюда

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2}{2 \cdot \Delta t/2} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2).$$

Проектируем это векторное уравнение на координатные оси X и Y, причем получаем скалярные равенства:

$$v_{ср\,x} = \frac{1}{2}(v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2) = -5 \text{ м/с};$$

$$v_{ср\,y} = \frac{1}{2}(v_1 \sin\alpha_1 + v_2 \sin\alpha_2) = 15\sqrt{3} \text{ м/с};$$

$$v_{ср} = \sqrt{v_{ср\,x}^2 + v_{ср\,y}^2} = 26{,}46 \text{ м/с}.$$

2.5. Тело совершает два последовательных одинаковых по величине перемещения со скоростями $v_1 = 20$ м/с под углом $\alpha_1 = 60°$ к направлению оси X и $v_2 = 40$ м/с под углом $\alpha_2 = 120°$ к тому же направлению. Найти среднюю скорость $v_{ср}$ (рис. 19).

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 \quad \text{или} \quad \vec{v}_{ср} t = \vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2,$$

откуда

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2}{t} \quad \text{или} \quad v_{ср} = \frac{\vec{v}_1 \dfrac{\Delta r_1}{v_1} + \vec{v}_2 \dfrac{\Delta r_2}{v_2}}{\dfrac{\Delta r_1}{v_1} + \dfrac{\Delta r_2}{v_2}}.$$

По условию $\Delta r_1 = \Delta r_2 = \Delta r$; сокращая на Δr, находим

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\vec{v}_1 \frac{1}{v_1} + \vec{v}_2 \frac{1}{v_2}}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

Проектируем это векторное равенство на оси координат

$$v_{\text{ср}\,x} = \frac{v_1 \cos\alpha_1 \frac{1}{v_1} + v_2 \cos\alpha_2 \frac{1}{v_2}}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = 0;$$

$$v_{\text{ср}\,y} = \frac{v_1 \sin\alpha_1 \frac{1}{v_1} + v_2 \sin\alpha_2 \frac{1}{v_2}}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{40\sqrt{3}}{3};$$

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{v_{\text{ср}\,x}^2 + v_{\text{ср}\,y}^2} = \frac{40\sqrt{3}}{3}.$$

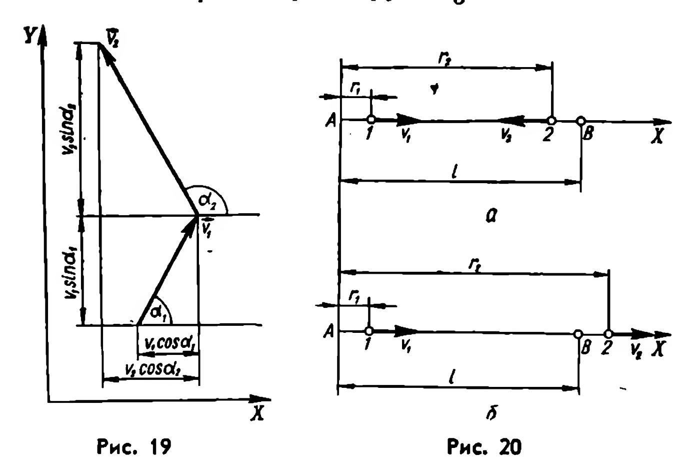


Рис. 19 Рис. 20

2.6. Тело проходит последовательно n одинаковых участков пути Δs, причем скорость на каждом участке соответственно равна $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Определить среднюю скорость на всем пути.

Очевидно, что

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n}{\frac{\Delta s_1}{v_1} + \frac{\Delta s_2}{v_2} + \cdots + \frac{\Delta s_n}{v_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i}}.$$

2.7. Тело проходит последовательно n участков пути. Скорости на каждом участке равны $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и выбраны так, что тело

проходит каждый участок за одно и то же время. Найти среднюю скорость тела.

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n}{n\,\Delta t} = \frac{v_1\,\Delta t + v_2\,\Delta t + \cdots + v_n\,\Delta t}{n\,\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i.$$

2.8. Движение точки описывается уравнениями проекций на координатные оси

$$x = a + bt; \quad y = c + dt.$$

Найти модуль и направление скорости точки $\vec{v}$.

Очевидно, что $b = v_x$, $d = v_y$. Поэтому

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{b^2 + d^2}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{d}{b}.$$

2.9. Катер плывет по реке против течения с постоянной скоростью и в некотором определенном месте теряет спасательный круг. Через время t потеря обнаруживается, катер поворачивает и нагоняет круг на расстоянии S ниже места потери. Найти скорость течения.

Мысленно остановим переносное движение, т. е. течение реки. В системе координат, связанной с рекой, вода неподвижна и круг все время лежит на том же месте, куда он упал. Катер сначала удаляется от этого места в течение времени t, затем поворачивает и возвращается, затратив на все путешествие время $2t$.

Теперь снова приведем в действие переносное движение, т. е. течение реки. За время $2t$ течение снесло ту точку, где находился круг, на расстояние S. Отсюда переносная скорость течения равна

$$\frac{S}{2t}.$$

2.10. Расстояние между точками A и B равно l (рис. 20). В момент $t = 0$ из A вдоль прямой AB начинает двигаться с постоянной скоростью v_1 тело *1*, а спустя время τ из B начинает вдоль той же прямой двигаться тело *2* со скоростью v_2 ($v_1 > v_2$). Найти момент встречи t, относительную скорость $v_{1,2}$ и место встречи.

Направим ось X вдоль линии AB, совместив ее начало с точкой A.

1) Пусть тела *1* и *2* движутся навстречу друг другу (рис. 20, *а*). Относительное перемещение обоих тел $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, или в скалярном виде $r_{1,2} = r_2 - r_1$, где $r_2 = l - v_2(t - \tau)$; $r_1 = v_1 t$.

Относительная скорость $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, но так как направление вектора $\vec{v}_2$ противоположно направлению оси, то в скалярном виде $v_{1,2} = v_1 + v_2$.

В точке встречи $r_{1,2} = 0$, т. е. $r_1 = r_2 = r_0$; $r_0 = v_1 t = l - v_2(t - \tau)$, откуда

$$t = \frac{l + v_2\tau}{v_1 + v_2}; \quad r_0 = \frac{l + v_2\tau}{v_1 + v_2}\cdot v_1. \qquad (*)$$

2) Пусть оба тела движутся в одном направлении (рис. 20, *б*).

Относительное перемещение (как и в предыдущем случае) $r_{1,2} = r_2 - r_1$, где $r_2 = l + v_2 (t - \tau)$; $r_1 = v_1 t$.

Относительная скорость $v_{1,2} = v_1 - v_2$.

В точке встречи, где $r_1 = r_2 = r_0$,

$$r_0 = v_1 t = l + v_2 (t - \tau);$$

$$t = \tau + \frac{l - v_1\tau}{v_1 - v_2} = \frac{l - v_2\tau}{v_1 - v_2}; \quad r_0 = \frac{l - v_2\tau}{v_1 - v_2} v_1.$$

Как видно из формул, для того чтобы найти решение в этом случае, достаточно в формулах (*) заменить v_2 на $(-v_2)$.

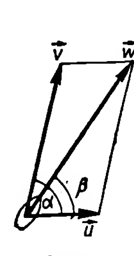


Рис. 21

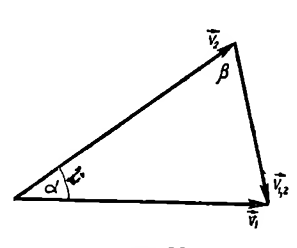


Рис. 22

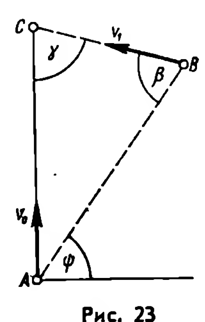


Рис. 23

2.11. Лодка передвигается относительно воды в реке со скоростью $\vec{v}$ под углом α к течению, скорость которого равна $\vec{u}$. Найти абсолютную скорость $\vec{w}$ лодки относительно берега (рис. 21) и ее перемещение к моменту t.

Искомая скорость

$$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Из векторного треугольника имеем

$$w = \sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\alpha};$$

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{w} = \frac{\sin\beta}{v},$$

откуда

$$\sin\beta = \frac{v\sin\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\alpha}}.$$

Перемещение лодки определяется по формуле

$$r = wt = t\sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\alpha}.$$

2.12. Два корабля движутся под углом α друг к другу со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (рис. 22). Найти относительную скорость кораблей и расстояние $r_{1,2}$ между ними в момент t.

Воспользуемся формулами

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

или

$$v_{1,2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha};$$

$$\frac{\sin \beta}{v_1} = \frac{\sin \alpha}{v_{1,2}}; \quad \sin \beta = \frac{v_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}}.$$

Умножив $v_{1,2}$ на t, находим расстояние между кораблями в момент t

$$r_{1,2} = v_{1,2}t = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}.$$

2.13. Корабль, проходящий точку A, движется с постоянной скоростью v_0. Под каким углом β к прямой AB надо начать двигаться катеру из точки B с постоянной скоростью v_1, чтобы встретиться с кораблем? Линия AB составляет угол ψ с перпендикуляром к курсу корабля (рис. 23).

Если между кораблем и катером происходит встреча в точке C, то

$$BC = v_1t; \quad AC = v_0t;$$

$$\frac{v_1t}{\sin(90° - \psi)} = \frac{v_0t}{\sin \beta}; \quad \sin \beta = \frac{v_0}{v_1}\cos \psi.$$

2.14. В условиях предыдущей задачи определить время t, по истечении которого катер встретится с кораблем, если первоначальное расстояние между ними равнялось $AB = l$ (рис. 23).

Из треугольника ABC находим:

$$\gamma = 90° + \psi - \beta; \quad \frac{l}{\sin \gamma} = \frac{v_1t}{\cos \psi} = \frac{v_0t}{\sin \beta};$$

$$t = \frac{l \cos \psi}{v_1 \cos(\psi - \beta)} = \frac{l \sin \beta}{v_0 \cos(\psi - \beta)}.$$

2.15. Две подводные лодки плывут в кильватер на расстоянии l одна от другой с одинаковой скоростью v. Сигнал гидролокатора, находящегося на задней лодке, достигает передней лодки, отражается и возвращается обратно. Скорость звука в воде равна c. Найти время между моментами подачи сигнала и регистрации эха.

Свяжем переносную систему координат с передней лодкой и мысленно остановим ее. В этой системе обе лодки неподвижны, а вода движется назад со скоростью v. Поэтому звук от задней лодки распространяется к передней лодке с относительной скоростью $c - v$, а в обратном направлении — с относительной скоростью $c + v$. Полное время t, затраченное на прохождение сигнала туда и обратно, равно

$$t = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

2.16. Штурман морского судна *1*, идущего на северо-восток со скоростью v, определил значение и направление относительной скорости u проходящего вблизи судна *2* (рис. 24). Эта относительная скорость оказалась направлена на запад. Найти абсолютную скорость w судна *2*.

Пользуясь решением задачи 2.12, можем записать: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Из треугольника скоростей находим модуль абсолютной скорости

$$w = \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu\cos(\vec{v}, \vec{u})} = \sqrt{v^2 + u^2 + \sqrt{2}\,vu}.$$

Направление вектора $\vec{w}$ можно найти из выражения

$$\frac{\sin\gamma}{v} = \frac{\sin 45^\circ}{w}; \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v}{w}.$$

Здесь γ — угол между направлением абсолютной скорости судна 2 и географической параллелью.

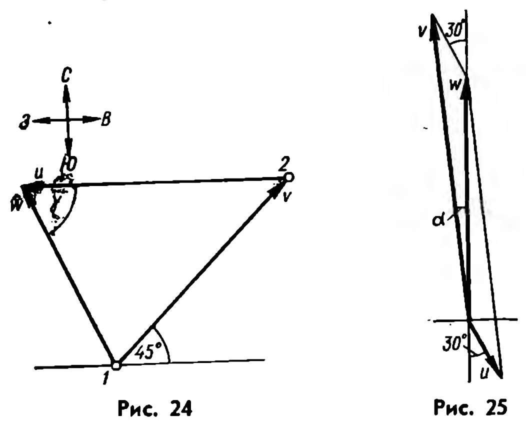


Рис. 24

Рис. 25

2.17. С какой скоростью и по какому курсу должен лететь самолет, чтобы за время $t = 2$ ч пролететь точно на север путь, равный 300 км, если во время полета дует северо-западный ветер под углом 30° к меридиану со скоростью $u = 27$ км/ч (рис. 25)?

Обозначим искомую относительную скорость через v, а результирующую абсолютную скорость вдоль меридиана через w. Тогда

$$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u}; \quad v = \sqrt{w^2 + u^2 - 2wu\cos(180^\circ - 30^\circ)} = $$
$$= \sqrt{w^2 + u^2 + \sqrt{3}\,wu} \approx 174 \text{ км/ч}.$$
$$\frac{\sin\alpha}{u} = \frac{\sin(180^\circ - 30^\circ)}{v}; \quad \sin\alpha = \frac{u}{2v} \approx 0{,}078.$$

2.18. Мимо пристани проходит плот. В этот момент в поселок, находящийся на расстоянии $S_1 = 15$ км ниже пристани, отправилась моторная лодка. Она дошла до поселка за время $t = 0{,}75$ ч и, повернув обратно, встретила плот на расстоянии $S_2 = 9$ км от поселка. Найти скорость течения u и скорость лодки относительно воды v.

Свяжем систему отсчета с плотом, т. е. мысленно остановим переносное движение. В этой системе плот и река неподвижны. Это означает, что относительно плота лодка движется в ту и другую сторону

с одинаковой скоростью. Иначе говоря, она удалилась от плота и возвратилась к нему за равные промежутки времени 3/4 ч каждый, т. е. двигалась всего $2t = 1,5$ ч. За это время она прошла $S_1 + S_2 = 24$ км, откуда следует, что ее скорость относительно воды

$$v = \frac{S_1 + S_2}{2t} = 24 : 1,5 = 16 \text{ км/ч}.$$

За это же время плот прошел $S_1 - S_2 = 6$ км, следовательно, скорость течения

$$u = \frac{S_1 - S_2}{2t} = 6 : 1,5 = 4 \text{ км/ч}.$$

2.19. Самолет летит по маршруту $A - B - A$. Скорость самолета в безветренную погоду равна v. Найти средние скорости всего перелета для случаев, когда ветер дует: 1) вдоль линии AB; 2) перпендикулярно к линии AB. Скорость ветра равна u.

1) На пути AB скорость равна $v + u$; на пути BA равна $v - u$; время

Рис. 26

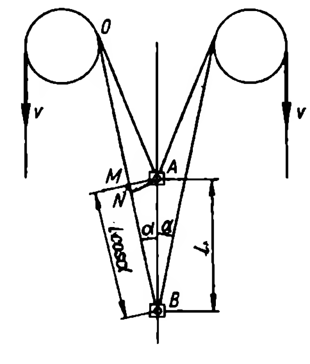


Рис. 27

перелета AB равно $\Delta t_1 = l/(v + u)$; время перелета BA равно $\Delta t_2 = l/(v - u)$ (l — расстояние AB); средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{l + l}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{2l}{l/(v + u) + l/(v - u)} = \frac{v^2 - u^2}{v}.$$

2) Из рис. 26 видно, что при полете по маршруту $A - B$, так же как и по маршруту $B - A$,

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{v^2 + u^2 - 2uv\left(\frac{u}{v}\right)} = \sqrt{v^2 - u^2}.$$

2.20. Две прямые дороги пересекаются под углом α. От перекрестка по этим дорогам удаляются две машины: одна со скоростью v_1, другая со скоростью v_2. Определить скорость, с которой одна машина удаляется от другой, учитывая, что перекресток они проехали одновременно.

Скорость относительного движения двух тел

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2,$$

где v_1 и v_2 — скорости тел в одной и той же системе.

Здесь возможны два случая: угол между направлениями движения машин может равняться либо α, либо $180° - \alpha$. Для обоих случаев, пользуясь теоремой косинусов, находим

$$v_{1,2}^2 = v_1^2 + v_2^2 \mp 2v_1v_2 \cos \alpha.$$

2.21. Рабочие, поднимающие груз, тянут канаты с одинаковыми скоростями, равными v (рис. 27). Какова скорость груза, если угол между канатами равен 2α?

За малый промежуток времени Δt груз поднимается на высоту со скоростью v_1, т. е. $l = v_1 \Delta t$, а канат укорачивается (приближенно) на длину $BM = l \cos \alpha = v \Delta t$; очевидно, что

$$\Delta t = \frac{l}{v_1} = \frac{l \cos \alpha}{v},$$

откуда

$$v_1 = \frac{v}{\cos \alpha}.$$

Второй канат играет лишь роль направляющей, заставляющей груз двигаться по вертикали, расположенной посредине между блоками.

Отметим, что в действительности (рис. 27) канат за время Δt укорачивается не на длину BM, а на длину BN (AN — дуга окружности радиуса $OA = ON$). Однако при малых промежутках времени и изменениях угла α длина MN является малой и ею можно пренебречь. Иначе говоря, чем меньше угол, тем меньшую ошибку мы делаем, заменяя дугу хордой.

2.22. По движущемуся эскалатору бегут вниз два человека: один — со скоростью u, другой — со скоростью nu. Первый насчитал p ступенек, второй — q ступенек. Найти число ступенек N и скорость v эскалатора.

Если обозначить длину спуска через l, то число ступенек на единицу его длины будет N/l. Время пробега первого человека вдоль всего спуска равно $l/(v+u)$, а пройденное им расстояние равно $ul/(v+u)$. Время пробега второго человека равно $l/(v+nu)$, а пройденное им расстояние — $nul/(v+nu)$.

Число ступенек, насчитанное в первом и втором случаях, соответственно равно

$$\frac{ul}{v+u}\frac{N}{l} = p; \quad \frac{nul}{v+nu}\frac{N}{l} = q.$$

Из этих уравнений находим

$$v = u\frac{n(q-p)}{np-q}; \quad N = p\left(1+\frac{v}{u}\right) = \frac{pq(n-1)}{np-q}.$$

2.23. На берегу реки расположены два пункта A и B. Моторная лодка проходит расстояние между ними по течению за время t_1, против течения — за время t_2. Найти время $t_т$, за которое плот пройдет от A до B.

Обозначим скорость лодки на спокойной воде через u, скорость течения — через v. Тогда

$$(u+v)\,t_1 = (u-v)\,t_2 = vt_т;$$

$$\frac{u+v}{v} = \frac{t_т}{t_1}; \quad \frac{u-v}{v} = \frac{t_т}{t_2};$$

$$\frac{u}{v} = \frac{t_т}{t_1} - 1 = \frac{t_т}{t_2} + 1;$$

$$\frac{t_т}{t_1} - \frac{t_т}{t_2} = 2; \quad t_т = \frac{2t_1t_2}{t_2 - t_1}.$$

2.24. При определении скорости вновь построенного судна последнее выполняет пробег вдоль мерной линии в двух взаимно противоположных направлениях. При этом оказалось, что время пробега в одном направлении равно t_1, а в противоположном — t_2. Длина мерной линии равна S. Определить скорость судна, полагая, что в районе испытаний имеется неизвестное, но постоянное по величине и направлению течение.

Обозначим относительную скорость судна через v. Она направлена вдоль мерной линии, но значение ее неизвестно. Переносная скорость течения u и абсолютная скорость w также неизвестны.

По теореме сложения скоростей для первого пробега имеем

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1.$$

Умножим это равенство на время первого пробега t_1:

$$\vec{w}_1 t_1 = \vec{v}_1 t_1 + \vec{u}_1 t_1.$$

Проекция этого равенства на направление мерной линии

$$S = v_1 t_1 + u_1 t_1 \cos\beta.$$

Для пробега в обратном направлении получаем аналогично

$$S = v_2 t_2 - u_2 t_2 \cos\beta.$$

Так как $v_1 = v_2 = v$ и $u_1 = u_2 = u$, то оба эти уравнения можно переписать в виде:

$$S = (v + u\cos\beta)\,t_1;$$
$$S = (v - u\cos\beta)\,t_2.$$

Из этих уравнений находим

$$v = \frac{S\,(t_1 + t_2)}{2t_1t_2}.$$

2.25. Сверхзвуковой самолет пролетает горизонтально над наблюдателем на высоте h. Наблюдатель услышал звук мотора через время t после этого. Определить скорость самолета, если скорость звука в воздухе равна u.

Звуковая волна, вызываемая самолетом, распространяется от его траектории перпендикулярно к образующей конуса, в вершине которого находится самолет (рис. 28).

Если наблюдатель находится в точке O, то до него дойдет в первую очередь звуковая волна, возникающая в точке A и движущаяся в направлении AO. Время прохождения звуковой волной расстояния AO равно AO/u. За это же время самолет пролетает расстояние AB и его скорость

$$v = \frac{AB}{AO} u = \frac{u}{\sin \alpha}.$$

По условию, за время t с момента начала наблюдения самолет успел пройти расстояние $A'B$ и звук из точки A' успел распространиться на расстояние $A'O'$, т. е.

$$t = \frac{A'O'}{u} = \frac{h \cos \alpha}{u}.$$

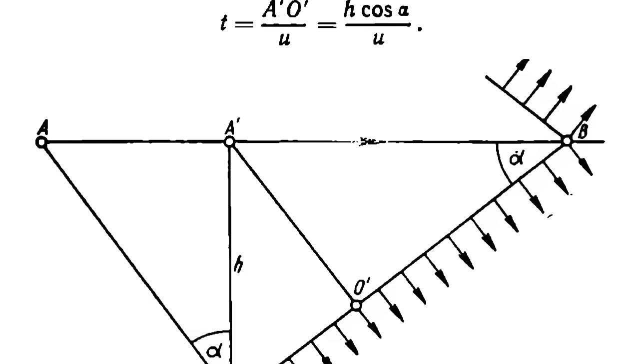


Рис. 28

Из этих уравнений находим

$$v = \frac{hu}{\sqrt{h^2 - u^2 t^2}}.$$

2.26. Показать, что тело, брошенное вертикально вверх и затем падающее по той же вертикали вниз, имеет в любой точке траектории скорости, равные по величине и обратные по направлению (рис. 29).

Выберем на вертикали OB произвольную точку A. При движении тела вверх оно проходит точку A со скоростью v', а при движении вниз — со скоростью v''. Двигаясь равнозамедленно вверх, тело достигает точки B через время t', считая от момента прохождения точки A. В точке B скорость тела равна нулю и время подъема из точки A в точку B определяется из выражения

$$v_B = v' - gt' = 0; \quad t' = \frac{v'}{g}.$$

Длина участка AB, очевидно, равна

$$AB = v't' - \frac{g(t')^2}{2} = \frac{(v')^2}{2g}.$$

При равноускоренном движении тела вниз без начальной скорости время падения t'' из точки B в точку A определится из выражения

$$BA = \frac{g(t'')^2}{2}; \quad t'' = \sqrt{\frac{2BA}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\,\frac{(v')^2}{2g}} = \frac{v'}{g} = t'.$$

Скорость тела в точке A при движении вниз равна

$$v'' = gt'' = gt' = v'.$$

2.27. Из точки, расположенной на высоте y_0 над поверхностью земли, бросают одно за другим через интервал времени τ два тела

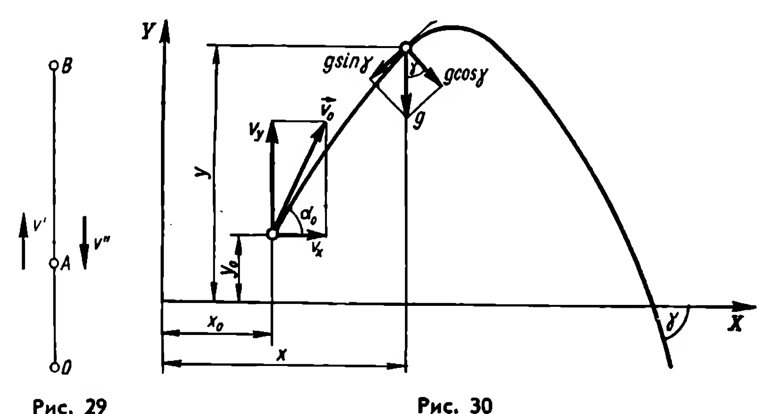


Рис. 29 Рис. 30

с одинаковой скоростью v_0: тело 1 — вертикально вверх, тело 2 — вертикально вниз. Определить, через какое время t от начала движения первого тела оба тела будут находиться на расстоянии Δr друг от друга.

Примем точку бросания за начало координат и направим ось вертикально вниз. Расстояние между обоими телами в момент t будет равно разности перемещений $\Delta r = r_2 - r_1$ или, в проекциях на вертикаль, $\Delta y = y_2 - y_1$.

Тело 1 сначала двигается равнозамедленно вверх в течение времени t_1, а затем в течение такого же времени — равноускоренно вниз до исходной точки бросания, где снова приобретает скорость v_0 (см. задачу 2.26). Его перемещение равно

$$y_1 = v_0(t - 2t_1) + \frac{g}{2}(t - 2t_1)^2.$$

Перемещение тела 2 равно

$$y_2 = v_0(t - \tau) + \frac{g}{2}(t - \tau)^2.$$

Учитывая, что $t_1 = v_0/g$, находим

$$\Delta y = (2v_0 - g\tau)\,t - v_0\tau + \frac{g\tau^2}{2}.$$

Отсюда с учетом того, что $\Delta y = \Delta r$, получаем

$$t = \frac{\Delta r + \left(v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2}\right)}{2v_0 - g\tau}$$

при условии, что $v_0 > \frac{g\tau}{2}$.

2.28. Из точки с координатами x_0, y_0 брошено тело под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью v_0 (рис. 30). Найти:

положение и скорость тела через время t;

уравнение траектории полета тела;

нормальное и тангенциальное ускорения тела и радиус кривизны траектории в момент t;

полное время полета;

наибольшую высоту подъема;

угол, под которым надо бросить тело, чтобы высота его подъема была равна дальности полета (при условии, что $x_0 = y_0 = 0$).

Направим оси X и Y вдоль горизонтального и вертикального перемещений точки. Векторные уравнения движения тела:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2}t^2;$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

Проектируя первое уравнение на оси координат, получим два уравнения проекций, определяющие положение тела в момент t:

$$x - x_0 = v_0\,t\cos\alpha_0;$$

$$y - y_0 = v_0\,t\sin\alpha_0 - \frac{g}{2}t^2.$$

Проектируя второе уравнение на оси координат, находим составляющие скорости

$$v_x = v_0\cos\alpha_0; \quad v_y = v_0\sin\alpha_0 - gt$$

и результирующую скорость

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha_0 + g^2t^2}.$$

Тангенс угла между направлением результирующей скорости и осью X равен

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{g}{v_0\cos\alpha_0}t,$$

т. е. он меняется с течением времени. Это и понятно, поскольку скорость геометрически характеризуется наклоном касательной к траектории полета.

Исключив t из обоих уравнений, определяющих положение тела в момент t, получим уравнение траектории полета

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\text{tg}\,\alpha_0 - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0},$$

Чтобы определить тангенциальное и нормальное ускорения тела в точке с координатами x, y, заметим, что полное ускорение тела все время направлено вниз и представляет собой ускорение силы тяжести $\vec{g}$. Тангенциальное ускорение равно проекции вектора $\vec{g}$ на касательную к траектории (т. е. $-g \sin \gamma$, как видно из рис. 30), а нормальное ускорение равно проекции $-g \cos \gamma$ на нормаль.

Так как

$$\sin \gamma = \frac{\text{tg}\,\gamma}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}},$$

то

$$a_n = -\frac{g v_x}{v}; \quad a_t = -\frac{g v_y}{v}.$$

Найдем попутно приближенное значение радиуса кривизны (R) траектории в момент t. Принимая, что точка движется по дуге окружности, воспользуемся формулой

$$a^2 = \frac{v^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{g v_x}.$$

Максимальную дальность полета $x_{\text{макс}}$ найдем из условия $y = 0$. Полагая в уравнении траектории $y = 0$, получим квадратное уравнение, из которого можно найти $x_{\text{макс}}$:

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}(x_{\text{макс}} - x_0)^2 - \text{tg}\,\alpha_0 (x_{\text{макс}} - x_0) - y_0 = 0.$$

Если тело брошено из точки на поверхности, где и $y_0 = 0$, задача существенно упрощается. Сокращая на $(x_{\text{макс}} - x_0)$, находим, что

$$x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} + x_0.$$

Полное время полета можно определить из формулы

$$y - y_0 = v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{gt^2}{2} \text{ при } y = 0,$$

откуда

$$t_{\text{макс}} = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2g y_0}}{g}.$$

Наибольшая высота подъема достигается в момент t, когда $v_y = 0$. Так как составляющая скорости вдоль оси Y равна $v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt$, то при $v_y = 0$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Теперь используем уравнение проекции положения тела на ось Y, положив $y = y_{макс}$:

$$y_{макс} - y_0 = v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключив t из обоих уравнений, получим

$$y_{макс} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} + y_0.$$

Очевидно, что наибольшая высота подъема будет при $\alpha_0 = 90°$, т. е. когда тело брошено вертикально вверх.

Наконец, приравнивая $x_{макс}$ и $y_{макс}$ друг другу (при условии, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$), получаем

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g},$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha_0 = 4$; $\alpha_0 \approx 76°$.

Найдем скорость тела в момент приземления $v_{рез}$ (при условии $x_0 = 0$; $y_0 = 0$). Для этого подставим значение $t = t_{макс} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ в выражения для скоростей v_x, v_y и v, а также в формулу для тангенса угла между v и осью X. При этом получим

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0; \quad v_y = -v_0 \sin \alpha_0; \quad v_{рез} = v_0; \quad \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} \alpha_0.$$

Мы видим, что вертикальная слагающая скорости тела во время полета меняется от $v_0 \sin \alpha_0$ до нуля и затем до $-v_0 \sin \alpha_0$. Горизонтальная слагающая остается постоянной и равной $v_0 \cos \alpha_0$. Таким образом, модуль скорости v в полете все время меняется. Меняется также и направление скорости, так как тангенс угла между v и осью X уменьшается от $\operatorname{tg} \alpha_0$ до нуля (в точке максимального подъема) и затем до $-\operatorname{tg} \alpha_0$ (в точке приземления).

2.29. Из высшей точки наклонной плоскости длиной L с углом наклона β (рис. 31) бросают тело с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонтали. Найти расстояние l вдоль наклонной плоскости от точки бросания до точки падения, если известно значение y_0.

Направим оси координат, как показано на рисунке. Уравнения движения тела в проекциях на оси имеют вид:

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = y_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

В точке падения

$$x = l \cos \beta; \quad y = y_0 - l \sin \beta,$$

так что

$$l\cos\beta = v_0 t\cos\alpha; \quad y_0 - l\sin\beta = y_0 + v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключив время t из этих уравнений, получаем

$$l = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}.$$

Если бы в условии был задан угол не по отношению к горизонтали, а по отношению к наклонной плоскости (обозначим его φ; $\varphi = \alpha + \beta$), то ответ получился бы в виде:

$$l = \frac{v_0^2\sin 2\varphi}{g\cos\beta}(1 + \mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\varphi).$$

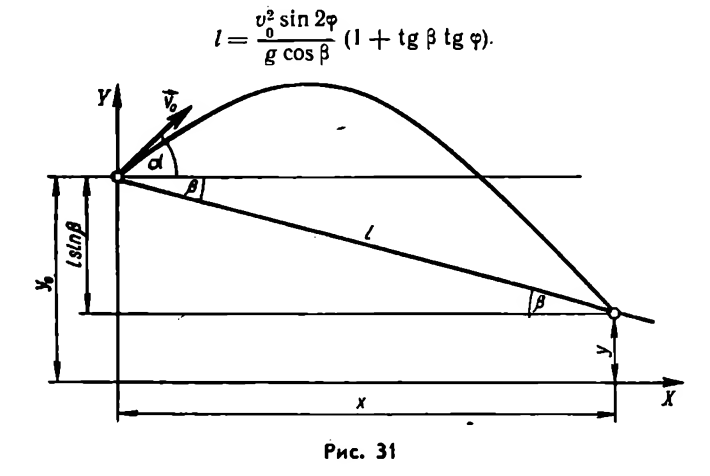


Рис. 31

Решение будет справедливо при условии $l \leqslant L$, так как только в этом случае тело упадет на наклонную плоскость.

2.30. Из точки с координатами x_0, y_0 брошено тело под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. При этом на тело действует попутный горизонтальный ветер, сообщая ему постоянное ускорение a. Найти время полета T, наибольшую высоту $h_{макс}$ и наибольшую дальность $x_{макс}$.

В отличие от задачи (2.28) уравнения движения тела в проекциях на оси будут иметь вид:

$$x - x_0 = v_0 t\cos\alpha + \frac{at^2}{2};$$

$$y - y_0 = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

а проекции скорости:

$$v_x = v_0\cos\alpha + at;$$
$$v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$

Рассмотрим отдельно вертикальное и горизонтальное движения. Для вертикального движения, которое остается таким же, как и в задаче (2.28), находим

$$h_{\text{макс}} = y_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + y_0; \quad T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Для горизонтального движения подставим в формулу для x значение $t = T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При этом получим

$$x_{\text{макс}} = x_0 + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + 2\frac{a}{g}\,\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = x_0 + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\left[1 + \frac{a}{g}\operatorname{tg}\alpha\right].$$

2.31. Из двух точек одновременно брошены два тела под углами α и β к горизонту со скоростями u_0 и v_0. Найти относительную скорость w обоих тел и относительное расстояние Δr между ними, считая, что тела движутся в одной плоскости.

Векторные уравнения движений тел:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{u}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}; \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{g}t;$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{v}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t;$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2; \quad \vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u}_0 - \vec{v}_0;$$

$$\Delta\vec{r} = (\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}) + (\vec{u} - \vec{v})\,t = \Delta\vec{r}_0 + (\vec{u}_0 - \vec{v}_0)\,t = \Delta\vec{r}_0 + \vec{w}t,$$

где $\vec{r}_{01}$ и $\vec{r}_{02}$ — радиус-векторы тел в исходном положении. Отсюда видно, что относительная скорость обоих тел постоянна и равна $\vec{u}_0 - \vec{v}_0$. В проекциях на оси координат

$$w_x = u_x - v_x = u_0 \cos \alpha - v_0 \cos \beta;$$
$$w_y = u_y - v_y = u_0 \sin \alpha - v_0 \sin \beta;$$
$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0 v_0 \cos(\alpha - \beta)}.$$

Относительное расстояние между обоими телами меняется по линейному закону (при $\vec{r}_{01} = \vec{r}_{02}$)

$$\Delta r = wt = t\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0 v_0 \cos(\alpha - \beta)}.$$

2.32. Тело движется с постоянным ускорением a. В момент времени $t = t_0$ тело было в точке $x = x_0$. Найти, какую скорость должно иметь тело при $t = t_0$, чтобы в момент времени $t = t_k$ попасть в точку $x = x_k$.

Очевидно, что

$$x_k - x_0 = v_0 (t_k - t_0) + \frac{a}{2}(t_k - t_0)^2,$$

откуда

$$v_0 = \frac{x_k - x_0}{t_k - t_0} - \frac{a}{2}(t_k - t_0).$$

2.33. Корабль движется прямолинейно со скоростью v_0. На высоте h над морем со скоростью v_1 летит самолет. Определить расстояние l, отсчитываемое по горизонтали, на котором надо сбросить вымпел, чтобы он попал на корабль. Сопротивлением воздуха вымпелу пренебречь. Решить задачу для случаев, когда самолет летит тем же курсом, что и корабль, и когда он летит навстречу кораблю.

Направим ось Y вверх из точки, находящейся на уровне моря под самолетом. Согласно задаче 2.28 уравнение траектории тела, брошенного со скоростью v' под углом $\alpha = 0$ к горизонту, имеет вид:

$$y = y_0 - \frac{g(x - x_0)^2}{2(v')^2},$$

где $y_0 = h$; $x - x_0 = l$; $y = 0$.

В случае одного курса относительная скорость $v' = v_1 - v_0$ и

$$h = \frac{gl^2}{2(v_1 - v_0)^2},$$

откуда

$$l = (v_1 - v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

В случае встречного курса $v' = v_1 + v_0$ и

$$l = (v_1 + v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

2.34. Мяч падает на горизонтальную поверхность с высоты h и после упругого удара поднимается до высоты h_1. На какую высоту поднимается мяч после n-го удара, если коэффициент восстановления k (отношение скоростей после и до удара) считать постоянным?

Очевидно, что

$$h = \frac{v^2}{2g}; \quad h_1 = \frac{v_1^2}{2g}; \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g}; \ldots; h_n = \frac{v_n^2}{2g},$$

где v_1 — начальная скорость мяча после первого удара; v_2 — после второго, ..., v_n — после n-го удара.

По определению коэффициента восстановления можем написать

$$k = \frac{v_1}{v}; \quad k^2 = \frac{v_1^2}{v^2}; \quad k^2 = \frac{v_2^2}{v_1^2}; \quad k^2 = \frac{v_3^2}{v_2^2}; \ldots; k^2 = \frac{v_n^2}{v_{n-1}^2}.$$

Перемножив эти равенства (кроме первого), получим

$$k^{2n} = \frac{v_n^2}{v^2} = \frac{2gh_n}{2gh} = \frac{h_n}{h},$$

откуда

$$h_n = hk^{2n}.$$

С другой стороны,

$$k^2 = \frac{v_1^2}{v^2} = \frac{2gh_1}{2gh} = \frac{h_1}{h}; \quad k = \left(\frac{h_1}{h}\right)^{1/2}.$$

Подставив найденное выражение для k в предыдущее соотношение, получим

$$h_n = h\left(\frac{h_1}{h}\right)^n = \frac{h_1^n}{h^{n-1}}.$$

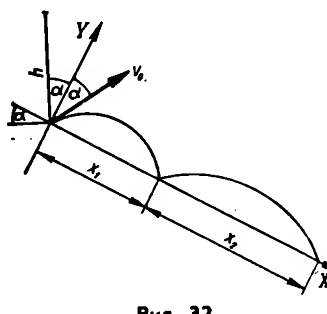


Рис. 32

2.35. Упругое тело падает с высоты h на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α, и упруго отражается с той же скоростью. Найти расстояния x_1, x_2, ..., x_n между точками ударов: первого и второго, второго и третьего и т. д. и, наконец, n — 1-го и n-го (рис. 32). Кроме того, найти x_1 при условии, что наклонная плоскость движется вертикально вверх с постоянной скоростью u.

Скорость тела в момент первого удара равна $v_0 = \sqrt{2gh}$. Начальная скорость тела после отражения от плоскости имеет то же значение, но другое направление, симметричное относительно оси Y. Проекции начальной скорости

$$v_{0y} = v_0 \cos\alpha; \quad v_{0x} = v_0 \sin\alpha.$$

Уравнения движения тела в проекциях на оси:

$$v_x = v_{0x} + a_x t; \quad v_y = v_{0y} + a_y t;$$
$$x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad y = v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2},$$

где

$$a_x = g \sin\alpha; \quad a_y = -g\cos\alpha;$$
$$v_x = v_0 \sin\alpha + gt \sin\alpha; \quad v_y = v_0 \cos\alpha - gt\cos\alpha.$$

Время t_1 между первым и вторым ударами найдем из условия $y = 0$:

$$v_{0y} + \frac{a_y t_1}{2} = v_0 \cos\alpha - \frac{gt_1 \cos\alpha}{2} = 0;$$
$$t_1 = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\sqrt{2gh}}{g}.$$

Подставляем это значение в уравнение движения по оси X

$$x_1 = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{2v_0}{g} + \frac{g \sin\alpha}{2} \cdot \frac{4v_0^2}{g^2} = \frac{8v_0^2}{2g} \sin\alpha = 8h \sin\alpha.$$

Проекции скорости в момент второго удара:

$$v_x = v_0 \sin\alpha + g \sin\alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = 3v_0 \sin\alpha;$$

$$v_y = v_0 \cos\alpha - g \cos\alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = \pm v_0 \cos\alpha.$$

Знак «—» соответствует моменту падения, знак «+» — моменту отражения, т. е. v_y лишь меняет знак.

В момент n-го удара проекции скорости после отражения будут равны

$$v_x = (2n-1)\, v_0 \sin\alpha; \quad v_y = v_0 \cos\alpha.$$

Таким образом, по оси X проекция скорости все время равномерно возрастает, а по оси Y — остается постоянной. Промежутки времени между ударами не зависят ни от каких переменных величин, и поэтому одинаковы для всех положений.

Найдем расстояние x_2 между точками второго и третьего ударов:

$$x_2 = 3v_0 \sin\alpha \cdot \frac{2v_0}{g} + g \sin\alpha \left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 = 2 \cdot 8h \sin\alpha.$$

Продолжая таким же путем вычисления, найдем, что $x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n = 1 : 2 : 3 : \ldots : n$. Поэтому расстояние между точками n-го и $n+1$-го ударов равно

$$x_n = 8nh \sin\alpha.$$

Если наклонная плоскость движется вверх со скоростью $\vec{u}$, то относительная скорость тела и плоскости будет равна $\vec{v}_{1,2} = \vec{v} - \vec{u}$. Учитывая направления $\vec{v}$ и $\vec{u}$, находим, что перед ударом $|v_{1,2}| = v + u$. Эту величину вводим в формулу для x_1 вместо v_0, причем получаем

$$x_1 = \frac{4 \sin\alpha}{g} (v+u)^2.$$

2.36. Точка скользит по наклонной плоскости призмы с относительной скоростью $v = \sqrt{2gy}$, где y — ордината точки (рис. 33). В начальный момент точка находилась на верху призмы, на высоте h. Призма движется вправо с переносной скоростью u. Найти абсолютную скорость точки в момент, когда она касается горизонтальной плоскости.

Выбрав оси координат, как показано на чертеже, находим проекции абсолютной скорости w:

$$w_x = v_x + u_x = \sqrt{2gy} \cos\alpha + u;$$

$$w_y = v_y + u_y = \sqrt{2gy} \sin\alpha.$$

Модуль w определяем для точки касания с полом, т. е. при $y = h$:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{u^2 + 2gh + 2u\sqrt{2gh} \cos\alpha}.$$

Направление скорости w определяется углом γ, который она образует с осью X:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{w_y}{w_x} = \frac{\sqrt{2gh}\sin\alpha}{\sqrt{2gh}\cos\alpha + u}.$$

2.37. Найти время действия фотографического затвора, если при фотографировании шарика, падающего от нулевой отметки вертикальной сантиметровой шкалы без начальной скорости, на негативе получилась полоска от n_1-го до n_2-го деления шкалы.

Обозначим моменты прохождения шариком отметок n_1 и n_2 через t_1 и t_2 и длительность падения от отметки n_1 до отметки n_2 через τ. Тогда

$$n_1 = \frac{gt_1^2}{2}; \quad n_2 = \frac{gt_2^2}{2}; \quad t_2 - t_1 = \tau,$$

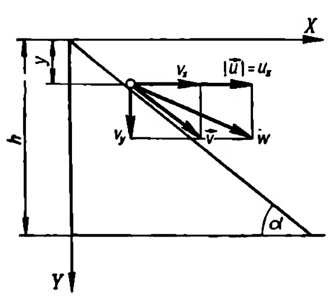


Рис. 33

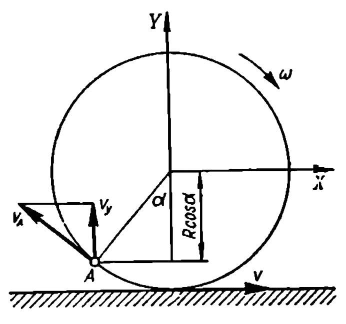


Рис. 34

откуда

$$t_1 = \sqrt{\frac{2n_1}{g}}; \quad t_2 = \sqrt{\frac{2n_2}{g}}; \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}\right).$$

2.38. Автомобиль движется без скольжения по горизонтальной дороге со скоростью v. На какую максимальную высоту забрасываются капли воды, отрывающиеся от колес? Радиус каждого колеса равен R.

Введем систему координат, связанную с осью колеса и движущуюся вместе с машиной равномерно относительно земли (рис. 34).

Если капля отрывается в точке A, то ее скорость в момент отрыва $v_A = v$. Вертикальная составляющая скорости $v_y = v\sin\alpha$. После отрыва капля движется с ускорением g и высота ее подъема (см. задачу 2.28)

$$h = R - R\cos\alpha + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Из последнего уравнения находим:

$$\cos\alpha_{1,2} = -\frac{Rg}{v^2} \pm \sqrt{\left(\frac{Rg}{v^2}+1\right)^2 - \frac{2gh}{v^2}},$$

причем должны выполняться условия $h \leqslant (v^2/2g)\,[(Rg/v^2)+1]^2$ и $|\cos\alpha_{1,2}| \leqslant 1$.

Из последнего уравнения с учетом формулы для h следует:

1) если $Rg/v^2 \leqslant 1$, то $\cos\alpha_1$ имеет смысл при $h \leqslant (v^2/2g) \times \times [(Rg/v^2)+1]^2$; $\cos\alpha_2$ имеет смысл при $h \geqslant 2R$;

2) если $Rg/v^2 > 1$, то $\cos\alpha_1$ имеет смысл при $h \leqslant 2R$; $\cos\alpha_2$ смысла не имеет.

Следовательно,

$$h_{\text{макс}} = \begin{cases} \dfrac{v^2}{2g}\left(\dfrac{Rg}{v^2}+1\right)^2, & \dfrac{Rg}{v^2} \leqslant 1; \\ 2R, & \dfrac{Rg}{v^2} > 1. \end{cases}$$

2.39. Падающее без начальной скорости тело проходит за последние τ секунд своего падения $1/n$ часть всего пути. Найти полное время t и полную высоту падения h.

Расстояние, пройденное за время $t-\tau$, равно

$$\frac{g(t-\tau)^2}{2} = h - \frac{h}{n} = h\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{gt^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Из равенства

$$(t-\tau)^2 = t^2\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

учитывая, что $t-\tau \geqslant 0$, находим

$$t = \tau\left(n + \sqrt{n(n-1)}\right),$$

после чего можем вычислить h по формуле

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

2.40. Окружность лежит в вертикальной плоскости. Из верхнего конца вертикального диаметра d (рис. 35) по желобам, расположенным вдоль различных хорд, падают одинаковые небольшие тяжелые тела. Найти времена их падения и показать, что они одинаковы. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Время движения по произвольной хорде длиной l определяется из выражения

$$l = g\sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} = g\,\frac{h}{l}\cdot\frac{t^2}{2},$$

где $g\sin\alpha$ — проекция ускорения свободного падения на направление движения.

Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}}.$$

Из подобия треугольников ABC и ADC находим, что

$$\frac{l}{h} = \frac{d}{l}; \quad l^2 = hd.$$

Таким образом, $t = (2d/g)^{1/2}$, т. е. не зависит от длины хорды. Другими словами, для всех хорд t одинаково.

2.41. С какой начальной скоростью надо бросить вниз мяч с высоты h, чтобы он подскочил на высоту nh?

Обозначим искомую скорость через $v_н$, скорость в момент приземления мяча — через v_0. Тогда

$$v_0^2 - v_н^2 = 2gh.$$

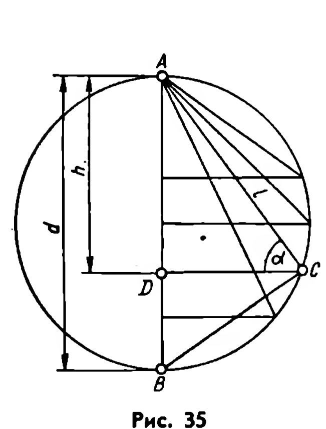


Рис. 35

Рис. 36

Считаем мяч абсолютно упругим. При этом значение скорости его после удара о землю останется неизменным, а направлена она будет вертикально вверх. На высоте nh скорость будет равна нулю, т. е.

$$0 = v_0^2 - 2ngh; \quad v_0^2 = 2ngh;$$

$$v_н^2 = v_0^2 - 2gh = 2ngh - 2gh = 2gh\,(n-1);$$

$$v_н = \sqrt{2gh\,(n-1)}.$$

2.42. Скорость u течения реки у берега равна нулю и увеличивается пропорционально расстоянию от берега до середины, где она равна u_L. Ширина реки равна $2L$. Под каким углом к течению должен быть направлен нос лодки, чтобы, отплыв от одного берега со скоростью v, она подошла кратчайшим путем к буйку посередине реки точно против места отплытия?

Направим ось X, как показано на рис. 36. Тогда закон изменения скорости течения u с удалением от берега до середины реки будет иметь вид:

$$u = u_L \frac{x}{L}.$$

Для того чтобы траектория лодки представляла собой прямую, соединяющую место отплытия с буйком, необходимо, чтобы состав-

ляющая скорости лодки v, направленная против течения, возрастала по мере удаления от берега. Так как значение скорости v задано и не может изменяться, то, очевидно, должно изменяться направление этой составляющей, т. е. угол φ должен возрастать с ростом x.

Составляющие скорости v равны:

$$v_x = v\cos\varphi;$$

$$v_y = v\sin\varphi - u = v\sin\varphi - u_L\frac{x}{L}.$$

В любом случае $x = vt\cos\varphi$, поэтому

$$v_y = v\sin\varphi - \frac{u_L}{L}vt\cos\varphi = v_0' - at,$$

где

$$v_0' = v\sin\varphi; \quad a = \frac{u_L v\cos\varphi}{L}.$$

Так как

$$y = v_0' t - \frac{at^2}{2},$$

то

$$y = vt\sin\varphi - \frac{u_L v\cos\varphi}{2L}t^2.$$

Положив в этом выражении $y = 0$ (условие прямолинейности траектории лодки), найдем соотношение

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u_L}{2L}t,$$

показывающее, как меняется угол φ в функции времени.

Чтобы найти закон изменения φ в функции расстояния, подставим вместо t его выражение

$$t = \frac{x}{v\cos\varphi}.$$

При этом получим

$$\sin\varphi = \frac{u_L}{2Lv}x.$$

Таким образом, по мере удаления от берега нос лодки должен поворачиваться все круче против течения (поперечная составляющая скорости v_x, пропорциональная $\cos\varphi$, при этом будет уменьшаться). Наибольший угол φ достигается при $x = L$, когда $\sin\varphi = u_L/2v$. При $u_L > 2v$ лодка вообще не достигнет буйка.

2.43. Зубчатое колесо диаметром D_1 находится во внешнем зацеплении с зубчатым колесом диаметром D_2. Оба колеса вращаются вокруг неподвижных осей, причем число оборотов первого колеса за 1 с равно n_1. Найти число оборотов второго колеса за 1 с (рис. 37).

В месте соприкосновения зубьев линейные скорости колес одинаковы

$$v = \frac{\omega_1 D_1}{2} = \frac{\omega_2 D_2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{n_1 D_1}{2} = \frac{n_2 D_2}{2},$$

откуда получаем полезное соотношение

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1},$$

с помощью которого находим

$$n_2 = n_1 \frac{D_1}{D_2}$$

(колеса вращаются в разных направлениях).

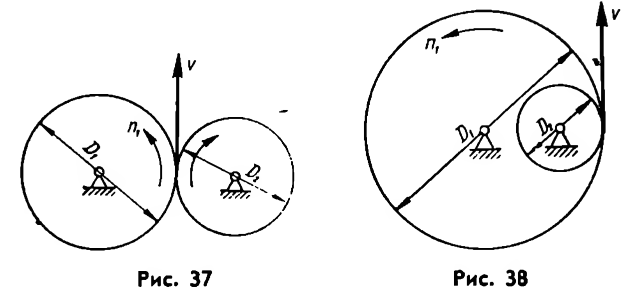


Рис. 37 Рис. 38

2.44. Зубчатое колесо диаметром D_1 находится во внутреннем зацеплении с зубчатым колесом диаметром D_2, расположенным внутри первого колеса (рис. 38). Колесо D_1 делает n_1 об/с, вращаясь вокруг неподвижной оси. Найти диаметр колеса D_2, если оно должно делать n_2 об/с.

Аналогично предыдущей задаче

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1},$$

откуда

$$D_2 = D_1 \frac{n_1}{n_2}$$

(оба колеса вращаются в одном направлении).

2.45. Для спуска груза M, привязанного к концу троса (рис. 39), намотанного на барабан III, вытягивают со скоростью v канат A, намотанный на барабан I. На одной оси с барабаном I радиусом r_1 насажено зубчатое колесо I радиусом R_1, жестко скрепленное с ним. Зубчатое колесо I сцеплено с зубчатым колесом 2 радиусом r_2, которое вращается как одно целое с зубчатым колесом II радиусом R_2. Последнее сцеплено с зубчатым колесом 3 радиусом r_3, вращающимся как одно целое с барабаном III радиусом R_3. Определить скорость опускания груза M, если оси всех колес неподвижны.

В точках соприкосновения любой пары колес линейные скорости обоих колес одинаковы. Скорость точки на окружности барабана *I* радиуса r_1 равна скорости v точек каната. Модуль угловой скорости барабана *I* (и одновременно зубчатого колеса *1*) равен

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1}.$$

Линейная скорость на ободах зубчатых колес *1* и *2* равна

$$v_1 = \omega_1 R_1 = \frac{v}{r_1} R_1.$$

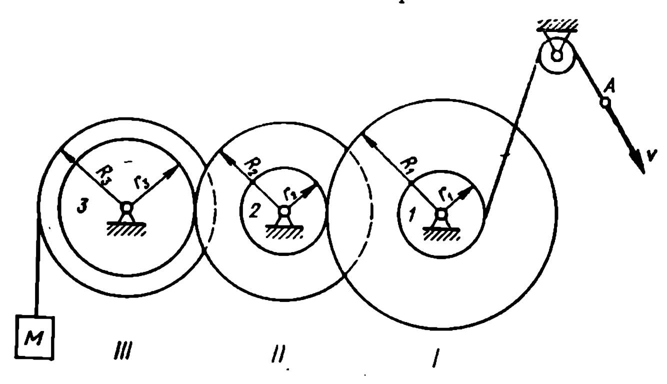


Рис. 39

Модуль угловой скорости колес *2* и *II* равен

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{vR_1}{r_1 r_2}.$$

Линейная скорость на ободах зубчатых колес *II* и *3*, сцепленных между собой, равна

$$v_2 = \omega_2 R_2 = \frac{vR_1R_2}{r_1 r_2}.$$

Модуль угловой скорости зубчатого колеса *3* и барабана *III*

$$\omega_3 = \frac{v_2}{r_3} = \frac{vR_1R_2}{r_1 r_2 r_3}.$$

Линейная скорость точки на ободе барабана *III*, равная искомой скорости груза *M*,

$$v_3 = \omega_3 R_3 = \frac{vR_1R_2R_3}{r_1 r_2 r_3}.$$

2.46. На круглой платформе радиусом R, вращающейся с угловой скоростью ω, стоит человек, бросающий камень со скоростью v в мишень, которая также установлена на платформе. В первом случае

человек находится в центре платформы, а мишень — на краю; во втором — человек и мишень меняются местами. Найти угол опережения при бросании камня в обоих случаях.

1) В первом случае расстояние, пройденное камнем, равно R, и время его полета равно R/v, где v — скорость камня. За это время платформа повернется на угол $\varphi = \omega R/v$ (рис. 40, *а*). Это и есть угол опережения.

2) Во втором случае человек (а следовательно, и камень) обладает линейной скоростью ωR. Для того чтобы скорость и траектория камня были направлены по радиусу от окружности к центру (рис. 40, *б*), камень следует бросить под углом β к этому направлению:

$$\sin\beta = \frac{\omega R}{v},$$

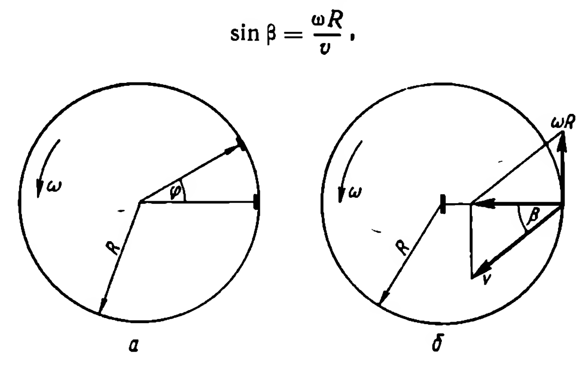


Рис. 40

при этом результирующая скорость камня вдоль радиуса равна

$$v\cos\beta = v\sqrt{\frac{v^2-\omega^2R^2}{v^2}} = \sqrt{v^2-\omega^2R^2}.$$

2.47. Диск радиусом R катится без скольжения с постоянной скоростью v. Найти геометрическое место точек на диске, которые в данный момент имеют скорость v (рис. 41).

Движение диска со скоростью v можно рассматривать как вращение с угловой скоростью $\omega = v/R$ вокруг мгновенного центра (точки касания диска и плоскости). Скорость любой точки на диске, находящейся на расстоянии r от мгновенного центра, равна $\omega r = vr/R$ и направлена перпендикулярно к r.

По условию $vr/R = v$, т. е. $r = R$. Следовательно, искомое геометрическое место представляет собой дугу радиусом R, проведенную из мгновенного центра вращения диска.

2.48. Цилиндр радиусом R вращается между двумя параллельными рейками, движущимися в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 (скольжение отсутствует). Найти угловую скорость вращения цилиндра и скорость его центра (рис. 42). Решить эту же задачу для случая движения реек в противоположные стороны.

Цилиндр выполняет два движения: вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω и движется поступательно со скоростью v. Если бы он не вращался, то скорости реек были бы одинаковы и равны v.

Вращение приводит к тому, что скорость одной из реек уменьшается на величину ωR (линейная скорость на окружности цилиндра), а скорость другой — увеличивается на ту же величину, т. е.

$$v_1 = v + \omega R;$$
$$v_2 = v - \omega R.$$

Отсюда

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2); \quad \omega = \frac{v_1 - v_2}{2R}.$$

Когда скорости реек направлены в разные стороны,

$$v_1 = v + \omega R;$$
$$-v_2 = v - \omega R.$$

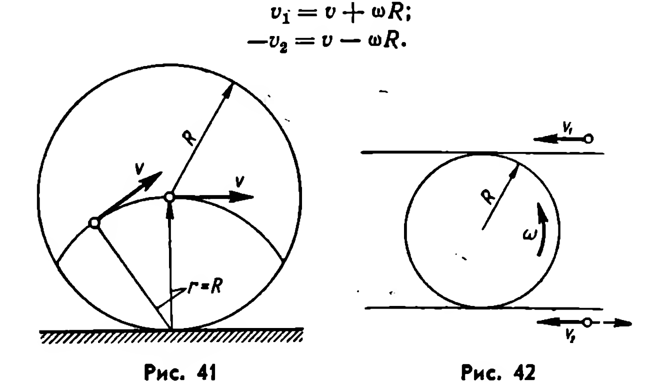


Рис. 41 Рис. 42

Отсюда

$$v = \frac{1}{2}(v_1 - v_2); \quad \omega = \frac{v_1 + v_2}{2R}.$$

2.49. Шарикоподшипник состоит из двух колец — внутреннего радиусом R_2 и внешнего радиусом R_1 — и расположенных между ними шариков, радиус которых r. Внешнее кольцо вращается с линейной скоростью v_1, а внутреннее — со скоростью v_2. Найти линейную скорость v и скорость вращения ω шариков вокруг собственного центра в предположении, что проскальзывание между шариками и кольцами отсутствует (рис. 43).

Так как проскальзывание отсутствует, линейная скорость шарика в точках B и A равна

$$v_B = v + \omega r = v_1;$$
$$v_A = v - \omega r = v_2.$$

Отсюда

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}; \quad \omega = \frac{v_1 - v_2}{2r}.$$

Заметим, что ответ не зависит от радиусов колец R_1 и R_2. Поэтому, предположив, что эти радиусы увеличиваются до бесконечности,

получим случай двух параллельных прямых реек, между которыми вращается колесо (задача 2.48).

2.50. Катушка с намотанной на нее нитью катится без скольжения по горизонтальной плоскости благодаря вытягиванию нити в горизонтальном направлении со скоростью v. Радиусы внутренней и внешней поверхностей катушки соответственно равны r и R. Найти скорость точек O и A (рис. 44).

Рассматривая точку C как мгновенную ось вращения, находим угловую скорость катушки при ее вращении вокруг точки C:

$$\omega = \frac{v}{BC} = \frac{v}{R - r}.$$

Скорости точек O и A равны

$$v_O = \omega R = \frac{vR}{R - r};$$

$$v_A = \omega 2R = \frac{2vR}{R - r}.$$

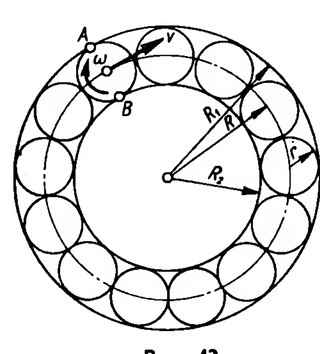


Рис. 43

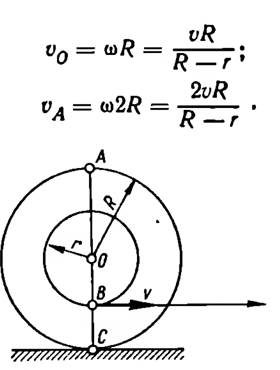


Рис. 44

2.51. Катушка, состоящая из внутреннего цилиндра радиусом r, на который намотана нерастяжимая нить, и внешнего цилиндра радиусом R, катится без скольжения по горизонтальной поверхности под действием натягиваемой нити. Нить тянется со скоростью v под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 оси катушки (рис. 45) и ее направление при различных углах α.

Движение катушки можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси A. Поэтому угловые скорости точек B и O относительно мгновенной оси A одинаковы и равны

$$\frac{v_0}{R} = \frac{v'}{AB},$$

откуда

$$v_0 = \frac{Rv'}{AB}.$$

Отметим, что вектор $\vec{v}'$ направлен перпендикулярно к отрезку AB, а вектор $\vec{v}$ — перпендикулярно к отрезку OB.

Из треугольника AOB находим:

$$\frac{R}{\sin(90^\circ + \beta)} = \frac{AB}{\sin\alpha}; \quad AB = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}.$$

Из треугольника скоростей

$$v' = \frac{v}{\sin\beta}.$$

Исключив $\sin\beta$ и v', получим

$$v_0 = \frac{vR}{|R\cos\alpha - r|}.$$

При некотором значении $\alpha = \alpha_0$ величина $R\cos\alpha$ будет равна r и направление силы, приложенной к нити, пройдет через мгновенную ось вращения A. При этом качение катушки невозможно и $v = 0$, так что выражение для v_0 становится неопределенным (нуль в числителе и знаменателе). При $\alpha < \alpha_0$ катушка будет катиться вправо, а при $\alpha > \alpha_0$ — влево.

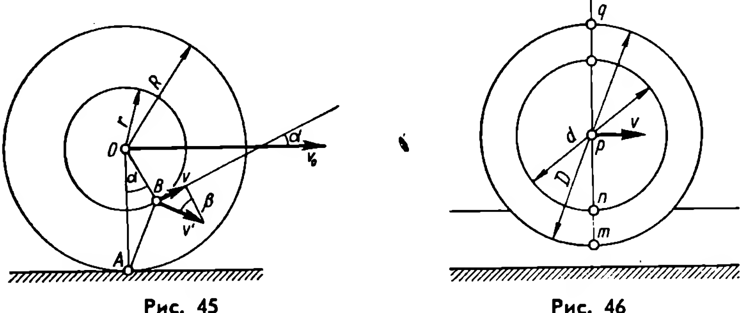


Рис. 45 Рис. 46

2.52. Вагон движется по рельсам со скоростью v. Найти линейную скорость точек m, n, p, q обода и реборды колеса (рис. 46). Диаметры колеса и реборды равны d и D соответственно. Задачу решить для неподвижного наблюдателя, находящегося вне вагона, и для наблюдателя, движущегося с вагоном.

1) Для неподвижного наблюдателя точка n является мгновенной осью вращения колеса. Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{v}{d/2},$$

так что линейные скорости точек m, p и q равны соответственно

$$v_m = -\omega\frac{D-d}{2} = \left(1 - \frac{D}{d}\right)v;$$

$$v_p = v;$$

$$v_q = \omega\frac{D+d}{2} = \left(1 + \frac{D}{d}\right)v.$$

2) Для наблюдателя, движущегося вместе с вагоном, ось колеса неподвижна. Линейная скорость точки n равна $-v$, и угловая скорость колеса

$$\omega' = -\frac{v}{d/2}.$$

Линейные скорости точек m, p, q равны соответственно

$$v_m = -v\frac{D}{d}; \quad v_p = 0; \quad v_q = v\frac{D}{d}.$$

2.53. По горизонтальной плоскости катится без скольжения с постоянной скоростью v обруч радиусом R. Найти скорость и ускорение любой точки обруча (рис. 47) в лабораторной (неподвижной) системе отсчета.

Обруч вращается вокруг мгновенного центра с угловой скоростью $\omega = v/R$. Линейная скорость любой точки на ободе обруча с радиус-вектором $\vec{r}$ равна ωr (радиус-вектор проведен из мгновенного центра). Обозначив угол между вертикалью, проведенной через мгновенный центр, и радиус-вектором через α, найдем, что $r = 2R\cos\alpha$. Поэтому линейная скорость точки на ободе равна $v_л = 2\omega R\cos\alpha = 2v\cos\alpha$ и направлена перпендикулярно к радиус-вектору. Если скорость обруча постоянна, то все его точки имеют только центростремительное ускорение $v_л^2/r = 4v^2\cos^2\alpha/2R\cos\alpha = 2v^2\cos\alpha/R$.

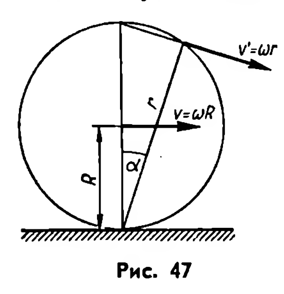


Рис. 47

2.54. С какой скоростью и в каком направлении должен лететь самолет над экватором на высоте h, чтобы для него Солнце находилось все время на одной и той же высоте?

Очевидно, угловые скорости Земли и самолета должны быть одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Угловая скорость Земли $\omega = 2\pi n = 2\pi/T$, где T — период обращения Земли вокруг своей оси. Линейная скорость самолета на высоте h равна

$$v = \omega r = 2\pi\frac{R+h}{T},$$

где R — радиус Земли. Направление — с востока на запад.

2.55. По диску, равномерно вращающемуся с угловой скоростью ω, движется со скоростью u от центра к окружности точка. Найти абсолютную скорость точки (по отношению к лабораторной системе отсчета) в момент, когда ее расстояние от центра диска равно r (рис. 48).

Линейная скорость точки в рассматриваемый момент времени равна $v = \omega r$. Эта скорость направлена по касательной к окружности и является переносной, в то время как u направлена по радиусу и представляет собой относительную скорость точки. Абсолютная скорость равна

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}; \quad w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + \omega^2 r^2}.$$

2.56. По направлению к центру диска, вращающегося с угловой скоростью ω, движется точка со скоростью v в лабораторной системе отсчета. Найти скорость точки относительно диска в момент, когда расстояние от точки до центра диска равно l (рис. 49).

В данном случае скорость v точки — ее абсолютная скорость. Переносным движением является вращение диска. Поэтому переносная скорость точки есть скорость вращения того места, где в данный момент находится точка (если вообразить, что это место жестко связано с диском). Она равна $u = \omega l$ и направлена по касательной к окружности радиуса l. Вектор относительной скорости

$$\vec{w}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{абс}} - \vec{u}_{\text{пер}}.$$

Модуль относительной скорости

$$w_{\text{отн}} = \sqrt{v^2 + \omega^2 l^2}.$$

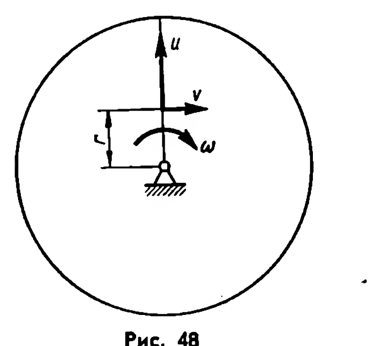


Рис. 48

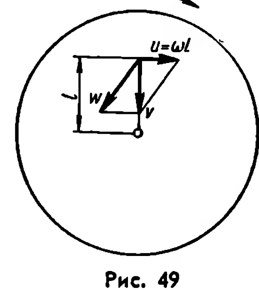


Рис. 49

2.57. Над экватором планеты движется спутник в сторону ее вращения. Скорость спутника относительно неподвижной системы отсчета, не связанной с планетой, — v_1, линейная скорость точки экватора — v_2, радиус планеты — R_2, радиус орбиты спутника — R_1. Найти скорость спутника относительно планеты.

Задача подобна предыдущей, так как и здесь приходится вообразить, что место, где в данный момент находится спутник, жестко связано с планетой.

Переносная скорость вращения этого «места» равна $v_{\text{пер}} = v_2 R_1/R_2$ и направлена по касательной к окружности радиусом R_1.

Абсолютная скорость спутника равна v_1 и направлена в ту же сторону. Поэтому относительная скорость равна

$$v_{\text{отн}} = v_1 - v_2 R_1/R_2.$$

2.58. Вагон A движется по закруглению радиусом R с линейной скоростью v, вагон B — прямолинейно со скоростью w (рис. 50). Расстояние OB равно l. Найти скорость u вагона B относительно вагона A в момент, когда расстояние AB минимально и точка A лежит на прямой OB.

Так же, как и в двух предыдущих задачах, рассматриваем скорость w как абсолютную. Переносную скорость места, где в рассматриваемый момент находится вагон A, определяем из выражения

$$v_{\text{пер}} = \frac{v}{R} l,$$

предполагая, что это «место» жестко связано с вагоном A. Переносная скорость, очевидно, направлена по касательной к закруглению, т. е. параллельно направлению w. Поэтому относительная скорость

$$u_{\text{отн}} = w - vl/R.$$

2.59. Круглый диск радиусом R катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Угловая скорость диска равна ω. Найти скорости точек A, B, C, O диска (рис. 51) в данный момент.

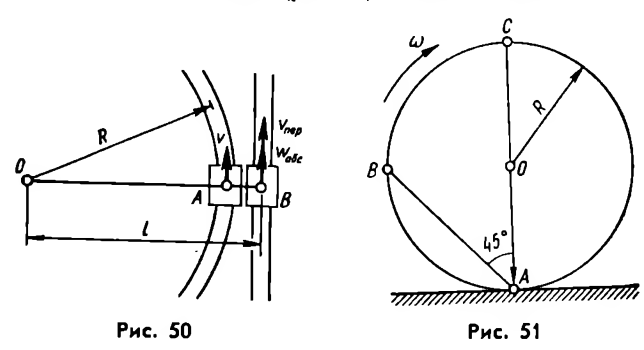


Рис. 50 Рис. 51

Так как мгновенный центр скоростей находится в точке соприкосновения диска и плоскости, то скорости указанных точек равны: $v_A = 0$ (по определению мгновенного центра); $v_O = \omega R = \text{const}$ (так как расстояние от точки O до мгновенного центра постоянно и равно R); $v_B = AB\omega = \sqrt{2}\,\omega R$; $v_C = 2\omega R$.

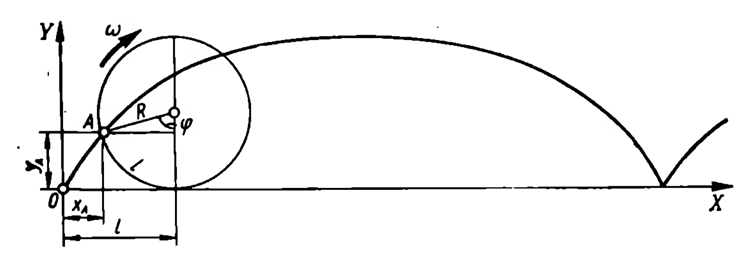


Рис. 52

2.60. Кольцо радиусом R катится без скольжения по горизонтальной поверхности с угловой скоростью ω (рис. 52). Найти зависимость координат точки A кольца от времени. Начальные условия: $x_A = 0$; $y_A = 0$; $\varphi = 0$;

$$y_A = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi) = R(1 - \cos\omega t);$$
$$x_A = l - R\sin\varphi = l - R\sin\omega t.$$

Если кольцо не проскальзывает, то это означает, что выполняется условие $l = R\varphi = R\omega t$. Тогда

$$x_A = R(\omega t - \sin \omega t);$$
$$y_A = R(1 - \cos \omega t).$$

2.61. Тело начинает равноускоренно вращаться и делает за $t = 2$ мин $m = 3600$ об. Найти угловое ускорение тела.

По формулам

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \omega_0 = 0; \quad \varphi = 2\pi m$$

находим

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{4\pi m}{t^2} = \frac{4\pi \cdot 3600}{(2 \cdot 60)^2} = \pi \text{ рад/с}^2.$$

2.62. Маховик, вращавшийся с постоянной угловой скоростью ω_0, был отключен от двигателя и, сделав m оборотов, остановился. Найти угловое ускорение маховика.

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi = 4\pi m\varepsilon; \quad \omega = 0;$$
$$\varepsilon = -\frac{\omega_0^2}{4\pi m}.$$

2.63. Маховик радиусом R начинает вращаться равноускоренно. В момент времени t_1 скорость точки на ободе маховика становится равной v_1. Найти угловую скорость ω_2, нормальное a_n, касательное a_t и полное a ускорения точки в момент t_2.

В момент t_1 угловая скорость $\omega_1 = v_1/R$; угловое ускорение $\varepsilon = \omega_1/t = v_1/Rt_1$; касательное ускорение $a_t = \varepsilon R = \omega_1 R/t_1 = v_1/t_1$.

В момент t_2 угловая скорость $\omega_2 = \varepsilon t_2 = v_1 t_2/Rt_1$; $v_2 = \omega_2 R = v_1 t_2/t_1$; $a_t = v_1/t_1$; $a_n = \omega_2^2 R = v_1^2 t_2^2/Rt_1^2$. Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{v_1^2}{t_1^2} + \frac{v_1^2}{t_1^2}\frac{t_2^2}{R}} = \frac{v_1}{t_1}\sqrt{1 + \frac{t_2^2}{R}}.$$

2.64. Скорость вращения шпинделя достигает рабочего значения $n = 250$ с$^{-1}$ через $t = 30$ с после пуска. Диаметр шпинделя $d = 40$ мм. Найти скорость и ускорение точки на поверхности шпинделя и число оборотов шпинделя до достижения рабочей скорости.

По формулам $\omega = \varepsilon t$ и $\omega = 2\pi n$ находим

$$\varepsilon = \frac{2\pi n}{t} = \frac{50}{3}\pi \text{ рад/с}^2.$$

Число оборотов шпинделя за время t

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{50\pi \cdot 900}{2 \cdot 3} = 7500\pi \text{ рад} = 3750 \text{ об}.$$

Скорость точки на поверхности шпинделя

$$v = \omega\frac{d}{2} = 2\pi n\frac{d}{2} = \pi \cdot 250 \cdot 0{,}04 = 10\pi \text{ м/с}.$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 \frac{d}{2} = 4\pi^2 n^2 \frac{d}{2} = 2\pi^2 (250)^2 \cdot 0{,}04 = 5000\pi^2 \text{ рад/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение

$$a_t = \varepsilon d/2 = \frac{50\pi \cdot 0{,}04}{3 \cdot 2} = \frac{\pi}{3} \text{ м/с}.$$

2.65. Площадка подъемника с грузом стоит на самой нижней отметке. После включения площадка с грузом ускоряется в течение времени t_1, затем поднимается с постоянной скоростью в течение времени t_2 и перед остановкой замедляется в течение $t_3 = t_1$. Диаметр барабана лебедки подъемника равен d. Угловое ускорение барабана при старте и остановке постоянно и равно ε. Найти высоту подъема.

Угол поворота барабана за время ускорения после старта равен

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon t_1^2}{2}.$$

Высота подъема за это же время равна

$$h_1 = \varphi_1 r = \frac{\varepsilon d t_1^2}{4}.$$

Линейная скорость точки на поверхности барабана в конце цикла ускорения равна

$$v = \omega r = \frac{\varepsilon d t_1}{2}.$$

Это и есть постоянная скорость подъема. С этой скоростью лифт поднимается на высоту

$$h_2 = v t_2 = \frac{\varepsilon d}{2} t_1 t_2.$$

Путь, пройденный при замедлении, будет, очевидно, равен пути, пройденному при ускорении:

$$h_3 = \frac{\varepsilon d t_3^2}{4}.$$

Полная высота подъема равна

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{\varepsilon d t_1}{2}(t_1 + t_2).$$

2.66. Зубчатое колесо диаметром D_1 находится во внешнем зацеплении с зубчатым колесом диаметром D_2 и вращается с угловой скоростью ω_1 и угловым ускорением ε_1. Найти угловую скорость и угловое ускорение второго колеса, а также нормальные ускорения соприкасающихся точек колес.

В точке соприкосновения колес равны не только скорости, но и тангенциальные ускорения, так как в противном случае в следующий

момент времени равенство скоростей точек соприкосновения нарушилось бы. Из равенства модулей скоростей следует:

$$v = \frac{\omega_1 D_1}{2} = \frac{\omega_2 D_2}{2},$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{D_1}{D_2}.$$

Из равенства модулей тангенциальных ускорений получаем

$$a_t = \varepsilon_1 D_1/2 = \varepsilon_2 D_2/2,$$

откуда

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{D_1}{D_2}.$$

Нормальные ускорения обоих колес равны

$$a_{n1} = \frac{\omega_1^2 D_1}{2}; \quad a_{n2} = \frac{\omega_2^2 D_2}{2} = \omega_1^2 \frac{D_1^2}{2D_2}$$

и направлены по одной прямой в противоположные стороны (к центрам колес).

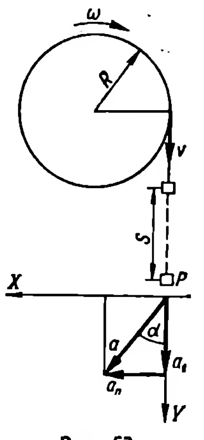


Рис. 53

2.67. Материальная точка движется с ускорением по окружности. Ее линейная скорость равна $v = a_t t$. Найти ее полное ускорение в момент, когда она сделает m оборотов после начала движения. Величину a_t считать известной.

Угол, описанный радиус-вектором точки, после m оборотов равен

$$\varphi = 2\pi m.$$

Пользуясь формулами

$$\omega^2 = 2\varepsilon\varphi; \quad \varepsilon = \frac{a_t}{R}; \quad R\omega^2 = a_n,$$

находим

$$a_n = 4\pi m a_t; \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_t \sqrt{1 + (4\pi m)^2}.$$

2.68. Шкив радиусом R вращается под действием груза P, подвешенного на нити, сматывающейся со шкива. Ускорение груза равно a. Найти угловую скорость шкива в момент, когда груз прошел путь S, а также полное ускорение произвольной точки на окружности шкива (рис. 53).

Ускорение груза есть тангенциальное ускорение a_t. Линейная скорость на окружности шкива в заданный момент $v = \sqrt{2a_t S}$, а угловая скорость шкива в тот же момент $\omega = v/R = \sqrt{2a_t S}/R$. Вообще же говоря, линейная скорость на окружности шкива возрастает со временем по закону $v = a_t t$.

Полное ускорение точки на окружности шкива равно

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = \sqrt{a_t^2 + \frac{4a^2S^2}{R^2}},$$

как показано на рисунке, где буквой α обозначен угол между направлением полного ускорения и направлением оси Y. Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{2S}{R}$.

3. Динамика

Сила. Силой называется физическая величина, характеризующая воздействие одного тела (или нескольких тел) на другое тело или систему тел. Сила — величина векторная. Она обладает численным значением, направлением и точкой (или линией) приложения и подчиняется законам действий с векторами.

В механике встречаются три типа сил:

1) силы взаимного притяжения между телами, называемые гравитационными силами. Эти силы действуют на расстоянии;

2) силы, обусловленные деформацией соприкасающихся тел. Они называются упругими силами. Сюда относятся силы, действующие на тело со стороны растянутой или сжатой пружины, сила, с которой веревка действует на привязанный к ее концу груз, сила, с которой поверхность действует на лежащий на ней груз, и т. д.;

3) силы, также возникающие при соприкосновении тел, но обусловленные только явлениями, происходящими непосредственно около поверхности соприкосновения. Сюда относятся силы трения.

Равнодействующая. Если к материальной точке приложено несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, то их действие можно заменить действием одной силы $\vec{F}$, которая называется равнодействующей и представляет собой векторную сумму данных сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i.$$

Примечание. Если мы имеем дело не с точкой, а с материальным телом, то действие нескольких сил, вообще говоря, нельзя свести к действию одной силы. Зато его всегда можно свести к действию одной силы и одной пары сил (момента силы), вызывающих соответственно поступательное движение и вращение.

Первый закон Ньютона (закон инерции). Если равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке (телу), равна нулю, то скорость точки (тела) не изменяется ни по модулю, ни по направлению. Иначе говоря,

$$\text{при } \vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad \vec{v} = \text{const}.$$

Примечание. В частности, когда $\vec{F} = 0$ и $\vec{v} = 0$, точка (тело) будет оставаться в покое неопределенно долгое время.

Второй закон Ньютона. Если на материальную точку с массой m действует сила $\vec{F}$, то скорость точки меняется, т. е. она приобретает

ускорение $\vec{a}$. Вектор ускорения направлен в ту же сторону, что и вектор силы, а модуль ускорения пропорционален модулю силы и обратно пропорционален массе точки:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad \text{или} \quad a = \frac{F}{m}.$$

Инерциальные системы отсчета — это системы, в которых справедлив закон инерции, т. е. в которых тела или группы тел, не подверженные действию сил, находятся в покое или движутся равномерно и прямолинейно. Системы, движущиеся с ускорением, являются неинерциальными и в них законы Ньютона не выполняются. Например, резкое торможение или ускорение вагона приводит к тому, что находящиеся в покое внутри вагона незакрепленные предметы начинают двигаться, хотя на них, казалось бы, никакие силы не действуют.

Сила инерции. Рассмотрим платформу, движущуюся равномерно и прямолинейно в горизонтальной плоскости. На платформе лежит незакрепленное тело с массой m (трением пренебрегаем). Пусть в некоторый момент времени платформа под действием силы $\vec{F}$ начинает двигаться с горизонтальным ускорением $\vec{a}$, т. е. становится неинерциальной системой. Незакрепленное тело, стремясь сохранить свое предыдущее состояние, будет (с точки зрения наблюдателя, находящегося на платформе) двигаться в направлении, обратном направлению движения платформы, т. е. приобретет ускорение $(-\vec{a})$, в то время как с точки зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на плоскости, тело сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения.

Таким образом, по мнению наблюдателя, движущегося вместе с платформой, на тело действует некоторая сила $\vec{F}'$, равная по модулю и противоположная по направлению силе $\vec{F}$. Она-то и создает ускорение $(-\vec{a})$. Сила $F' = m(-\vec{a})$ называется силой инерции. По мнению же неподвижного наблюдателя, тело m никакого ускорения не испытывает и с его точки зрения равнодействующая сил, действующих на тело, равна нулю (принцип Даламбера):

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0.$$

Пользуясь понятием силы инерции, можно применять законы Ньютона к неинерциальным системам. Например, при движении в поле силы тяжести следует всюду формально заменять вектор $\vec{g}$ на вектор $\vec{g} - \vec{a}$, где a — ускорение системы.

Рассмотрим в качестве примера ускоренно поднимающийся лифт. Его ускорение направлено вверх (в то время как $\vec{g}$ направлено вниз), и поэтому тело, лежащее в этом лифте, давит на пол с силой $m(g + a)$, а тело, свободно падающее, имеет относительно лифта ускорение $(mg + ma)/m = g + a$. Наоборот, в ускоренно опускающемся лифте тело, лежащее на полу, будет давить на него с силой $m(g - a)$, а свободно падающее тело будет иметь относительно лифта ускорение $g - a$.

Примечание 1. Масса, входящая во второй закон Ньютона, называется инертной и является мерой инертности тела, т. е. характеризует способность тела сохранять скорость неизменной в отсутствие сил и приобретать ускорение под действием силы.

Гравитационной массой называется масса, определяющая силу взаимного притяжения тел и входящая в закон всемирного тяготения.

Инертная и гравитационная массы характеризуют различные свойства тел. Однако опыт показывает, что они всегда эквивалентны.

В СИ масса измеряется в килограммах (кг).

Примечание 2. Если на точку действуют несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое ускорение, как если бы другие силы отсутствовали (закон независимости действия сил). Результирующее ускорение равно геометрической сумме ускорений, вызываемых каждой силой в отдельности, т. е. равно ускорению, которое создается равнодействующей $\vec{F} = \sum \vec{F_i} = \sum m\vec{a_i} = m\vec{a}$.

Примечание 3. При решении задач, в которых рассматривается движение нескольких тел, второй закон Ньютона следует применять к каждому из этих тел. Для вычислений используются скалярные проекции на координатные оси

$$F_x = ma_x; \quad F_y = ma_y; \quad F_z = ma_z.$$

В механике в качестве единицы силы выбран ньютон (Н) — сила, сообщающая 1 кг массы ускорение 1 м/с^2.

Количество движения, или импульс. Количеством движения тела с массой m, движущегося со скоростью $\vec{v}$, называется вектор $m\vec{v}$. Если тело находилось в течение короткого* времени Δt под действием силы F, то второй закон Ньютона можно сформулировать следующим образом: изменение количества движения тела равно импульсу силы, действующей на тело, и происходит в направлении действия силы:

$$\Delta (m\vec{v}) = \vec{F}\Delta t,$$

где $\vec{F}\Delta t$ — импульс силы; $\Delta (m\vec{v}) = m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$ — изменение количества движения тела за время Δt.

В механике импульс измеряется в килограммах на метр в секунду.

Количеством движения или импульсом системы тел называется геометрическая сумма импульсов всех тел, входящих в систему:

$$M\vec{v} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + \cdots + m_n\vec{v_n} = \sum m_i\vec{v_i}.$$

Центр масс. В системе материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ существует точка, которой можно приписать полную массу $\sum m_i$ системы, т. е. как бы заменить всю систему массой $M = \sum m_i$, сосредоточенной в одной точке. Этой точке мы можем приписать полный импульс системы $M\vec{v} = \sum m_i\vec{v_i}$. Такая точка называется центром масс

* Время Δt должно быть достаточно коротким для того, чтобы сила F не успела существенно измениться.

или центром инерции системы. Если радиус-вектор i-й точки системы равен r_i, то радиус-вектор центра масс

$$\vec{r}_{\text{ц}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}.$$

В проекциях на координатные оси

$$x_{\text{ц}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_{\text{ц}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_{\text{ц}} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

В случае однородного твердого тела, обладающего центром симметрии, центр масс совпадает с центром симметрии. Если тело имеет ось симметрии, то центр масс лежит на оси симметрии. В более сложных случаях координаты центра масс определяются либо путем вычислений, либо экспериментально.

В поле силы земного притяжения центр масс совпадает с центром тяжести, т. е. с точкой приложения силы тяжести, действующей на тело.

Внешними силами называются силы, действующие на тела некоторой системы со стороны других тел, не принадлежащих к данной системе. Внутренними силами называются силы, действующие между телами одной системы.

Закон сохранения количества движения. Если на систему тел не действуют внешние силы (такая система называется замкнутой), то внутренние силы не могут изменить количество движения системы и оно остается постоянным:

$$\text{при } \vec{F} = 0 \quad M\vec{v} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const}.$$

Например, если два тела с импульсами $m_1\vec{v}_1$ и $m_2\vec{v}_2$ испытывают соударение, то после удара общее количество движения не изменится, т. е.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

если в процессе соударения участвуют только внутренние силы упругости.

Примечание 1. Выше мы определили центр масс как точку, которой можно приписать полный импульс системы. Закон сохранения импульса означает, что, каковы бы ни были внутренние движения в замкнутой системе, ее центр масс сохраняет свое состояние (т. е. покоится или равномерно и прямолинейно движется).

Примечание 2. Закон сохранения количества движения в векторной форме эквивалентен трем скалярным уравнениям в проекциях на оси X, Y, Z:

$$\sum m_i v_{xi} = m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} + \cdots + m_n v_{xn} = \text{const};$$
$$\sum m_i v_{yi} = m_1 v_{y1} + m_2 v_{y2} + \cdots + m_n v_{yn} = \text{const};$$
$$\sum m_i v_{zi} = m_1 v_{z1} + m_2 v_{z2} + \cdots + m_n v_{zn} = \text{const}.$$

Следует иметь в виду, что этот закон может выполняться для одной оси (вдоль которой сумма проекций импульсов постоянна) и не выполняться для другой оси. Например, он может выполняться для горизонтального движения, но не выполняться для вертикального движения, в котором участвует внешняя сила тяжести.

Криволинейное движение. Пусть сила $\vec{F}$, действующая на тело, движущееся со скоростью $\vec{v}$, направлена под углом к скорости. Тогда силу $\vec{F}$ можно разложить на две составляющие: по направлению скорости ($\vec{F_t}$) и по нормали к этому направлению ($\vec{F_n}$), так что

$$\vec{F} = \vec{F_t} + \vec{F_n}; \quad F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2}.$$

В этом случае тело движется по криволинейной траектории и вектор ускорения, который имеет то же направление, что и сила, также будет состоять из двух составляющих: по направлению скорости (тангенциальное ускорение $\vec{a_t}$) и перпендикулярно к скорости (нормальное ускорение $\vec{a_n}$), как уже говорилось в разделе «Кинематика». Очевидно, что

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}; \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

В частности, если сила перпендикулярна к скорости, т. е. $\vec{F} \perp \vec{v}$, то $F = F_n$; $F_t = 0$, тело движется равномерно по окружности радиусом r со скоростью v и его нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = \omega v.$$

Сила F_n, направленная к центру окружности и перпендикулярная к траектории тела, называется центростремительной силой. Очевидно, что

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = 4\pi^2 n^2 rm = \frac{4\pi^2}{T^2} rm.$$

Третий закон Ньютона. Сила, действующая на тело 1, всегда порождается другим телом 2, которое в свою очередь испытывает на себе силу, порождаемую телом 1. Обе силы равны по величине, противоположны по направлению, но приложены к разным телам (1 и 2) и поэтому не уравновешиваются:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}.$$

Свободные и несвободные тела. Реакции связей. Трение. Твердое тело называется свободным, если его движение ничем не ограничено. Оно называется несвободным, если на него наложены связи, ограничивающие его движение в некоторых направлениях. Так, для груза, подвешенного на нити, связью является нить, для лестницы, приставленной к стене, связями является стена и пол, для бильярдного шара — поверхность и борта стола.

Сила $\vec{F}_{1,2}$, с которой тело 1 действует на связь 2, приложена к связи, а противодействующая ей сила $\vec{F}_{2,1}$ приложена к телу 1

и называется реакцией связи 2. Следует помнить, что эти связи — тоже тела, и в определенных условиях они также способны двигаться.

Несвободное твердое тело можно рассматривать, как свободнсе, если мысленно освободить его от связей, заменив их соответствующими реакциями связей. Это иногда упрощает решение задач по механике.

В частности, при решении задач на движение с трением следует различать силы реакций по двум направлениям: по нормали к поверхности и по касательной к ней. Нормальные составляющие возникают благодаря силам нормального давления F_n, а касательные — благодаря силам трения $F_{тр}$.

Например, колеса автомобиля, воздействуя на поверхность Земли, вызывают нормальные и касательные реакции. Нормальная реакция Q_n равна силе нормального давления F_n и они компенсируются за счет упругой (и частично неупругой) деформации. Касательная реакция возникает так: колеса движущегося автомобиля, воздействуя на Землю, отталкивают ее (благодаря наличию трения) с силой, которая приложена к Земле (но не к колесам). По третьему закону Ньютона со стороны Земли возникает равная противодействующая касательная сила реакции, приложенная к колесам. Она-то и является движущей силой (или, как ее иногда называют, силой движущего трения $F_{д. тр}$) и направлена в сторону движения.

Если движущая сила недостаточна для приведения тела в движение, это означает, что существует сила трения покоя, равная и всегда противоположная движущей силе. Силу трения покоя можно определить путем вычисления движущей силы из второго закона Ньютона и приравнивания ее значения искомой силе трения.

По мере возрастания движущей силы сила трения также возрастает до тех пор, пока тело не начнет двигаться. В этот момент сила трения покоя достигает максимального значения и затем переходит в силу трения скольжения.

Максимальную (и только максимальную) силу трения покоя можно вычислить по формуле

$$F_{тр} = kQ_n,$$

где k — коэффициент трения между соприкасающимися поверхностями; Q_n — нормальная реакция.

Сила трения большей частью изображается приложенной к центру тяжести. Иногда ее изображают лежащей в плоскости трения. Оба способа равноправны.

В случае тела, катящегося по поверхности с трением, силу трения качения можно вычислить по формуле

$$F_{тр.\,к} = kF_n/R,$$

где k — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины; F_n — нормальное давление; R — радиус катящейся поверхности.

Работа. Пусть тело под действием приложенной к нему постоянной силы $\vec{F}$ совершило перемещение $\vec{r}$. Скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\vec{r}$ называется работой силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{r}$:

$$A = (\vec{F}\,\vec{r}) = Fr\cos(\vec{F}, \vec{r}).$$

Единицей измерения механической работы является джоуль (Дж) — работа, которую совершает сила в 1 Н на пути в 1 м.

Если на тело действует несколько сил, то произведенная работа равна алгебраической сумме работ отдельных сил:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum A_i.$$

При упругой деформации тела сила возрастает пропорционально перемещению, т. е. $F = kr$. Работу такой переменной силы можно вычислить, введя понятие средней силы $F_{ср}$ на длине перемещения r. Так, например, если не сжатая первоначально пружина сжимается на величину s, причем в конце сжатия сжимающая сила равна F, то средняя сила на длине s равна

$$F_{ср} = \frac{0 + F}{2} = \frac{1}{2} F.$$

Работа, совершаемая при упругой деформации такого типа, равна

$$A = F_{ср} s = \frac{1}{2} Fs = \frac{1}{2} ks^2.$$

Работа по подъему тела с массой m на высоту h в поле постоянной силы тяжести равна

$$A = mgh.$$

Мощностью называется физическая величина, равная работе, произведенной за единицу времени:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{Fr\cos(\vec{F}, \vec{r})}{t} = Fv\cos(\vec{F}, \vec{v}).$$

Скалярное произведение $(\vec{F}\,\vec{v})$ иногда называется тягой (в частности, когда речь идет о реактивных двигателях). Понятие тяги применяется в тех случаях, когда сила приложена к движущемуся телу.

Единица мощности в СИ называется ватт (Вт). Это мощность, при которой за 1 с совершается работа в 1 Дж.

Кинетической энергией движущейся материальной точки (или поступательно движущегося тела) называется скалярная величина

$$W_к = \frac{mv^2}{2},$$

где m — масса; v — скорость движения.

Потенциальной энергией тела или системы тел называется энергия, обусловленная воздействием этих тел друг на друга. В разных случаях она выражается по-разному, так как зависит от взаимного расположения тел. В частности, если принять уровень поверхности Земли за нулевой, то потенциальная энергия тела весом P, поднятого на высоту h над поверхностью Земли, равна произведенной при подъеме работе:

$$W_п = Ph = mgh$$

(при условии, что $h \ll R_{Земли}$, так как в этом случае можно пренебречь изменением значения g с высотой).

Потенциальная энергия сжатой (или растянутой) пружины равна работе, произведенной при ее деформации:

$$W_п = \frac{1}{2} ks^2,$$

где s — абсолютное значение деформации; k — жесткость.

Закон сохранения механической энергии. Полная механическая энергия тела или системы тел равна арифметической сумме кинетических и потенциальных энергий всех тел, входящих в систему:

$$W = \sum W_к + \sum W_п.$$

Если в системе действуют только стационарные силы, в связи с которыми можно говорить о потенциальной энергии (например, сила тяжести или сила упругости), и система изолирована от действия непотенциальных сил (например, сил трения), то полная механическая энергия системы остается постоянной:

$$W = \text{const}.$$

При наличии сил трения или при другой возможности перехода механической энергии в иные виды энергии полная механическая энергия может изменяться.

Закон всемирного тяготения. Две материальные точки (два однородных шара) с массами m и M притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними (между их центрами):

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Здесь γ — гравитационная постоянная, равная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3 кг$^{-1}$ с$^{-2}$.

Если одно из тел — Земля, радиус которой R, а второе находится на высоте h над поверхностью Земли, так что $R + h = r$, то

$$\gamma = \frac{g_0 R^2}{M}; \; F = \frac{mg_0 R^2}{r^2}; \; g = g_0 \frac{R^2}{r^2}.$$

Здесь M — масса Земли; g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли; g — ускорение свободного падения на высоте h.

Равнодействующая силы тяготения и силы инерции, возникающей при вращении Земли, называется силой тяжести. Ее направление определяет вертикаль в данном месте и она создает ускорение свободного падения g.

Вес тела — сила, с которой тело действует на связь, ограничивающую его движение. Вес может меняться в зависимости от ускорения, с которым движется тело. Вес неподвижного тела равен силе тяжести.

Потенциальная энергия в поле силы тяготения. Если небольшое тело с массой m, находящееся вблизи поверхности Земли, удалять от нее, то при этом совершается работа против силы тяготения. При увеличении расстояния сила уменьшается и производимая при этом работа возрастает все медленнее до тех пор, пока это возрастание практически перестанет ощущаться (математически это произойдет на бесконечности). Произведенная работа характеризует потенциальную энергию той точки вблизи Земли, где вначале находилось тело m. Таким образом, потенциальная энергия малого тела с массой m, находящегося в точке на

расстоянии r от центра массы M, равна работе по удалению тела m из этой точки на бесконечность:

$$W_п = W(r) = Fr = -\frac{\gamma Mm}{r} = -mgr = -\frac{mg_0R^2}{r},$$

где g — ускорение свободного падения в данной точке; g_0 — ускорение на поверхности Земли; R — радиус Земли.

Важно помнить, что потенциальная энергия в гравитационном поле Земли (или любого другого тела) вблизи ее поверхности — отрицательна. По мере удаления от Земли потенциальная энергия становится, так сказать, «все менее и менее отрицательной», пока на достаточно большом расстоянии (математически — на бесконечности) не станет практически равной нулю. Поэтому потенциальную энергию в поле тя-

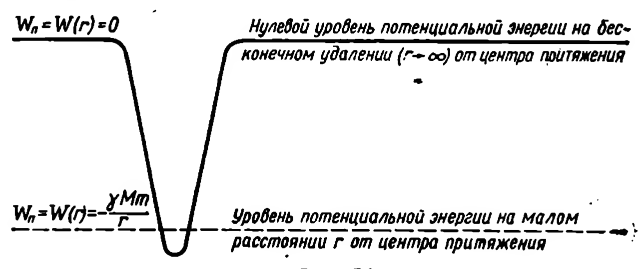


Рис. 54

готения, создаваемом изолированным телом (в предположении отсутствия других масс), часто изображают в виде так называемой потенциальной ямы (рис. 54).

Третий закон Кеплера. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$$

Если орбиты круговые, то роль большей полуоси играет радиус орбиты.

Момент инерции. Если материальная точка с массой m движется по окружности радиуса r, то произведение mr^2 называется моментом инерции этой точки относительно центра вращения. Если рассматривать твердое тело, вращающееся вокруг оси, как совокупность материальных точек Δm_i, каждая из которых находится на расстоянии r_i от оси вращения, то момент инерции этого тела относительно оси вращения можно представить как

$$J = \sum_i r_i^2 \Delta m_i.$$

Для твердых тел различной формы моменты инерции вычисляются методами высшей математики. Для некоторых тел они приведены в тексте задач и в Приложении.

Момент силы. Вращение тела происходит тогда, когда сила $\vec{F}$ приложена к точке тела, находящейся на расстоянии $\vec{r}$ от оси (или

центра) вращения. При этом возникает момент силы, или вращающий момент $\vec{M}$, представляющий собой векторное произведение $\vec{r}$ на $\vec{F}$ (рис. 55, *а*):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}; \; M = rF \sin(\vec{r}, \vec{F}).$$

Если $\vec{r}$ и $\vec{F}$ взаимно перпендикулярны (рис. 55, *б*), то r называется плечом. В этом случае $\sin(\vec{r}, \vec{F}) = 1$ и

$$M = rF.$$

Пара сил. Две параллельные силы, равные по модулю, но направленные в противоположные стороны, называются парой сил (рис. 56).

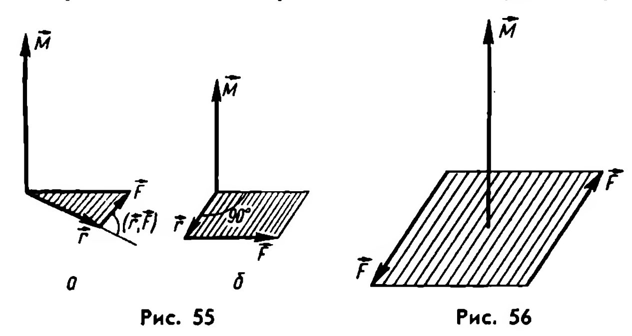


Рис. 55

Рис. 56

Величина пары сил определяется ее вектором момента, численно равным площади параллелограмма, построенного на этих силах. Вектор момента пары сил является свободным вектором, т. е. его можно перемещать в любом параллельном ему направлении.

Первый закон Ньютона для вращающегося тела. Если равнодействующая всех моментов, приложенных к телу, равна нулю, угловая скорость вращения тела не изменяется ни по величине, ни по направлению. Иначе говоря, при

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0 \quad \omega = \text{const}$$

Примечание. В частности, когда $\vec{M} = 0$ и $\omega = 0$, тело не вращается (но может двигаться чисто поступательно).

Второй закон Ньютона для вращающегося тела:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{M}$ — момент силы; J — момент инерции; $\vec{\varepsilon}$ — угловое ускорение.

При сравнении этих формул с выражениями $\vec{F} = 0$ и $\vec{F} = m\vec{a}$ видно, что при вращательном движении тела роль силы $\vec{F}$ играет момент силы $\vec{M}$, роль массы m — момент инерции J, вместо скорости v стоит угловая скорость ω и вместо линейного ускорения $\vec{a}$ — угловое

ускорение $\vec{\varepsilon}$. Аналогичное подобие проявляется и в других случаях (см. ниже).

Момент количества движения для вращающегося тела

$$L = M\,\Delta t = \Delta\,(J\omega),$$

где Δt — малый промежуток времени; $\Delta\,(J\omega)$ — приращение момента количества движения за время Δt; ω — угловая скорость.

В случае материальной точки с массой m, равномерно вращающейся со скоростью v по окружности радиусом r (рис. 57), момент количества движения

$$L = J\omega = mrv.$$

Закон сохранения момента количества движения для изолированной системы вращающихся тел:

$$J\omega = \sum J_i\omega_i = \text{const}.$$

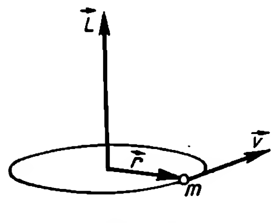


Рис. 57

Третий закон Ньютона для вращающегося тела: $M_{1,2} = -M_{2,1}$.

Работа постоянного момента силы, действующего на вращающееся тело, $A = M\varphi$, где M — момент силы; φ — угол поворота.

Мощность при равномерном вращательном движении $N = M\omega$.

Кинетическая энергия вращательного движения $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$.

Кинетическая энергия тел, совершающих одновременно поступательное и вращательное движения, равна арифметической сумме энергий обоих движений.

Сопоставление уравнений динамики поступательного и вращательного движений:

Поступательное движение	Вращательное движение
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$
Масса m	Момент инерции J
Количество движения $m\vec{v}$	Момент количества движения $J\vec{\omega}$
Первый закон Ньютона	
$v = \text{const}$ при $\sum \vec{F}_i = 0$	$\omega = \text{const}$ при $\sum \vec{M}_i = 0$
Второй закон Ньютона	
$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$	$\sum \vec{M}_i = J\vec{\varepsilon}$
Закон сохранения	
количества движения	момента количества движения
$\sum m_i v_i = \text{const}$	$\sum J_i\omega_i = \text{const}$

Третий закон Ньютона

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \qquad \vec{M}_{1,2} = -\vec{M}_{2,1}$$

Работа

$$A = Fs \qquad A = M\varphi$$

Кинетическая энергия

$$\frac{mv^2}{2} \qquad \frac{J\omega^2}{2}$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + A = \text{const} \qquad \frac{J\omega^2}{2} + A = \text{const}$$

Мощность

$$N = \frac{A}{t} = Fv \qquad N = \frac{A}{t} = M\omega$$

Движение тела переменной массы. Уравнение Мещерского. Если масса тела при движении изменяется (например, при работе ракеты, когда ежесекундно отбрасывается некоторая масса μ), связь между силой, массой и ускорением дается уравнением Мещерского

$$\vec{F} + \vec{v}\mu = m\vec{a},$$

где $\vec{v}$ — скорость отбрасываемой малой массы μ. Произведение $v\mu$ называется реактивной силой, а μ — секундным расходом массы.

При полете ракеты ее масса уменьшается. Наибольшая скорость $v_{\text{макс}}$, которая может быть достигнута с помощью одноступенчатой ракеты, определяется первой формулой Циолковского

$$v_{\text{макс}} = v \ln \frac{m}{m_k},$$

где m — исходная масса ракеты с горючим; m_k — масса ракеты без горючего; v — скорость отбрасываемой массы относительно ракеты; отношение $m/m_k = z$ называется числом Циолковского.

В случае многоступенчатой ракеты с одинаковыми числами Циолковского z у всех n ступеней формула приобретает вид:

$$v_{\text{макс}} = nv \ln z.$$

3.1. Груз весом P свободно лежит на полу лифта. Рассмотреть, что произойдет с грузом, если лифт будет: 1) подниматься с ускорением $\vec{a}$; 2) опускаться с тем же ускорением. Направление вверх считать положительным.

1) Лифт поднимается с ускорением $\vec{a}$. На груз действуют сила $\vec{P} = m\vec{g}$ и реакция пола $\vec{Q}$, равная по модулю силе давления груза и направленная вверх.

По второму закону Ньютона в векторной форме

$$\vec{Q}+\vec{P}=m\vec{a}.$$

В проекции на вертикаль

$$Q-mg=ma;\ Q=P\left(1+\frac{a}{g}\right).$$

Если $a>0$ (движение вверх равноускоренное), то давление груза (и реакция Q) больше, чем вес груза. При $a=g$ вес тела увеличивается вдвое, при $a=2g$ — втрое и т. д. Этот случай соответствует взлету космической ракеты при работающем двигателе.

Если $a<0$, движение вверх будет равнозамедленным. Этому случаю соответствует формула

$$Q-mg=-ma;\ Q=P\left(1-\frac{a}{g}\right).$$

При $|a|=g$ лифт остановится за время $\Delta t=v_0/g$, где v_0 — начальная скорость, причем давление груза на пол в течение времени Δt будет равно нулю. При $|a|>g$ произойдет настолько быстрая остановка лифта, что груз подпрыгнет.

2) Лифт опускается с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз ($a<0$). Имеем такую же формулу, как и в предыдущем случае, т. е.

$$Q=P\left(1-\frac{a}{g}\right).$$

При $|a|<g$ давление груза на пол будет меньше, чем P. При $|a|=g$ лифт и груз будут падать с одинаковыми ускорениями g и груз не будет оказывать на пол никакого давления, т. е. будет невесомым по отношению к лифту. При $|a|>g$ лифт будет падать с ускорением a, а груз — с ускорением g, т. е. груз будет отставать от лифта, или, другими словами, подниматься к потолку лифта с ускорением $a-g$. При $a=2g$ груз окажется прижатым к потолку с силой $mq=P$, т. е. пол и потолок поменяются местами.

Наконец рассмотрим движение вниз при $a>0$, т. е. равнозамедленное движение вниз. В этом случае снова получаем соотношение

$$Q=P\left(1+\frac{a}{g}\right),$$

означающее, что давление груза на пол превышает P, аналогично случаю 1) при $a>0$. Этот случай соответствует спуску космических ракет при работающих тормозных двигателях, т. е. при спуске также возникает перегрузка.

3.2. Тело весом P расположено на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения покоя между телом и плоскостью равен k. К телу приложена сила F под углом α к горизонтали. Найти условия, определяющие характер движения тела.

Второй закон Ньютона в векторной форме (рис. 58):

$$\vec{F}+\vec{P}+\vec{Q}+\vec{F}_{\text{тр}}=m\vec{a}.$$

Возможны следующие варианты движения:

1) Тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, так что ускорение равно нулю. Спроектируем силы на горизонтальную и вертикальную координатные оси, учитывая, что ускорение тела равно нулю:

$$F \cos \alpha - F_{тр} = 0;$$
$$F \sin \alpha + Q - P = 0.$$

Из этих уравнений находим, учитывая, что $F_{тр} = kQ$:

$$F = \frac{kP}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

Заметим, что при $P = F \sin \alpha$ тело начнет отрываться от горизонтальной поверхности ($Q = 0$).

2) Тело движется с ускорением $\vec{a}$. В этом случае уравнения проекций

по горизонтали: $F \cos \alpha - F_{тр} = \frac{P}{g} a$;

по вертикали: $F \sin \alpha + Q - P = 0$,

откуда

$$a = \frac{g\,[F \cos \alpha - k\,(P - F \sin \alpha)]}{P}.$$

Рис. 58

Для того чтобы тело двигалось с ускорением, необходимо соблюдение условия

$$F \cos \alpha - k\,(P - F \sin \alpha) > 0,$$

или

$$F > \frac{kP}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

Коэффициент трения покоя

$$k = \frac{F \cos \alpha}{P - F \sin \alpha}.$$

3.3. Тело весом P расположено на наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 59, *а*, *б*). Максимальный коэффициент трения покоя между телом и плоскостью равен k. К телу приложена горизонтальная сила F. При определенных условиях тело будет двигаться вверх, покоиться или двигаться вниз. Найти условия, определяющие характер движения тела.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

Рассмотрим возможные варианты движения.

1) Тело покоится или движется равномерно и прямолинейно. Выберем в качестве осей координат линию, параллельную плоскости, и линию, перпендикулярную ей, и спроектируем на них силы (рис. 59, *а*).

Так как в данном случае тело покоится или движется вверх по плоскости без ускорения, то сумма проекций сил на каждую ось равна нулю:

$$Q - F\sin\alpha - P\cos\alpha = 0;$$
$$-F_{тр} + F\cos\alpha - P\sin\alpha = 0.$$

Кроме того, $F_{тр} = kQ$.

Из этих трех уравнений находим

$$F = P\frac{k\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - k\sin\alpha}.$$

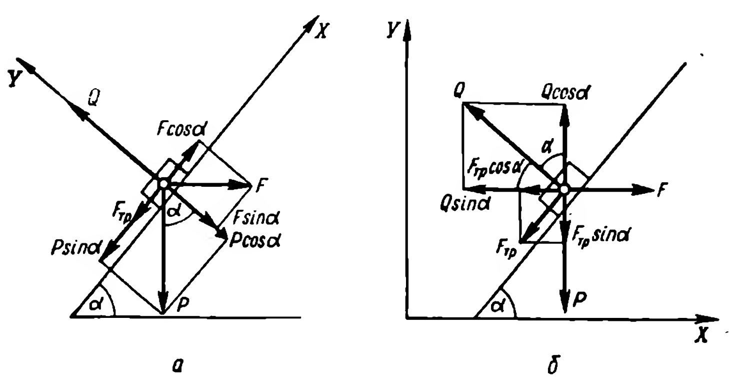


Рис. 59

С таким же успехом можно было бы выбрать в качестве координатных осей вертикальное и горизонтальное направления (рис. 59, *б*):

$$Q\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha - P = 0;$$
$$F - Q\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha = 0.$$

Отсюда, естественно, получаем такое же точно выражение для F, как и выше.

Таким образом, в рассматриваемом случае можно выбирать направления разложения произвольно.

2) Тело движется с ускорением $\vec{a}$ (направленным, например, вдоль наклонной плоскости). В этом случае неправильный выбор направлений разложения сил может усложнить задачу. Здесь проще всего разложить силы на направления вдоль ускорения и перпендикулярно к нему, так как в этом случае вектор ускорения разлагать не надо. Сумма проекций на направление, перпендикулярное ускорению, приравнивается нулю, а сумма проекций на направление ускорения приравнивается ma по второму закону Ньютона.

Согласно рис. 59, *а* можем написать

$$Q - P\cos\alpha - F\sin\alpha = 0;$$
$$F\cos\alpha - F_{тр} - P\sin\alpha = ma = \frac{P}{g}a,$$

откуда

$$a = \frac{g\,[F\cos\alpha - P\sin\alpha - k\,(F\sin\alpha + P\cos\alpha)]}{P}.$$

Отсюда следует, что для того чтобы тело ускоренно двигалось вверх по наклонной плоскости, необходимо выполнение условия

$$[F\cos\alpha - P\sin\alpha - k\,(P\cos\alpha + F\sin\alpha)] > 0,$$

или

$$F > P\,\frac{k\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - k\sin\alpha},$$

или

$$F > P\,\frac{k + \operatorname{tg}\alpha}{1 - k\operatorname{tg}\alpha},$$

причем наклон плоскости должен быть не слишком большим, таким, чтобы выполнялось условие

$$k\operatorname{tg}\alpha < 1 \text{ или } k < \operatorname{ctg}\alpha.$$

В случае ускоренного движения вниз (рис. 59, *а*) силу $F_{тр}$ следует направить в противоположную сторону. Теперь можем написать

$$a = g\,[P\sin\alpha - F\cos\alpha - k\,(P\cos\alpha + F\sin\alpha)]/P,$$

откуда следует условие

$$P\sin\alpha - F\cos\alpha - k\,(P\cos\alpha + F\sin\alpha) > 0,$$

или

$$F < P\,\frac{\sin\alpha - k\cos\alpha}{\cos\alpha + k\sin\alpha},$$

или

$$F < P\,\frac{\operatorname{tg}\alpha - k}{1 + k\operatorname{tg}\alpha}.$$

При этом угол наклона плоскости должен быть не слишком малым, таким, чтобы выполнялось условие $\operatorname{tg}\alpha > k$.

3.4. На горизонтальной плоскости находится тележка с массой M, на которой расположен груз m. К тележке приложена горизонтальная сила F. Коэффициент трения между тележкой и грузом равен k, тележка движется по плоскости без трения. Найти минимальную силу F, при действии которой груз начинает сдвигаться относительно тележки.

Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На груз со стороны тележки действует горизонтальная движущая сила трения $F_{д.\,тр}$, увлекающая груз. По вертикали на груз действуют сила тяжести mg и реакция тележки Q_m. На тележку по горизонтали действуют внешняя сила F и сила трения $F_{тр}$ между грузом и тележкой. По вертикали на тележку действуют сила тяжести $(M + m)\,g$ и реакция поверхности Q_M (рис. 60).

Уравнения в проекциях на горизонталь:

$$F_{д.\,тр.} = ma_1;\; F - F_{тр} = Ma_2.$$

Кроме того,

$$|F_{\text{д. тр}}| = |F_{\text{тр}}|;\ Q_m = mg;\ Q_M = (M+m)\,g.$$

Однако этих уравнений недостаточно для нахождения ускорений, так как силы трения нам неизвестны. Поэтому будем исходить из того, что пока сила F мала и груз не сдвигается относительно тележки, $a_1 = a_2 = a$ и

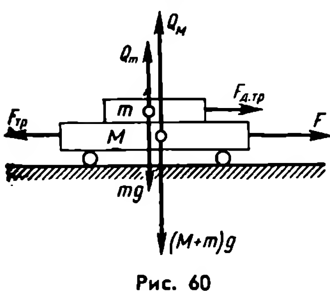


Рис. 60

$$F = (M+m)\,a;\ F_{\text{д. тр}} = ma = \frac{mF_{\text{макс}}}{M+m}.$$

Максимальное значение силы трения определится из соотношения

$$F_{\text{д. тр. макс}} = kQ_m = kmg.$$

Максимальное значение силы F, при котором груз еще не сдвигается относительно тележки, найдем из равенства

$$F_{\text{д. тр. макс}} = kmg = \frac{mF}{M+m},$$

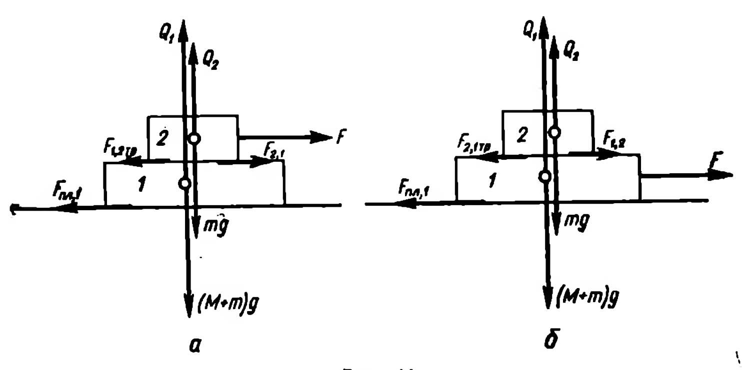


Рис. 61

откуда

$$F_{\text{макс}} = (M+m)\,kg.$$

При превышении этого значения груз начнет сдвигаться.

3.5. На горизонтальной плоскости лежит доска *1* с массой M, на которой помещен груз *2* с массой m (рис. 61, *а*, *б*). Горизонтальная сила F приложена: *а* — к грузу; *б* — к доске. Коэффициент трения между плоскостью и доской — k_1, между доской и грузом — k_2. Найти ускорения обоих тел в первом и втором случае и необходимые условия для того, чтобы: в случае *а* — сдернуть груз с доски; в случае *б* — выдернуть доску из-под груза.

а) Рассмотрим силы, действующие по горизонтали на каждое тело в отдельности. На груз действуют внешняя сила F и сила тормозящего трения $F_{1,2\,тр}$. На доску действуют сила движущего трения $F_{2,1}$ (со стороны груза), приложенная к доске и увлекающая ее за грузом, и сила тормозящего трения между доской и плоскостью $F_{пл,\,1}$. Что касается вертикальных сил, то очевидно, что $Q_2 = mg$ и $Q_1 = (M + m)\,g$. Уравнения в проекциях на горизонталь:

для доски $F_{2,1} - F_{пл,\,1} = Ma_1$;

для груза $F - F_{1,2\,тр} = ma_2$.

Используем также выражения

$$|F_{2,1}| = |F_{1,2тр}| = k_2Q_2 = k_2mg;\ F_{пл,\,1} = k_1Q_1 = k_1(M + m)\,g.$$

Отсюда находим

$$a_1 = \frac{(k_2 - k_1)\,mg}{M} - k_1g;\ \ a_2 = \frac{F}{m} - k_2g.$$

Чтобы сдернуть груз с доски, необходимо соблюдение неравенства $a_2 > a_1$ или $F > (k_2 - k_1)\,mg\,\dfrac{M + m}{M}$.

б) В отличие от случая *а*) сила движущего трения $F_{1,2}$ увлекает груз вслед за доской и приложена к грузу, а не к доске. Кроме того, сила тормозящего трения $F_{2,1тр}$ приложена в этом случае не к грузу, а к доске. Уравнения в проекциях на горизонталь:

для доски $F - F_{пл,\,1} - F_{2,1тр} = Ma_1$;

для груза $F_{1,2} = ma_2$.

Учитывая приведенные выше выражения для сил трения, находим

$$a_1 = \frac{F - (k_1 + k_2)\,mg}{M} - k_1g;\ \ a_2 = k_2g.$$

Чтобы выдернуть доску из-под груза, надо, чтобы выполнялось условие $a_1 > a_2$ или $F > g\,(k_1 + k_2)\,(M + m)$.

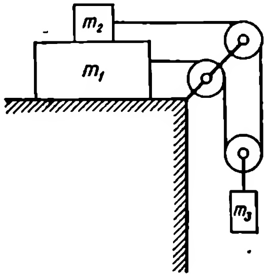


Рис. 62

3.6. На горизонтальной поверхности лежат один на другом два бруска с массами m_1 и m_2 (рис. 62). Через систему невесомых блоков на них действует груз с массой m_3. Коэффициент трения между брусками равен k; между нижним бруском и поверхностью трение отсутствует. Найти условия, при которых оба бруска движутся с одинаковыми ускорениями.

Обе нити натянуты одинаково, причем сила натяжения каждой нити равна T. Кроме того, между обоими брусками действует сила трения F, направление которой неопределенно. Если ускорение нижнего бруска обозначить через a_1, а ускорение верхнего бруска — через a_2, то при $a_1 > a_2$ нижний брусок будет обгонять верхний, так что сила движущего трения будет приложена к верхнему бруску, а сила тормозящего

трения — к нижнему. Наоборот, если $a_2 > a_1$, то сила движущего трения приложена к нижнему бруску, а тормозящего — к верхнему, и верхний брусок будет обгонять нижний. В любом случае эти силы направлены в противоположные стороны и приложены к разным телам, как этого требует третий закон Ньютона.

Уравнения второго закона Ньютона для обоих брусков условимся записать в виде

$$T - F_{тр} = m_1 a_1;$$
$$T + F_{тр} = m_2 a_2.$$

Если сила трения $F_{тр}$ достигнет значения km_2g, то (при данном выборе знаков) $a_2 \geqslant a_1$, а если $F_{тр} = -km_2g$, то $a_1 \geqslant a_2$. Однако по условию задачи $a_1 = a_2 = a$, следовательно, $-km_2g \leqslant F_{тр} \leqslant km_2g$. При условии, что $a_1 = a_2 = a$, мы можем составить еще одно уравнение

$$m_3g - 2T = m_3a.$$

Теперь мы имеем три уравнения для определения a, T и $F_{тр}$. Из них находим

$$a = \frac{m_3g}{m_1 + m_2 + m_3}; \quad T = \frac{m_3}{2}(g - a);$$
$$F_{тр} = \frac{(m_2 - m_1)\,a}{2} = \frac{(m_2 - m_1)\,m_3g}{2\,(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

Таким образом, условие, при котором оба бруска имеют одинаковое ускорение a, запишется в виде

$$-km_2g \leqslant \frac{m_3g\,(m_2 - m_1)}{2\,(m_1 + m_2 + m_3)} \leqslant km_2g, \text{ или } -2k \leqslant$$
$$\leqslant \frac{m_3\,(m_2 - m_1)}{m_2\,(m_1 + m_2 + m_3)} \leqslant 2k.$$

3.7. На тело с массой m, двигавшееся с начальной скоростью v_0, действуют силы F_1 и F_2 под углами α_1 и α_2 к направлению v_0. Найти ускорение и скорость тела, а также его перемещение к концу t-й секунды (рис. 63).

По второму закону Ньютона

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a}.$$

Выберем направление оси X вдоль направления v_0, а направление оси Y — перпендикулярно v_0. Проектируя это векторное соотношение на оси координат, получим два скалярных равенства

$$a_x = \frac{F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2}{m};$$
$$a_y = \frac{F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2}{m}.$$

Скорость равноускоренного движения тела

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

или в проекциях

$$v_x = v_{0x} + a_x t;$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Очевидно, что $v_{0x} = v_0$ и $v_{0y} = 0$. При этом

$$v_x = v_0 + a_x t; \; v_y = a_y t;$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

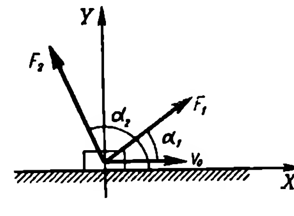


Рис. 63

Рис. 64

Перемещение

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

или в проекциях

$$x = v_0 t + \frac{a_x t^2}{2};$$

$$y = \frac{a_y t^2}{2}.$$

3.8. По рельсам фуникулера, проложенным с уклоном α к горизонту, опускается вагон весом P. Скорость вагона на всем пути равна v, время торможения перед остановкой — t. Найти натяжение каната при торможении (рис. 64). Коэффициент трения между вагоном и рельсами — k.

Векторное уравнение сил, действующих на вагон в конце пути:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{F}_{тр} = M\vec{a},$$

где T — сила натяжения каната. Направление спуска будем считать положительным.

Уравнение проекций на наклонную плоскость для вагона, который опускается:

$$P \sin \alpha - T - kP \cos \alpha = -\frac{P}{g} a.$$

Так как в данном случае ускорение $a = v/t$, то

$$T = P\left(\sin \alpha - k \cos \alpha + \frac{v}{gt}\right).$$

3.9. Автомобиль весом P подъезжает со скоростью v_0 к подъему, угол наклона которого равен α, и движется по инерции вверх с выключенным двигателем. Найти перемещение x автомобиля за время t от начала подъема, если коэффициент трения равен k (рис. 65).

Составим векторное уравнение второго закона Ньютона:

$$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{F}_{\text{тр}}=m\vec{a}.$$

Кроме того,

$$\vec{r}=\vec{v}_0t+\frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

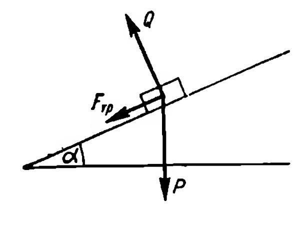


Рис. 65

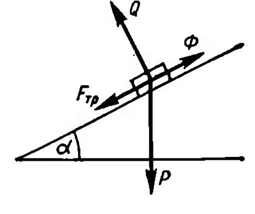


Рис. 66

Исключив $\vec{a}$, найдем

$$\frac{\vec{P}+\vec{Q}+\vec{F}_{\text{тр}}}{m}=\frac{2(\vec{r}-\vec{v}_0t)}{t^2}.$$

Проектируя на плоскость и на перпендикуляр к ней, получим

$$\frac{-mg\sin\alpha-F_{\text{тр}}}{m}=\frac{2x-2v_0t}{t^2};$$

$$\frac{-mg\cos\alpha+Q}{m}=0.$$

Из этих уравнений находим

$$x=v_0t-\frac{g(\sin\alpha+k\cos\alpha)t^2}{2}.$$

3.10. Автомобиль весом P, двигаясь вверх по наклонной плоскости с углом наклона α, на пути S увеличивает скорость от v_0 до v. Коэффициент трения равен k. Найти движущую силу Φ (рис. 66).

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{\text{тр}}+\vec{Q}+\vec{\Phi}+\vec{P}}{m};$$

$$a=\frac{v^2-v_0^2}{2S}.$$

Первая формула содержит вектор $\vec{a}$, а вторая — скаляр a. Поэтому перед тем, как применить вторую формулу, перейдем к скалярным уравнениям проекций на плоскость и на перпендикуляр к ней:

$$a_x = \frac{-F_{\text{тр}} + \Phi - P\sin\alpha}{m} = a;$$
$$a_y = Q - P\cos\alpha = 0;$$
$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2S}.$$

Подставляя вместо $F_{\text{тр}}$ и m соответственно kQ и P/g, исключаем из системы Q и a. При этом находим

$$\Phi = P\left(\sin\alpha + k\cos\alpha + \frac{v^2 - v_0^2}{2gS}\right).$$

3.11. Ведро с водой весом P поднимается с постоянным ускорением a. Найти давление воды на дно ведра, площадь которого S. Масса воды — m.

Векторное уравнение:

$$\vec{a} = \frac{\vec{P} + \vec{Q}}{m},$$

где Q — реакция дна. Проектируем на вертикаль:

$$\frac{Q - mg}{m} = a;$$
$$Q = m(g + a).$$

По третьему закону Ньютона $\vec{Q_1} = \vec{Q}$ или (в проекции на вертикаль) $Q_1 = Q$, где Q_1 — полная сила давления на дно поднимающегося ведра. Так как $P = Q_1/S$, то

$$p = \frac{m}{S}(g + a).$$

Если рассматривать эту задачу, как случай неинерциальной системы, когда ускорение g следует заменить величиной $g + a$, ответ получится сразу.

3.12. Тело весом P падает равноускоренно с высоты h_1 и попадает в снег, где равномерно замедляется, достигая глубины h_2. Сила сопротивления движению в воздухе равна F_1. Найти силу сопротивления движению в снегу F_2.

Составляем уравнения второго закона Ньютона:

в воздухе $\vec{a_1} = \dfrac{\vec{P} + \vec{F_1}}{m}$; $\quad a_1 = \dfrac{v_1^2 - v_{01}^2}{2h_1}$;

в снегу $\vec{a_2} = \dfrac{\vec{P} + \vec{F_2}}{m}$; $\quad -a_2 = \dfrac{v_2^2 - v_{02}^2}{2h_2}$,

Считая направление вниз положительным, находим проекции на вертикаль (при этом учтем, что $v_{01} = v_2 = 0$ и $v_1 = v_{02} = v$):

$$a_1 = \frac{P - F_1}{P} g; \quad a_1 = \frac{v^2}{2h_1};$$

$$-a_2 = \frac{P - F_2}{P} g; \quad -a_2 = \frac{-v^2}{2h_2}.$$

Из первых двух равенств исключаем a_1, из двух вторых — $(-a_2)$:

$$\frac{v^2}{2h_1} = \frac{P - F_1}{P} g; \quad \frac{v^2}{2h_2} = -\frac{P - F_2}{P} g.$$

Упрощая, найдем

$$F_2 = P\left(\frac{h_1}{h_2} + 1\right) - F_1 \frac{h_1}{h_2}.$$

3.13. Сколько вагонов может везти электровоз в гору с уклоном α, если коэффициент максимального трения покоя равен k_2; коэффициент трения качения, обеспечивающий отсутствие скольжения колес электровоза по рельсам, равен k_1? Вес электровоза в четыре раза больше веса вагона.

Считая движение равномерным, имеем

$$\vec{P}_п + \vec{Q}_п + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_{дв} = 0;$$

$$P_п = NP_{ваг} + P_{эл} = (N + 4) P_{ваг}.$$

Здесь $F_{тр} = k_1 Q_п$; $F_{дв} = k_2 Q_{эл}$ (поскольку сила движущего трения создается только электровозом, а не всем составом); $P_п$ — вес поезда; $F_{дв}$ — сила движущего трения; N — число вагонов; $P_{ваг}$ — вес вагона; $P_{эл}$ — вес электровоза.

Проекции на направление наклонной плоскости и на перпендикуляр к ней:

$$F_{дв} - P_п \sin\alpha - F_{тр} = 0;$$

$$Q_п - P_п \cos\alpha = 0;$$

$$Q_{эл} - P_{эл} \cos\alpha = 0.$$

Подставим вместо $F_{тр}$ и $F_{дв}$ их выражения, причем вместо $Q_{эл}$ введем $4P_{ваг}\cos\alpha$. При этом получим

$$4k_2 P_{ваг} \cos\alpha - (N + 4) P_{ваг} \sin\alpha - k_1(N + 4) P_{ваг} \cos\alpha = 0,$$

откуда

$$N = \frac{4\left[(k_2 - k_1)\cos\alpha - \sin\alpha\right]}{\sin\alpha + k_1 \cos\alpha}.$$

Положим для примера $\sin\alpha = 0{,}025$; $k_1 = 0{,}001$; $k_2 = 0{,}1$. Тогда $N = 12$. Если бы дорога не имела уклона вверх ($\alpha = 0$), электровоз мог бы везти $4(k_2 - k_1)/k_1 = 396$ вагонов.

3.14. По наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения k движется вверх с замедлением тело с массой m под действием силы F, составляющей угол β с плоскостью (рис. 67). Начальная скорость тела — v_0. Дойдя до некоторой точки, тело останавливается, после чего движется ускоренно вниз. Через время t от начала движения скорость тела будет v. Найти время t.

При движении вверх

$$\vec{P} + \vec{F}_{тр} + \vec{Q} + \vec{F} = m\vec{a}_1;$$
$$\vec{v}' = \vec{v}_0 + \vec{a}_1 t_1 = 0,$$

где t_1 — время подъема.

При движении вниз

$$\vec{P} + \vec{F}_{тр} + \vec{Q} + \vec{F} = m\vec{a}_2;$$
$$\vec{v} = 0 + \vec{a}_2 t_2,$$

где t_2 — время спуска.

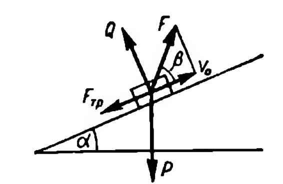


Рис. 67

Исключаем $\vec{a}_1$ из первой пары и $\vec{a}_2$ из второй пары уравнений:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{Q} + \vec{F} = -m\frac{\vec{v}_0}{t_1};$$
$$m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{Q} + \vec{F} = \frac{m\vec{v}}{t_2}.$$

Выберем оси координат параллельно и перпендикулярно плоскости и проектируем на них, с учетом того, что $F_{тр} = kQ$:

$$mg\sin\alpha + kQ - F\cos\beta = \frac{mv_0}{t_1};$$
$$-mg\cos\alpha + Q + F\sin\beta = 0;$$
$$mg\sin\alpha - kQ - F\cos\beta = \frac{mv}{t_2}.$$

Исключив Q, найдем

$$mg\sin\alpha + k(mg\cos\alpha - F\sin\beta) - F\cos\beta = \frac{mv_0}{t_1};$$
$$mg\sin\alpha - k(mg\cos\alpha - F\sin\beta) - F\cos\beta = \frac{mv}{t_2}.$$

Определив t_1 и t_2 и сложив их, получим

$$t = \frac{mv_0}{mg(\sin\alpha + k\cos\alpha) - F(\cos\beta + k\sin\beta)} + \frac{mv}{mg(\sin\alpha - k\cos\alpha) - F(\cos\beta - k\sin\beta)}.$$

3.15. По гладкой горизонтальной плоскости движутся два тела с массами M и m $(M > m)$, связанные нерастяжимой нитью (рис. 68). К телам приложены противоположно направленные силы: к телу с массой M — сила f, к телу с массой m — сила F $(F > f)$. Определить натяжение нити T (трением пренебречь).

Пусть направление $\vec{F}$ будет положительным. На тело с массой m действуют противоположно направленные силы F и T, так что для этого тела уравнение движения в проекциях на горизонтальную ось будет

$$F - T = ma.$$

Все проекции на вертикальную ось равны нулю.

Для тела M уравнение движения, аналогично предыдущему, имеет вид

$$T - f = Ma,$$

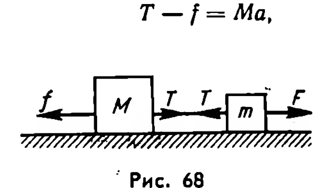


Рис. 68

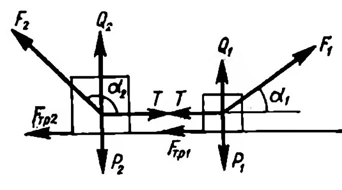


Рис. 69

так как оба тела имеют одинаковые ускорения. Из этих двух уравнений находим

$$T = \frac{mf + MF}{M + m}.$$

Заметим, что, складывая оба уравнения, получим

$$F - f = (M + m)\,a,$$

т. е. если отвлечься от нити, всю систему можно рассматривать как одно целое, но натяжение нити будет «потеряно».

3.16. Два тела с массами m_1 и m_2, связанные нерастяжимой нитью, двигаются с ускорением по горизонтальной плоскости под действием сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленных соответственно под углами α_1 и α_2 к горизонту. Коэффициент трения равен k. Найти ускорение системы (рис. 69).

Будем рассматривать систему как одно тело, так как натяжение нити нас пока не интересует. Считая направление движения положительным, составляем векторное уравнение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{тр1} + \vec{P}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{тр2} + \vec{P}_2}{m_1 + m_2}$$

и уравнения проекций на горизонтальную и вертикальную оси

$$a_x = a = \frac{F_1 \cos \alpha_1 - F_{тр1} + F_2 \cos \alpha_2 - F_{тр2}}{m_1 + m_2};$$

$$a_y = 0 = F_1 \sin \alpha_1 + Q_1 - P_1 + Q_2 + F_2 \sin \alpha_2 - P_2.$$

Кроме того, имеем очевидные соотношения

$$F_{\text{тр}1} = kQ_1 = k(P_1 - F_1 \sin \alpha_1);$$
$$F_{\text{тр}2} = kQ_2 = k(P_2 + F_2 \sin \alpha_2).$$

Сложив уравнения для a_x и a_y и исключив все Q, получим

$$a = \frac{F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 - k\,[g\,(m_1 + m_2) - (F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2)]}{m_1 + m_2}.$$

Если мы захотим найти натяжение нити, нам придется составить уравнения для каждого тела в отдельности:

$$\vec{F}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1} + \vec{P}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a};\quad \vec{F}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{P}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a};$$
$$F_1 \cos \alpha_1 - kQ_1 - T = m_1 a;\quad -F_2 \cos \alpha_2 - kQ_2 + T = m_2 a;$$
$$F_1 \sin \alpha_1 - m_1 g + Q_1 = 0;\quad -F_2 \cos \alpha_2 + Q_2 - m_2 g = 0.$$

Из этих уравнений можно найти a и T. Так как a нам известно, найдем

$$T = \frac{F_1 m_2 (\cos \alpha_1 + k \sin \alpha_1) + F_2 m_1 (\cos \alpha_2 - k \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2}.$$

3.17. По горизонтальной поверхности равноускоренно движется тело весом P_2, соединенное нерастяжимой нитью с висящим грузом P_1. Коэффициент трения равен k. Найти натяжение нити и силу давления на блок (рис. 70).

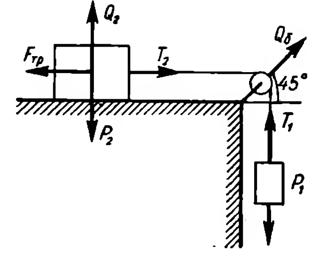


Рис. 70

Для тела P_2 векторное уравнение имеет вид

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{P}_2 + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{Q}_2 + \vec{T}_2}{m_2};$$

для груза P_1

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{P}_1 + \vec{T}_1}{m_1}.$$

Здесь важно отметить следующее: ускорения $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1$ по модулю одинаковы, но обозначены по-разному, так как имеют разные направления. Иначе говоря, $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$, но $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$. То же самое относится и к натяжению нити: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$, но $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$, так как эти векторы взаимно перпендикулярны.

Составим уравнения проекций на направления ускорений:

$$\frac{P_1 - T}{m_1} = a;\quad \frac{-F_{\text{тр}} + T}{m_2} = a;\quad P_2 = Q_2.$$

Заменяя $m_1 = P_1/g$, $m_2 = P_2/g$, $F_{\text{тр}} = kQ_2$ и исключая a и Q_2, находим

$$T = \frac{P_1 P_2 (1 + k)}{P_1 + P_2}.$$

Чтобы найти давление нити на блок, обратимся к рис. 70 и составим векторное уравнение равновесия

$$\vec{T}_1 + \vec{Q}_б + \vec{T}_2 = 0,$$

где $\vec{Q}_б$ — реакция блока; $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Проекция последнего уравнения

$$-T + Q_б \cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда находим

$$Q_б = T\sqrt{2}.$$

3.18. Брусок с массой m движется по горизонтальной поверхности со скоростью v_0, причем коэффициент трения равен k. Найти минимальную силу, которую надо приложить к бруску, чтобы он сместился в направлении, перпендикулярном движению, со скоростью $v_1 \ll v_0$.

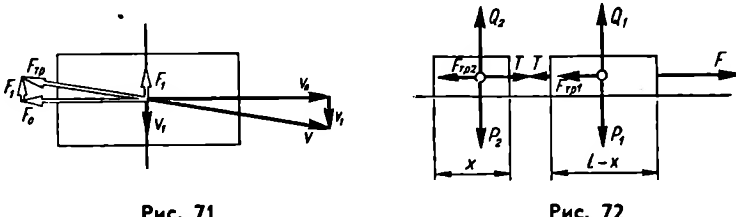


Рис. 71 Рис. 72

Смещение в перпендикулярном направлении означает, что брусок начал двигаться в этом направлении с некоторой малой скоростью v_1. Тогда суммарная скорость бруска будет равна v (рис. 71). Возникающая при таком движении сила трения $F_{тр}$ будет направлена в сторону, противоположную движению. Разлагая ее на составляющие F_0 и F_1, находим из рисунка, что

$$F_1 = F_{тр} \sin \alpha.$$

Так как $v_1 \ll v_0$, то $\sin \alpha = v_1/v \approx \operatorname{tg} \alpha = v_1/v_0$, так что

$$F_1 = F_{тр} \frac{v_1}{v_0} = kmg \frac{v_1}{v_0}.$$

Как видно из результата, сила трения в направлении, перпендикулярном движению, зависит от скорости.

3.19. По горизонтальной шероховатой поверхности движется ускоренно под действием горизонтальной силы F однородный брусок длиной l постоянного сечения. Найти натяжение в бруске как функцию расстояния от его заднего края (рис. 72).

Представим себе, что на расстоянии x от заднего края брусок рассечен на части длиной x и $l - x$, причем эти части связаны нерастяжимой нитью. Тогда натяжение нити как раз и будет равно натяжению в бруске на расстоянии x от левого края. Так как обе части

движутся с одинаковым ускорением, то векторные уравнения для обеих частей бруска будут иметь вид

$$\vec{a} = \frac{m_1\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}1} + \vec{T} + \vec{Q}_1 + \vec{F}}{m_1};$$

$$\vec{a} = \frac{m_2\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{T} + \vec{Q}_2}{m_2}; \quad F_{\text{тр}} = kQ.$$

Уравнения проекций:

$$a = \frac{-kQ_1 - T + F}{m_1}; \quad 0 = -m_1 g + Q_1;$$

$$a = \frac{-kQ_2 + T}{m_2}; \quad 0 = -m_2 g + Q_2.$$

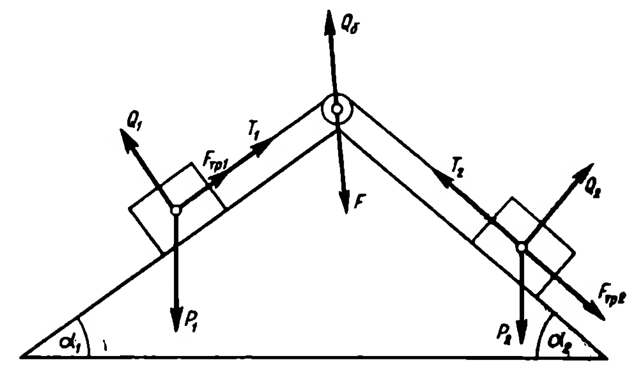


Рис. 73

Исключив Q_1 из первых двух уравнений, Q_2 — из вторых двух, а затем исключив a, получим

$$T = \frac{F}{1 + m_1/m_2}.$$

Обозначим плотность вещества бруска ρ; поперечное сечение бруска — q; объем бруска — V. Тогда

$$m_1/m_2 = \rho V_1/\rho V_2 = \rho q\,(l - x)/\rho q x = (l/x) - 1.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получим

$$T = F\frac{x}{l}.$$

3.20. По двум наклонным плоскостям, составляющим с горизонтом углы α_1 и α_2, движутся ускоренно два бруска с массами m_1 и m_2, связанные нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (рис. 73). Коэффициенты трения брусков равны k_1 и k_2. Найти ускорения брусков, натяжение нити и силу давления на блок.

Векторные уравнения для каждого бруска:

$$m_1\vec{g}+\vec{Q}_1+\vec{T}_1+\vec{F}_{тр1}=m_1\vec{a}_1; \quad m_2\vec{g}+\vec{T}_2+\vec{Q}_2+\vec{F}_{тр2}=m_2\vec{a}_2.$$

Уравнения проекций на наклонные плоскости и перпендикуляры к ним имеют вид (учитывая, что $T_1=T_2=T$; $a_1=a_2$ и $F_{тр}=kQ$):

$$m_1g\sin\alpha_1-T-k_1Q_1=m_1a; \quad -m_2g\sin\alpha_2+T-k_2Q_2=m_2a;$$
$$-m_1g\cos\alpha_1+Q_1=0; \quad -m_2g\cos\alpha_2+Q_2=0.$$

Исключим попарно Q_1 и Q_2, причем получим

$$m_1g\sin\alpha_1-T-k_1m_1g\cos\alpha_1=m_1a;$$
$$-m_2g\sin\alpha_2+T-k_2m_2g\cos\alpha_2=m_2a,$$

откуда

$$a=g\frac{(m_1\sin\alpha_1-m_2\sin\alpha_2)-(k_1m_1\cos\alpha_1+k_2m_2\cos\alpha_2)}{m_1+m_2};$$

$$T=g\frac{(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)-(k_1\cos\alpha_1-k_2\cos\alpha_2)}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}.$$

Составляем векторное уравнение для блока

$$\vec{Q}_б+T_1+T_2=0 \text{ или } \vec{Q}_б+\vec{F}=0,$$

где F — сила давления на блок. Отсюда

$$F=\sqrt{T^2+T^2-2T^2\cos(\alpha_1+\alpha_2)}=T\sqrt{2[1-\cos(\alpha_1+\alpha_2)]}=$$
$$=2T\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}.$$

Рис. 74

3.21. На наклонной плоскости с углом наклона α, движущейся вправо без трения с ускорением a, находится брусок с массой m. Брусок движется относительно наклонной плоскости с ускорением a', причем коэффициент трения равен k. Найти ускорение a' бруска относительно плоскости и давление бруска на плоскость (рис. 74).

Абсолютное ускорение бруска является векторной суммой его относительного ускорения $\vec{a}'$ и переносного ускорения $\vec{a}$, равного ускорению наклонной плоскости. Поэтому векторное уравнение будет

$$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{F}_{тр}=m\vec{a}+m\vec{a}'.$$

Проектируем на направления $\vec{Q}$ и $\vec{a}'$:

$$-mg\cos\alpha+Q=ma\sin\alpha;$$
$$-kQ+mg\sin\alpha=ma\cos\alpha+ma'.$$

Из этих двух уравнений находим

$$F_{давл} = Q = m(a\sin\alpha + g\cos\alpha);$$
$$a' = -k(a\sin\alpha + g\cos\alpha) + (g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

3.22. Тело весом mg соскальзывает с трением с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости равен α, ее длина — l, коэффициент трения — k. Начальная скорость равна нулю. Найти время спуска тела с наклонной плоскости.

Тело движется вниз под действием силы F, равной

$$F = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha.$$

Скорость тела в конце спуска определится из выражения

$$l = \frac{at\cdot t}{2} = \frac{vt}{2};\ v = \frac{2l}{t}.$$

По второму закону Ньютона

$$t = \frac{mv}{F} = \frac{2ml}{Ft};\ t^2 = \frac{2ml}{F};$$
$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - k\cos\alpha)}}.$$

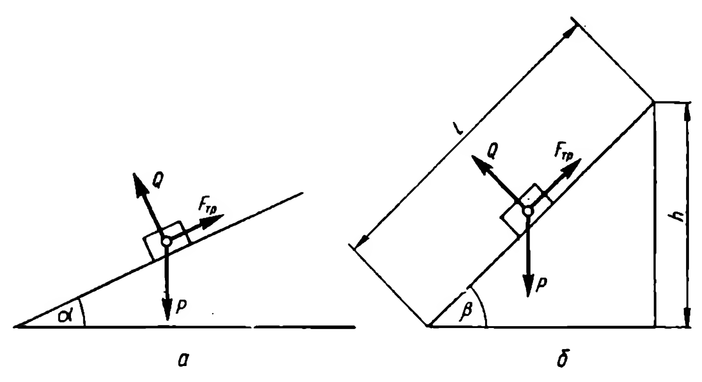


Рис. 75

3.23. За какое время тело с массой m соскользнет с наклонной плоскости высотой h и углом наклона β, если по наклонной плоскости с углом наклона α оно движется равномерно (рис. 75, *а*, *б*)?

В случае наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 75, *а*) ускорение тела равно нулю, т. е.

$$m\vec{g} + \vec{Q} + \vec{F}_{тр} = 0;\quad \vec{F}_{тр} = k\vec{Q}.$$

Проектируем на направление $\vec{F}_{тр}$:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = 0 \text{ или } mg\sin\alpha = kmg\cos\alpha,$$

откуда получаем условие равномерного движения тела вниз по наклонной плоскости с углом наклона α

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

В случае наклонной плоскости с углом наклона $\beta > \alpha$ (рис. 75, *б*) тело движется с ускорением a. Векторное уравнение: $m\vec{g} + \vec{Q} + \vec{F}_{\text{тр}} = ma$. Проекция на направление движения тела: $mg \sin \beta - kQ = ma$. Проекция на направление Q: $Q - mg \cos \beta = 0$.

Из этих уравнений получаем (с учетом условия $k = \operatorname{tg} \alpha$)

$$a = g (\sin \beta - \operatorname{tg} \alpha \cos \beta).$$

Длина наклонной плоскости $l = h/\sin \beta$.

Время соскальзывания найдем из выражения $l = at^2/2$, откуда

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2h \cos \alpha}{g \sin \beta \sin (\beta - \alpha)}}.$$

3.24. Тележка скатывается без трения по наклонной плоскости с углом наклона α. На тележке укреплен маятник. Какое направление будет иметь маятник в положении равновесия при свободном скатывании тележки (рис. 76)?

Тележка имеет ускорение, равное $g \sin \alpha$. Очевидно, что такое же ускорение будет иметь и маятник. Его ускорение создается движущей силой $F = mg \sin \alpha$, направленной параллельно наклонной плоскости. Эта сила представляет собой векторную сумму силы тяжести $P = mg$ и силы натяжения T нити маятника. Так как направление силы тяжести известно, то из векторного треугольника находим, что направление силы натяжения нити перпендикулярно плоскости. Следовательно, и сама нить перпендикулярна наклонной плоскости.

Рис. 76

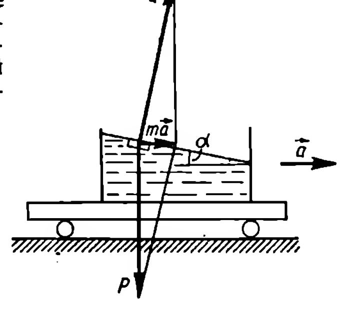


Рис. 77

Если бы тележка двигалась с ускорением a, меньшим, чем $g \sin \alpha$, то нить отклонилась бы от перпендикуляра к плоскости в сторону движения. В случае $a > g \sin \alpha$ нить отклонится в сторону, противоположную движению.

3.25. На тележке стоит сосуд с жидкостью; тележка движется в горизонтальном направлении с ускорением a. Найти форму поверхности жидкости (рис. 77).

Так как жидкость движется вместе с сосудом, то каждый элемент жидкости с массой m тоже движется с ускорением a, направленным

в ту же сторону, что и движение тележки. Это ускорение создается движущей силой ma, которая является равнодействующей силы тяжести $P = mg$ и силы реакции жидкости Q. Как видно из рисунка, направление силы Q должно быть таково, что $ma/mg = \operatorname{tg} \alpha$, т. е. $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(a/g)$.

Так как жидкость покоится относительно сосуда, то все элементы жидкости, расположенные на поверхности, находятся в равновесии, т. е. для них боковое давление равно нулю. Эта поверхность, очевидно, есть плоскость, перпендикулярная силе Q и составляющая с горизонтом угол α. При равномерном движении $a = 0$, $\alpha = 0$ и поверхность жидкости горизонтальна. С увеличением a угол наклона α поверхности жидкости к горизонту будет возрастать. Так, при $a = g$ $\alpha = 45°$.

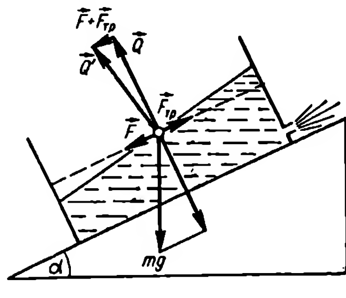




Рис. 78

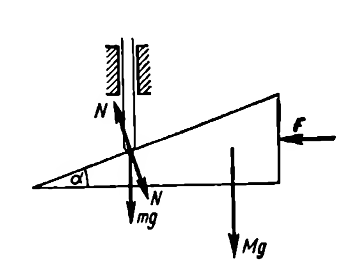


Рис. 79

3.26. Сосуд с водой движется ускоренно вниз по наклонной плоскости с углом наклона α. Из малого отверстия площадью S около дна сосуда вытекает вода со скоростью v. Масса воды и сосуда — m. Найти условие параллельности поверхности воды в сосуде и наклонной плоскости и коэффициент трения между сосудом и плоскостью (рис. 78). Уменьшением массы воды пренебречь.

Согласно второму закону Ньютона в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + F + Q + F_{тр}.$$

Здесь F, Q и $F_{тр}$ — соответственно сила реактивной тяги, реакция опоры, всегда направленная перпендикулярно наклонной плоскости, и сила трения. Это же уравнение может быть записано в виде

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{Q}',$$

где реакция жидкости $\vec{Q}' = \vec{F} + \vec{Q} + \vec{F}_{тр}$ направлена перпендикулярно поверхности воды, причем эта поверхность может не быть параллельна наклонной плоскости. Наклон ее будет меняться в зависимости от модуля и направления ускорения a.

Поверхность воды будет параллельна наклонной плоскости лишь при условии $\vec{Q} = \vec{Q}'$ или $\vec{F} + \vec{F}_{тр} = 0$. Это условие можно переписать в скалярной форме: $F = F_{тр}$.

Для $F_{тр}$ используем выражение $F_{тр} = kQ = kmg \cos\alpha$. Значение F найдем из закона сохранения импульса. Действительно, изменение количества движения воды, вытекающей из сосуда за единицу времени, равно реакции сосуда, т. е.

$$\frac{\Delta (mv)}{\Delta t} = F = \frac{(\rho S \Delta l) v}{\Delta t} = \rho S v^2.$$

Подставив найденные значения в условие параллельности, найдем

$$k = \frac{\rho S v^2}{mg \cos\alpha}.$$

3.27. Клин с массой M и штифт с массой m движутся без трения с ускорениями $a_к$ и $a_ш$ под действием горизонтальной силы F, приложенной к клину. Угол наклона клина равен α. Найти ускорения $a_к$ и $a_ш$ (рис. 79) и силу N, действующую на штифт.

На клин действуют: сила $\vec{F}$; сила тяжести клина $M\vec{g}$; сила давления $\vec{N}$ со стороны штифта, направленная по перпендикуляру к поверхности клина в точке соприкосновения.

На штифт действуют: вес штифта $m\vec{g}$ и сила давления $\vec{N}$ со стороны клина, приложенная к штифту и направленная вдоль перпендикуляра к наклонной поверхности клина.

Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях, считая направление силы $\vec{F}$ положительным:

по горизонтали $F - N \sin\alpha = Ma_к$;

по вертикали $N \cos\alpha - mg = ma_ш$.

Так как здесь три неизвестных, нужно еще одно уравнение. Мы получим его следующим образом: когда клин перемещается горизонтально на расстояние S, штифт поднимается на расстояние $S \operatorname{tg}\alpha$; отсюда следует, что $a_ш = a_к \operatorname{tg}\alpha$. Это и будет третьим уравнением. Из этих уравнений находим

$$a_к = \frac{(F\cos\alpha - mg\sin\alpha)\cos\alpha}{m\sin^2\alpha + M\cos^2\alpha};$$

$$a_ш = \frac{(F\cos\alpha - mg\sin\alpha)\sin\alpha}{m\sin^2\alpha + M\cos^2\alpha};$$

$$N = \frac{m(F\sin\alpha + Mg\cos\alpha)}{m\sin^2\alpha + M\cos^2\alpha}.$$

3.28. На наклонной плоскости с углом α при основании лежат один на другом два бруска (рис. 80) с массами m_1 и m_2. Коэффициент трения бруска о брусок — k_1, бруска о плоскость — k_2. Оба бруска предоставлены самим себе. Найти характер движения обоих брусков (начальные скорости равны нулю).

Выберем оси координат, как показано на рисунке, и составим уравнения второго закона Ньютона для обоих тел в векторной форме.

Для нижнего бруска

$$m_1\vec{g} + \vec{Q}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{Q}_2 = m_1\vec{a}_1,$$

где $\vec{Q}_1$ — реакция наклонной плоскости; $\vec{F}_1$ — сила трения между плоскостью и бруском; $\vec{F}_2$ — реакция на силу трения, действующую со стороны бруска *2* на брусок *1*; $\vec{Q}_2$ — сила давления со стороны верхнего бруска.

Для верхнего бруска

$$m_2\vec{g} + \vec{Q}_2 + \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2,$$

где $\vec{Q}_2$ — реакция бруска *1* на давление бруска *2*; $\vec{F}_2$ — сила трения, действующая на брусок *2* со стороны бруска *1*.

В проекциях на координатные оси:

для нижнего бруска $m_1g\sin\alpha - F_1 + F_2 = m_1a_1$; $Q_1 - Q_2 - m_1g\cos\alpha = 0$;

для верхнего бруска $m_2g\sin\alpha - F_2 = m_2a_2$; $Q_2 - m_2g\cos\alpha = 0$.

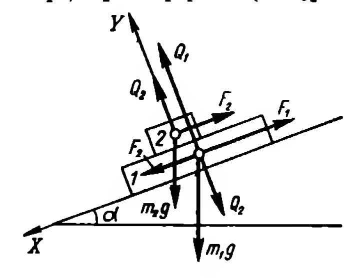


Рис. 80

Так как по условию не известно, движутся бруски или нет, то может оказаться, что коэффициенты трения меньше максимальных и поэтому пользоваться формулой $F_{тр} = kQ$ не следует. Таким образом, хотя мы и можем определить Q_1 и Q_2, у нас остается четыре неизвестных (F_1, F_2, a_1, a_2) и всего два уравнения. В таких случаях следует обращаться к кинематическому исследованию задачи. Рассмотрим все возможные случаи.

1) $a_1 = a_2 = 0$ (оба тела неподвижны); F_1 и F_2 — силы трения покоя,

$$F_1 = (m_1 + m_2) g \sin\alpha \leqslant k_1Q_1 = k_1 (m_1 + m_2) g \cos\alpha;$$
$$F_2 = m_2g \sin\alpha \leqslant k_2Q_2 = k_2m_2g \cos\alpha,$$

откуда

$$k_1 > \operatorname{tg}\alpha;\ k_2 > \operatorname{tg}\alpha.$$

2) $a_1 = 0$; $a_2 > 0$ (брусок *1* неподвижен, брусок *2* скользит с ускорением по бруску *1*). Сила трения между брусками есть сила трения скольжения, приближенно равная максимальной силе трения покоя. Поэтому

$$F_2 = k_2Q_2 = k_2m_2g \cos\alpha;\ a_2 = g(\sin\alpha - k_2\cos\alpha),$$

откуда

$$k_2 < \operatorname{tg}\alpha \leqslant k_1.$$

3) $a_1 = a_2 = a > 0$ (оба бруска скользят по плоскости с одинаковыми ускорениями). Здесь трением скольжения является трение между нижним бруском и плоскостью. Верхний же брусок неподвижен относительно нижнего. Поэтому

$$F_1 = k_1(m_1 + m_2) g \cos\alpha;\ F_2 = k_2g\cos\alpha$$

и

$$a = g(\sin\alpha - k_1\cos\alpha) = g(\sin\alpha - k_2\cos\alpha),$$

т. е. $k_1 = k_2$; $k_1 < \operatorname{tg}\alpha$.

4) $a_2 > a_1 > 0$ (оба бруска движутся с ускорениями, причем нижний брусок отстает от верхнего). Теперь уже и k_1 и k_2 являются коэффициентами трения скольжения. Поэтому

$$F_1 = k_1 (m_1 + m_2) g \cos \alpha; \; F_2 = k_2 m_2 g \cos \alpha;$$

$$a_1 = g \sin \alpha - \left[k_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) - k_2 \frac{m_2}{m_1} \right] g \cos \alpha;$$

$$a_2 = g (\sin \alpha - k_2 \cos \alpha);$$

$$k_1 > k_2.$$

5) $a_1 > a_2 > 0$ (оба тела движутся ускоренно, но верхний брусок отстает от нижнего).

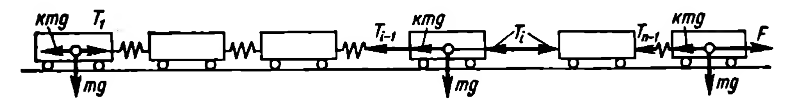


Рис. 81

При этих условиях проекция силы трения между брусками отрицательна, так что

$$F_1 = k_1 (m_1 + m_2) g \cos \alpha; \; F_2 = -k_2 m_2 g \cos \alpha;$$

$$a_1 = g \sin \alpha - \left[k_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) + k_2 \frac{m_2}{m_1} \right] g \cos \alpha;$$

$$a_2 = g (\sin \alpha + k_2 \cos \alpha); \; k_1 + k_2 < 0,$$

что не имеет смысла. Следовательно, такого движения быть не может.

3.29. Локомотив трогает с места поезд из n одинаково нагруженных вагонов с массой m каждый, поезд движется с ускорением a. Вагоны соединены между собой одинаковыми пружинными сцепками, причем жесткость каждой пружины равна δ. Коэффициент трения между колесами вагонов и рельсами равен k. Найти силу тяги локомотива и изменение длины каждой пружины (рис. 81).

Если на i-ю пружину действует сила натяжения (или сжатия) T_i, то пружина растягивается (или сжимается) на величину x_i по закону $T_i = \delta x_i$, где δ — жесткость пружины. Составим уравнения второго закона Ньютона для каждого вагона (причем перенумеруем вагоны с конца):

для n-го вагона (сцепленного с локомотивом)	$F - T_{n-1} - kmg = ma;$
для $n-1$-го вагона	$T_{n-1} - T_{n-2} - kmg = ma;$
. . . .	. . . .
для $i+1$-го вагона	$T_{i+1} - T_i - kmg = ma;$
для i-го	$T_i - T_{i-1} - kmg = ma;$
для 1-го вагона (концевого)	$T_1 - kmg = ma.$

Заметим, что силы T_i, входящие в уравнения, — это реакции пружин, действующие на соответствующие вагоны и равные по модулю силам натяжения пружин.

Выполним два сложения этих уравнений: от первого до i-го (считая снизу) и от первого до последнего. Первое сложение даст (после приведения подобных членов)

$$T_i - ikmg = ima.$$

Второе сложение даст

$$F - nkmg = nma.$$

Из первой формулы мы видим, что натяжение i-й пружины

$$T_i = im(a + kg)$$

и ее удлинение (или укорочение)

$$x_i = \frac{T_i}{\delta} = \frac{im(a+kg)}{\delta}.$$

Из второй формулы определяем силу тяги

$$F = nm(a + kg).$$

3.30. По горизонтальной плоскости ускоренно движется под действием силы F, параллельной плоскости, цепочка из n различных грузов с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, связанных одинаковыми нерастяжимыми нитями. Найти формулу для силы натяжения любой из нитей, если коэффициент трения между каждым грузом и плоскостью равен k:

Аналогично предыдущей задаче

$$T_i = (a + kg)(m_1 + m_2 + \cdots + m_i);$$
$$F = (a + kg)(m_1 + m_2 + \cdots + m_n).$$

Из этих формул находим

$$T_i = F\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_i}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

3.31. Два шарика из одинакового материала падают в воздухе. Диаметр первого из них в b раз меньше диаметра второго. Считая сопротивление воздуха пропорциональным поперечному сечению тела и квадрату его скорости, найти отношение скоростей шариков, когда они достигнут постоянной скорости падения.

Составим уравнения второго закона Ньютона для каждого шарика:

$$F_1 - kS_1v_1^2 = m_1a_1;$$
$$F_2 - kS_2v_2^2 = m_2a_2,$$

где S_1 и S_2 — поперечные сечения шариков.

При установившемся падении скорость постоянна и $a_1 = a_2 = 0$. Тогда

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{F_1S_2}{F_2S_1}.$$

Так как

$$F = mg;\ S_1 = \pi D^2/4;\ S_2 = \pi (bD)^2/4;$$

$$m_1 = \frac{4\pi D^3 \rho}{3};\ m_2 = \frac{4\pi (bD)^3 \rho}{3},$$

то

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{1}{b};\quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

3.32. Шар с массой m и объемом v падает в жидкости плотностью ρ с постоянной скоростью v. С какой силой нужно тянуть вверх этот шар, чтобы он поднимался в той же жидкости со скоростью $v_1 = av$? Сопротивление вязкой жидкости движению шара пропорционально его скорости.

Уравнение второго закона Ньютона для движения шара вниз:

$$mg - \rho Vg - kv = 0;\ k = \frac{mg - \rho Vg}{v}.$$

Уравнение для движения шара вверх:

$$F + \rho Vg - mg - kv_1 = 0.$$

Подставив вместо k и v_1 их значения, получим

$$F = (a + 1)(m - \rho V) g.$$

3.33. На горизонтальной поверхности стоят два одинаковых куба с массой M каждый. Между ними вводится тяжелый клин с массой m и углом при вершине 2α. Коэффициент трения между кубами и поверхностью равен k. Трением между клином и ребром куба пренебрегаем (рис. 82). Найти ускорение кубов.

Уравнение второго закона Ньютона для куба: $M\vec{a} = \vec{F} + M\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}$, где $\vec{F}$ — сила давления на куб; $\vec{N}$ — реакция поверхности. В проекциях на оси получаем

$$Ma = F\cos\alpha - F_{тр}; \quad (1)$$

$$0 = F\sin\alpha + Mg - N, \quad (2)$$

причем

$$F_{тр} = kN = k(Mg + F\sin\alpha). \quad (1a)$$

Клин при этом опускается с ускорением b, которое возникает благодаря действию силы Mg и сил реакций Q со стороны кубов на силу давления клина,

$$mb = mg - 2Q\sin\alpha;\ Q = |F|. \quad (3)$$

Смещение клина вниз на расстояние h приводит к горизонтальному смещению каждого куба на $h\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Отсюда вытекает, что

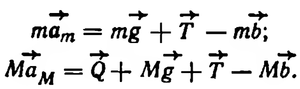
$$h = \frac{bt^2}{2};\ h\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{at^2}{2};\ a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha. \quad (4)$$

Из соотношений (1) — (4) находим

$$a = \frac{mg\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2Mkg\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{m + 2M\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

3.34. Через невесомый блок, укрепленный на краю горизонтального стола, перекинута нерастяжимая легкая нить, связывающая грузы с массами m и M. Грузы движутся с ускорением (рис. 83). Стол движется вверх с ускорением $\vec{b}$. Найти ускорение груза m относительно стола и относительно Земли (трением пренебречь).

Заданная в условии задачи система является неинерциальной. Выберем оси координат, как показано на рисунке, и запишем уравнения второго закона Ньютона для грузов m и M в неинерциальной системе



$$m\vec{a}_m = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{b};$$
$$M\vec{a}_M = \vec{Q} + M\vec{g} + \vec{T} - M\vec{b}.$$

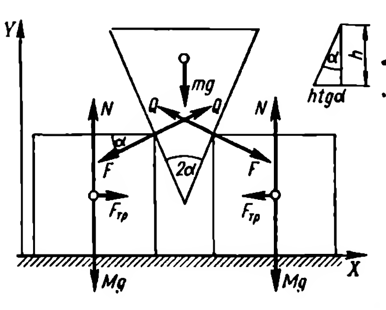


Рис. 82

Рис. 83

Здесь $m\vec{b}$ и $M\vec{b}$ — фиктивные силы инерции.

В проекциях на ось X:

$$0 = 0;$$
$$Ma = T,$$

на ось Y:

$$ma = mg - T + mb;$$
$$0 = -N + Mg + Mb.$$

Отсюда ускорение груза относительно стола

$$a = \frac{m\,(g + b)}{M + m}.$$

Чтобы найти ускорение $a_з$ груза относительно Земли, запишем уравнение второго закона Ньютона в инерциальной системе отсчета (каковой в данном случае мы считаем Землю):

$$m\vec{a}_з = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Предположим, что ускорение a_3 направлено вниз, и спроектируем это векторное уравнение на ось Y:

$$ma_3 = mg - T.$$

Отсюда, с учетом соотношения $T = Ma$, где a — ускорение относительно стола, получаем

$$a_3 = g - \frac{M}{m}a = g - \frac{M(g+b)}{M+m} = \frac{mg - Mb}{M+m}.$$

Если окажется, что ускорение $a_3 < 0$, то это означает, что оно направлено вверх.

3.35. Через невесомый блок, укрепленный на краю горизонтального стола, перекинута нерастяжимая легкая нить, связывающая висящий груз M и лежащий груз m (рис. 84), причем величина M такова, что груз m вот-вот начнет двигаться. Столу сообщается горизонтальное ускорение b. Найти ускорение груза m относительно Земли в предположении, что заданы только b и коэффициент трения k между грузом M и столом.

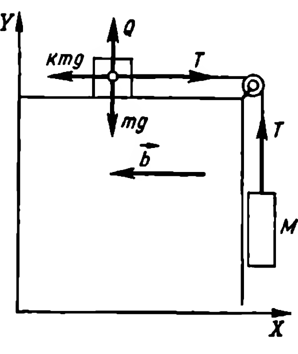


Рис. 84

Из условия ясно, что $Mg = kmg$. Уравнение второго закона Ньютона для груза m в неинерциальной системе имеет вид

$$T - mgk = ma - mb = m(a - b).$$

В применении к грузу M второй закон Ньютона запишется как $Ma = T - Mg$.

Так как ускорение груза m относительно Земли равно $a - b$, то

$$a - b = \frac{T - kmg}{m} = \frac{M(g+a) - kmg}{m} = \frac{km(g+a) - kmg}{m} = ka,$$

откуда

$$a = \frac{b}{1-k}; \quad a - b = \frac{kb}{1-k}.$$

3.36. Два одинаковых груза с массой M каждый связаны между собой невесомой нитью, перекинутой через неподвижный невесомый блок. На один из грузов кладется перегрузок с массой m (рис. 85). Найти ускорение a при движении грузов, натяжение нити T, давление R на ось блока и реакцию f груза M на давление перегрузка.

Здесь все силы вертикальны. Поэтому составляем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную ось для каждого тела системы в отдельности:

$$Mg - T = -Ma;$$
$$Mg + f - T = Ma;$$
$$mg - f = ma.$$

Из этих уравнений находим

$$a = \frac{mg}{2M + m}; \quad T = \frac{2M(M + m)g}{2M + m};$$

$$f = \frac{2Mmg}{2M + m}; \quad R = 2T.$$

3.37. Два груза с массами M и m связаны между собой невесомой нитью, перекинутой через неподвижный невесомый блок (рис. 86). В начальный момент времени расстояния между центрами тяжести каждого из этих грузов и осью X, проведенной через ось блока, равны l_1 и l_2. Найти уравнение движения центра масс системы грузов, если $M > m$.

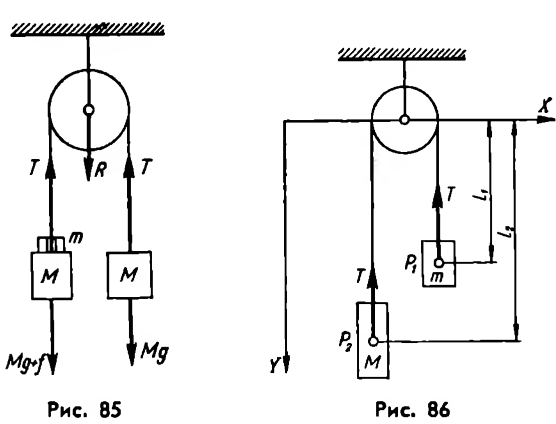


Рис. 85 Рис. 86

Направим положительную ось Y вниз по вертикали. По определению центра масс системы

$$y_ц = \frac{My_2 + my_1}{M + m}.$$

Оба груза движутся с одинаковым ускорением a, причем груз M движется вниз, а m — вверх. Координаты этих грузов в некоторый момент времени t выражаются формулами

$$y_1 = l_1 - \frac{at^2}{2};$$

$$y_2 = l_2 + \frac{at^2}{2}.$$

Теперь запишем уравнение второго закона Ньютона для каждого груза:

$$Mg - T = Ma; \quad mg - T = -ma,$$

где T — натяжение нити.

Из этих уравнений находим

$$a = \frac{(M-m)g}{M+m}.$$

Подставив выражение для a в формулы для координат обоих грузов, найдем уравнения движения каждого груза:

$$y_1 = l_1 - \frac{M-m}{M+m}\frac{gt^2}{2};$$

$$y_2 = l_2 + \frac{M-m}{M+m}\frac{gt^2}{2}.$$

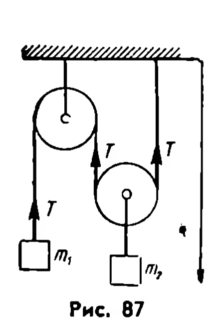


Рис. 87

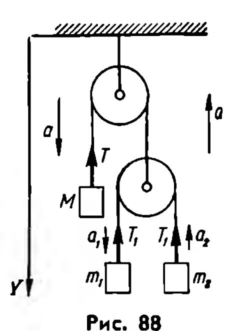


Рис. 88

Теперь найдем уравнение движения центра масс системы, для чего подставим эти выражения в формулу для координаты центра масс:

$$y_{ц} = \frac{My_2 + my_1}{M+m} = \frac{Ml_2 + ml_1}{M+m} + \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \frac{gt^2}{2}.$$

3.38. Найти ускорения a_1 и a_2 масс m_1 и m_2 и натяжение нити в системе, изображенной на рис. 87 (массой блоков и нитей и трением пренебречь).

Составляем уравнения второго закона Ньютона для каждого груза:

$$m_1 g - T = m_1 a_1; \quad m_2 g - 2T = -m_2 a_2.$$

Заметим, что перемещение груза m_2 вдвое меньше, чем перемещение груза m_1, откуда следует, что $a_1 = 2a_2$.

Из этих уравнений находим

$$a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g; \quad a_1 = 2\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g;$$

$$T = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

3.39. Через неподвижный невесомый блок переброшена невесомая нить, на левом конце которой висит груз с массой M, а на правом — подвижный невесомый блок, через который также переброшена невесомая нить с грузами m_1 и m_2 на концах. При этом $M > m_1 + m_2$ и $m_1 > m_2$. Найти натяжение обеих нитей T и T_1 (рис. 88).

Составим уравнения второго закона Ньютона для каждого груза в проекциях на вертикаль (положительное направление — вниз):

$$Mg - T = Ma;$$
$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 - m_1 a;$$
$$m_2 g - T_1 = -m_2 a_1 - m_2 a.$$

Заметим, что уравнение для груза M написано в инерциальной системе отсчета, а уравнения для грузов m_1 и m_2 — в неинерциальной системе, движущейся вверх с ускорением a. Величины a_1 и a_2 — ускорения грузов m_1 и m_2 в этой неинерциальной системе, а $m_1 a$ и $m_2 a$ — фиктивные силы инерции.

Как видно из рисунка, $T = 2T_1$. Из этих уравнений получим

$$T = \frac{8Mm_1m_2g}{M(m_1+m_2)+4m_1m_2}; \quad T_1 = \frac{4Mm_1m_2g}{M(m_1+m_2)+4m_1m_2}.$$

3.40. Два груза с массами m_1 и m_2 связаны между собой тросом, масса которого равна $m_т$. Грузы движутся ускоренно вверх под действием вертикальной силы F, приложенной к верхнему грузу с массой m_1. Найти натяжение в верхнем конце, в середине и в нижнем конце троса.

По второму закону Ньютона для всей системы

$$F - m_1 g - m_т - m_2 g = (m_1 + m_т + m_2)\, a,$$

откуда

$$a = \frac{F - g(m_1 + m_т + m_2)}{m_1 + m_т + m_2} = \frac{F}{m_1 + m_т + m_2} - g.$$

Натяжение троса:

на верхнем конце

$$F - m_1(a+g) = (m_т + m_2)(a+g) = \frac{F(m_т + m_2)}{m_1 + m_т + m_2};$$

в середине

$$F - \left(m_1 + \frac{m_т}{2}\right)(a+g) = \left(\frac{m_т}{2} + m_2\right)(a+g) = \frac{F\left(\frac{m_т}{2} + m_2\right)}{m_1 + m_т + m_2};$$

на нижнем конце

$$F - (m_1 + m_т)(a+g) = m_2(a+g) = \frac{Fm_2}{m_1 + m_т + m_2}.$$

3.41. В лифте находится ведро с водой, в которой плавает частично погруженное в нее тело. Изменится ли глубина погружения тела, если лифт будет двигаться с ускорением, направленным вверх? вниз?

Если лифт движется с ускорением a, то для плавающего тела с массой m второй закон Ньютона запишется в виде

$$m\vec{a} = m\vec{g} + F_A,$$

или, в проекции на вертикаль (направление вверх положительное),

$$ma = F - mg,$$

где F_A — архимедова выталкивающая сила,

$$F_A = m_ж (a+g) = \rho V (a+g).$$

Здесь $m_ж$ — масса вытесненной жидкости; ρ — плотность жидкости; V — объем погруженной части тела.

Из двух последних уравнений находим $V = m/\rho$. Таким образом, этот объем не зависит от ускорения, и поэтому глубина погружения не изменится. Это понятно, так как в ускоренно движущейся системе как вес тела, так и вес вытесненной им жидкости изменяются одинаково.

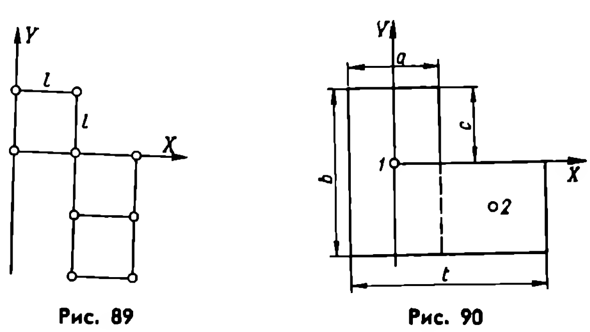


Рис. 89 Рис. 90

3.42. На одном конце веревки, переброшенной через невесомый блок, находится груз с массой m, на другом — человек с массой $2m$. Человек поднимается вверх по веревке с ускорением $a_{отн}$ относительно системы отсчета, связанной с веревкой. Найти его ускорение $a_{абс}$ в неподвижной системе отсчета, связанной с Землей.

Применим второй закон Ньютона к каждому грузу. Для груза m

$$T - mg = ma,$$

где a — ускорение системы, в которой груз m и веревка неподвижны («переносное» ускорение).

Для человека

$$T - 2mg = 2m(a_{отн} - a),$$

так как оба ускорения направлены навстречу друг другу.

Из этих двух уравнений находим

$$a = (2a_{отн} + g)/3.$$

Ускорение человека в системе отсчета, связанной с Землей, равно

$$a_{абс} = a_{отн} - a = (a_{отн} - g)/3.$$

3.43. Система материальных точек с массой m каждая расположена как показано на рис. 89. Все точки находятся в углах квадратных решеток со сторонами l. Найти центр тяжести системы.

Выберем оси координат, как показано на рисунке. Согласно формулам для координат центра тяжести

$$x_ц = \frac{0 \cdot m + 0 \cdot m + 4ml + 3m \cdot 2l}{9m} = \frac{10}{9} l;$$

$$y_ц = \frac{2ml + 3m \cdot 0 + 2m(-l) + 2m(-2l)}{9m} = -\frac{4}{9} l.$$

3.44. Найти центр тяжести однородной пластины постоянной толщины h (рис. 90).

Разобьем пластину на две части и введем координатные оси, как показано на рисунке. Точки *1* и *2* — центры тяжести соответствующих частей.

Обозначим координаты центров тяжести *1* и *2* через x_1, y_1 и x_2, y_2. Тогда

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad x_2 = \frac{a}{2} + \frac{l-a}{2} = \frac{l}{2}; \quad y_2 = -\frac{b-c}{2};$$

$$m_1 = \rho V_1 = \rho h S_1 = \rho hab; \quad m_2 = \rho V_2 = \rho h S_2 = \rho h (l-a)(b-c);$$

$$x_ц = \frac{0 \cdot m_1 + \rho h (l-a)(b-c)\, l/2}{\rho h\,[ab + (l-a)(b-c)]};$$

$$y_ц = \frac{0 \cdot m_1 - \rho h (l-a)(b-c)\, c/2}{\rho h\,[ab + (l-a)(b-c)]}.$$

Окончательно

$$x_ц = \frac{l(l-a)(b-c)}{2\,[ab + (l-a)(b-c)]};$$

$$y_ц = -\frac{c(l-a)(b-c)}{2\,[ab + (l-a)(b-c)]}.$$

3.45. Найти центр тяжести однородной квадратной пластинки со стороной a, в которой вырезано круглое отверстие радиусом $a/4$, как показано на рис. 91.

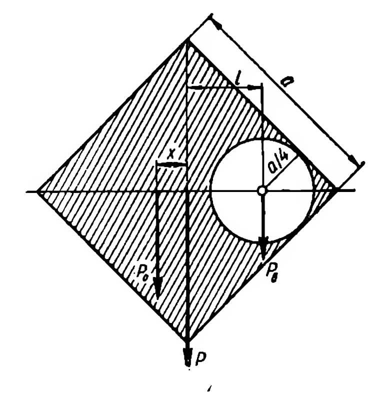


Рис. 91

Для решения задач такого типа можно пользоваться следующим приемом. Если вставить вырезанную часть на место, то сила тяжести P всего тела будет представлять собой сумму двух параллельных сил — силы тяжести вырезанного диска $P_в$ и силы тяжести оставшейся фигуры $P_о$. Так как силы P, $P_в$ и $P_о$ и координата точки приложения силы $P_в$ известны, можно найти координату x из соотношения

$$P_о x = P_в l; \quad x = \frac{P_в l}{P - P_в} = \frac{S_в l}{S - S_в},$$

где S — площадь квадрата; $S_в$ — площадь выреза.

Так как $S = a^2$, $S_в = \pi a^2/16$ и $l = \sqrt{2}a/4$, то

$$x = \frac{\pi\sqrt{2}a}{4(16-\pi)}.$$

Другой способ решения подобных задач описан в задаче 3.47.

3.46. n материальных точек с массами m, $2m$, ..., nm расположены вдоль одной прямой на одинаковом расстоянии a одна от другой. Найти центр масс этой системы (рис. 92).

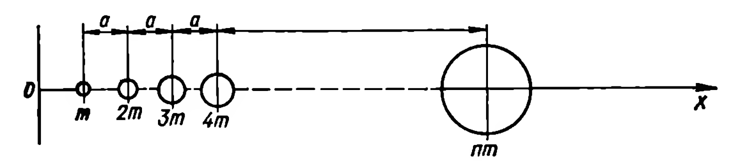


Рис. 92

Выберем начало координат в точке, лежащей слева от первой материальной точки на расстоянии a. Тогда

$$x_ц = \frac{ma + 2m \cdot 2a + \cdots + nm \cdot na}{m + 2m + \cdots + nm} = \frac{m(a + 2 \cdot 2a + \cdots + n \cdot na)}{m(1 + 2 + \cdots + n)} =$$

$$= \frac{a(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)}{1 + 2 + \cdots + n} = \frac{an(n+1)(2n+1)}{6} \frac{2}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{a(2n+1)}{3}.$$

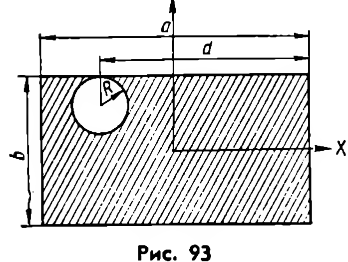


Рис. 93

3.47. Найти центр масс однородной пластины постоянной толщины h с круглым вырезом радиуса R (рис. 93).

Допустим, что в области выреза плотность пластины ρ отрицательна. Взяв за начало отсчета центр прямоугольника, получим в проекциях на оси (с учетом того, что координата центра круга отрицательна и что в области круга плотность равна $-\rho$):

$$x_ц = \frac{(-\pi R^2 h\rho)\left[-\left(d - \frac{a}{2}\right)\right]}{-\pi R^2 h\rho + \rho abh} = \frac{\pi R^2\left(d - \frac{a}{2}\right)}{-\pi R^2 + ab};$$

$$y_ц = \frac{-\pi R^2 h\rho\left[\frac{b}{2} - R\right]}{-\pi R^2 h\rho + \rho abh} = \frac{\pi R^2\left(R - \frac{b}{2}\right)}{-\pi R^2 + ab}.$$

3.48. Мяч с массой m, двигаясь по нормали к стенке со скоростью v, упруго ударяется о нее и отскакивает с такой же по модулю, но противоположной по направлению скоростью. Найти величину

и направление импульсов, полученных мячом и стенкой, и среднюю силу действия мяча на стенку, если продолжительность удара равна Δt.

По второму закону Ньютона импульс, полученный мячом,

$$\vec{F}\,\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1,$$

где $m\vec{v}_2$ — количество движения мяча после удара; $m\vec{v}_1$ — количество движения мяча до удара.

Импульс, полученный стенкой, очевидно, равен и противоположен импульсу мяча.

Так как $|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1| = v$, то по правилу вычитания векторов находим, что вектор импульса мяча имеет значение $mv - (-mv) = 2mv$ и направлен в ту же сторону, что и вектор $m\vec{v}_2$, т. е. от стенки. Средняя сила действия, очевидно, равна

$$F = \frac{2mv}{\Delta t}.$$

3.49. Мяч с массой m, падая на горизонтальную плоскость со скоростью v по прямой, образующей с нормалью к плоскости угол α, а) отражается от нее под таким же углом; б) испытывает неупругое соударение с плоскостью. Время соударения равно τ. Найти среднюю силу удара.

а) Разложим скорости до и после удара на горизонтальную v_x и вертикальную v_y составляющие. В результате удара горизонтальная составляющая не изменится, так как в этом направлении никакие силы не действуют, в то время как вертикальная — изменит направление на обратное. Согласно закону сохранения импульса

$$F\tau = mv_y - (-mv_y) = 2mv_y = 2mv\cos\alpha.$$

Отсюда средняя сила удара

$$F' = \frac{2mv\cos\alpha}{\tau} + mg.$$

б) В случае неупругого соударения шарик не отражается от плоскости и $F\tau = mv\cos\alpha$, откуда

$$F' = \frac{mv\cos\alpha}{\tau} + mg.$$

3.50. Человек с массой m неподвижно стоит на тележке с массой M. Найти скорость тележки, если человек будет двигаться по ней с относительной скоростью v (трением между тележкой и дорогой пренебречь).

Когда человек начнет двигаться, то в результате воздействия силы трения F между подошвами человека и поверхностью тележки последняя покатится в обратном направлении со скоростью u относительно Земли. Тогда скорость человека относительно Земли будет равна $v - u$. Если промежуток времени, за который человек и тележка приобрели свои скорости, обозначить через τ, то

$$F\tau = m(v - u) = Mu,$$

откуда

$$u = \frac{mv}{M+m}.$$

Из закона сохранения количества движения следует

$$m(v-u) - Mu = 0,$$

т. е. то же уравнение, что и выше.

3.51. Между двумя лодками, находящимися на поверхности озера, протянута веревка. Человек, стоящий на первой лодке, тянет веревку с постоянной силой F. Найти скорости обеих лодок относительно берега и относительно друг друга через время t после начала движения (сопротивлением воды пренебречь). Вес первой лодки с человеком равен P_1, вес второй лодки с грузом равен P_2.

Импульс каждой лодки равен Ft, поэтому скорости лодок относительно берега равны

$$v_1 = \frac{Ft}{m_1} = \frac{Ftg}{P_1}; \quad v_2 = \frac{Ftg}{P_2}.$$

Скорость лодок относительно друг друга

$$v_{\text{отн}} = v_1 + v_2 = Fgt\left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}\right).$$

3.52. Пуля с массой m попадает в баллистический маятник (подвешенный на нити ящик с песком) с массой M, где и застревает. При этом маятник отклоняется от вертикали так, что поднимается на некоторую высоту h. Найти скорость пули в момент удара.

Очевидно, $mv = (M+m)u$, где u — начальная скорость маятника, которую мы приближенно считаем горизонтальной.

По закону сохранения потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h, равна Mgh. При вертикальном положении нити вся эта энергия превращается в кинетическую энергию, равную $Mv^2/2$. Из равенства $(M+m)gh = (M+m)u^2/2$ следует

$$v = \sqrt{2gh},$$

так что

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}.$$

3.53. Тело с массой M, движущееся со скоростью $\vec{v}$, испытывает чисто неупругое столкновение с телом с массой m, двигавшимся со скоростью $\vec{u}$. Найти направление и скорость системы после удара.

До удара количество движения было равно $M\vec{v} + m\vec{u}$; после удара оно стало равным $(M+m)\vec{w}$; по закону сохранения количества движения

$$\vec{w} = \frac{M\vec{v} + m\vec{u}}{M+m}.$$

Модуль вектора вычисляем из выражения

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{1}{M+m}\sqrt{(Mv_x + mu_x)^2 + (Mv_y + mu_y)^2}.$$

Направление $\vec{w}$ определяется соотношением $w_y/w_x = \operatorname{tg}\gamma$.

3.54. Тело весом P соскальзывает без трения с наклонной плоскости, укрепленной на тележке весом Q (рис. 94). Найти скорость тележки, если высота наклонной плоскости h и угол наклона α (трение тележки не учитывать).

Скорость тела относительно тележки в конце наклонной плоскости равна $\sqrt{2gh}$. Горизонтальная слагающая этой скорости равна $\sqrt{2gh}\times$ $\times\cos\alpha$ и согласно закону сохранения количества движения

$$P(\sqrt{2gh}\cos\alpha - u) = Qu,$$

откуда

$$u = \frac{P\sqrt{2gh}\cos\alpha}{P+Q}.$$

Рис. 94

Для вертикальной слагающей закон сохранения количества движения не выполняется в силу незамкнутости системы относительно вертикального направления (существует внешняя сила тяжести).

3.55. Две тележки A и B стоят на рельсах одна за другой и связаны нерастяжимым тросом. На тележке A с массой m_A стоит человек с массой m; масса тележки B равна m_B. Человек начинает двигаться по тележке A в сторону тележки B со скоростью v относительно тележки. Найти скорость обеих тележек.

Эта задача аналогична задаче 3.50, если рассматривать обе тележки как одно целое. В этом случае по закону сохранения импульса

$$m(v-u) = (m_A + m_B)u;$$

$$u = \frac{mv}{m + m_A + m_B}.$$

3.56. Через неподвижный блок переброшена нить, к одному концу которой привязан груз с массой m_A, а к другому — лестница с массой m_B. По лестнице со скоростью v взбирается человек с массой m. Найти скорость опускания лестницы при условии, что $m_A = m_B + m$.

Здесь сумма количеств движения, связанных с одним концом нити, должна равняться сумме количеств движения, связанных с другим концом той же нити. Учитывая, что скорость опускания лестницы по модулю равна скорости подъема груза m, и считая направление вверх положительным, можем написать

$$m(v-u) - m_B u = m_A u,$$

откуда

$$u = \frac{mv}{m + m_A + m_B},$$

аналогично предыдущей задаче.

3.57. Шар с массой M подвешен на нерастяжимой нити длиной l. Шар отклоняют от вертикали на угол α и затем отпускают. Когда нить проходит вертикальное положение, в шар навстречу его движению стреляют пулей с массой m, которая застревает в шаре, причем шар останавливается. Найти скорость пули (рис. 95).

Высота подъема шара, как видно из рисунка, равна

$$h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha).$$

При вертикальном положении нити скорость шара направлена горизонтально и равна (см. задачу 3.59)

$$v_M = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}.$$

Согласно закону сохранения количества движения $Mv_M - mv_m = 0$, откуда

$$v_m = \frac{M}{m}\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}.$$

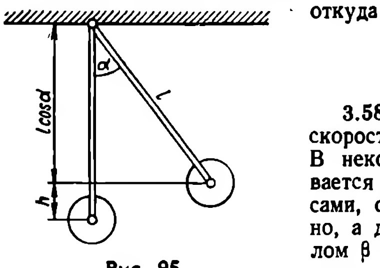


Рис. 95

3.58. Снаряд вылетает из орудия со скоростью v под углом α к горизонту. В некоторой точке траектории он разрывается на два осколка с одинаковыми массами, один из которых падает вертикально, а другой начинает двигаться под углом β к горизонту. Найти скорость второго осколка (пренебрегая сопротивлением воздуха).

Рассмотрим отдельно вертикальное и горизонтальное движения. Внешние силы (сила тяжести) вертикальны, поэтому по отношению к вертикальному движению система незамкнута и закон сохранения количества движения неприменим. В горизонтальном же направлении внешних сил нет и количество движения сохраняется. Поэтому

$$mv\cos\alpha = \frac{m}{2}u\cos\beta,$$

откуда

$$u = \frac{2v\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

3.59. Тележка с песком, имеющая массу M, движется горизонтально со скоростью v. Камень с массой m попадает в песок и движется вместе с тележкой. Найти скорость тележки после падения камня: а) падающего по вертикали; б) летящего горизонтально навстречу тележке.

а) Аналогично предыдущей задаче внешние силы вертикальны. Для горизонтального движения импульс системы сохраняется и поэтому после вертикального падения камня скорость системы уменьшается только в связи с увеличением массы:

$$Mv = (M + m)u;$$

$$u = \frac{Mv}{M + m}.$$

б) Если камень летит горизонтально навстречу тележке со скоростью v_1 и застревает в песке, то по закону сохранения импульса скорость тележки определится из равенства $Mv - mv_1 = (M + m)u$, откуда

$$u = \frac{Mv - mv_1}{M + m}.$$

3.60. На носу и на корме лодки с массой M и длиной l, стоящей неподвижно на озере, сидят два рыболова с массами m_1 и m_2. Найти смещение лодки Δl, когда рыболовы меняются местами.

При перемещении первого из рыболовов лодка сместится на расстояние Δl_1, которое можно найти из закона сохранения количества движения

$$m_1\left(\frac{l - \Delta l_1}{t}\right) = (M + m_2)\frac{\Delta l_1}{t},$$

где $l - \Delta l_1$ — перемещение первого рыболова за время t. Отсюда

$$\Delta l_1 = \frac{m_1 l}{M + m_1 + m_2}.$$

При перемещении второго рыболова лодка сместится в обратную сторону на расстояние

$$\Delta l_2 = \frac{m_2 l}{M + m_1 + m_2}.$$

Результирующее смещение лодки

$$\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 = \frac{(m_1 - m_2)l}{M + m_1 + m_2}.$$

Другой способ решения таких задач изложен в задаче 3.65.

3.61. Из пушки с массой M, движущейся по горизонтальной плоскости со скоростью v, произведен выстрел в горизонтальном направлении в сторону движения. Масса снаряда — m. Найти скорость снаряда, если пушка после выстрела приобрела скорость u в обратном направлении.

Начальное количество движения равно $(M + m)v$. После выстрела в результате отдачи пушка приобрела скорость u в направлении, противоположном v, а снаряд приобрел скорость w. Количество движения после выстрела равно $M(v - u) + mw$. По закону сохранения количества движения

$$(M + m)v = M(-u) + mw.$$

Отсюда

$$w = \frac{(M + m)v + mu}{m}.$$

3.62. Решить задачу 3.61 для случая, когда пушка стреляет под углом α к горизонту.

В этом случае после выстрела пушка приобретает скорость $(-u)$, а горизонтальная слагающая скорости снаряда будет $w\cos\alpha$. Закон

сохранения количества движения в горизонтальной плоскости запишется в виде

$$(M+m)v = M(-u) + mw\cos\alpha.$$

Тогда

$$w = \frac{(M+m)v + Mu}{m\cos\alpha}.$$

Для случая, когда α приближается к 90°, горизонтальная слагающая скорости снаряда стремится к нулю и закон сохранения количества движения становится все менее справедливым, так как в вертикальной плоскости система незамкнута (существует внешняя сила тяжести).

3.63. Тело с массой M соскальзывает без трения с наклонной плоскости, угол наклона которой α. После того как тело прошло путь l, с ним неупруго сталкивается летящий горизонтально пластилиновый шар с массой m. При этом тело останавливается. Найти скорость шара (рис. 96).

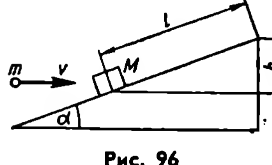


Рис. 96

Скорость тела в конце пути l

$$u = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl\sin\alpha}$$

и направлена вдоль наклонной плоскости. Проекция скорости тела на горизонтальное направление равна $u\cos\alpha = \sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha$. Так как после столкновения оба тела остановились, то

$$Mu\cos\alpha - mv = 0,$$

откуда

$$v = \frac{M\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha}{m}.$$

В данной задаче выбираются проекции не на наклонную плоскость, а на горизонтальное направление, по отношению к которому система замкнута, т. е. справедлив закон сохранения количества движения.

3.64. В деревянный шар с массой M, лежащий на неподвижном кольце, снизу ударяет пуля с массой m, летящая вертикально вверх. Пуля пробивает шар, который при этом подпрыгивает на высоту h, и сама поднимается на некоторую высоту. Скорость пули перед ударом равна v. Найти высоту подъема пули над шаром.

Скорости обоих тел непосредственно после удара можно найти по формуле $v_t^2 = v_0^2 - 2gS$, где $v_t = 0$:

$$v_{ш} = \sqrt{2gh}; \quad v_{п} = \sqrt{2gH},$$

где H — высота подъема пули.

Так как движение происходит в вертикальном направлении, то применение закона сохранения количества движения может оказаться неправомерным, поскольку на оба тела кроме внутренних сил действует внешняя сила тяжести. Поэтому составим для обоих тел уравнения второго закона Ньютона:

для шара

$$(F_{тр} - Mg)\Delta t = Mv_{ш};$$

для пули

$$-(F_{тр}+mg)\,\Delta t = m\,(v_п - v).$$

Здесь $|F_{тр}|$ — сила трения между пулей и шаром; Δt — время пролета пули сквозь шар; $Mv_ш$ и $m\,(v_п - v)$ — изменения количества движения шара и пули за время Δt. Исключив из обоих уравнений $F_{тр}$, находим

$$(M+m)\,g\,\Delta t = m\,(v - v_п) - Mv_ш. \qquad (*)$$

Подставив вместо $v_п$ и $v_ш$ их значения и решив уравнение относительно H, найдем

$$H = \frac{v_п^2}{2g} = \frac{1}{2gm^2}\left[(mv - M\sqrt{2gh}) - (M+m)\,g\,\Delta t\right]^2.$$

Так как время пролета пули сквозь шар очень мало, слагаемым в формуле (*), содержащим Δt, можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми. Таким образом, мы приходим к заключению, что закон сохранения количества движения приближенно справедлив и в этом случае:

$$0 = m\,(v - v_п) - Mv_ш.$$

Окончательно

$$H = \frac{(mv - M\sqrt{2gh})^2}{2gm^2}.$$

3.65. Плот с массой M и длиной l неподвижен на стоячей воде. С противоположных концов плота одновременно начинают двигаться навстречу друг другу два человека с массами m_1 и m_2. Найти смещение плота в момент, когда человек с массой m_1 пройдет весь плот, а человек с массой m_2 будет на середине плота. Сопротивлением воды пренебречь.

Пусть ось X совпадает с направлением перемещения плота, а начало координат — с точкой местонахождения человека с массой m_1 до начала движения.

Координата центра масс системы до начала движения

$$x_ц' = \frac{m_1 \cdot 0 + Ml/2 + m_2 l}{m_1 + m_2 + M}.$$

По условию задачи человек с массой m_1 переместился на l, человек с массой m_2 переместился на $l/2$, плот переместился на x. После перемещения координата центра масс

$$x_ц'' = \frac{m_1\,(l - x) + m_2\,[(l/2) - x] + M\,[(l/2) - x]}{m_1 + m_2 + M}.$$

По закону сохранения количества движения скорость центра масс, умноженная на массу системы, остается неизменной. Так как масса системы постоянна, а скорость системы до начала движения равнялась нулю, то она равна нулю и в конце движения, т. е. смещение центра масс равно нулю. Иначе говоря,

$$x_ц' = x_ц''.$$

Отсюда находим смещение плота

$$x = \frac{[m_1 - (m_2/2)]\, l}{m_1 + m_2 + M}.$$

3.66. Нейтрон с энергией E и массой m захватывается неподвижным ядром, масса которого равна nm. Полагая, что ядро при этом не возбуждается, и пренебрегая энергией связи нейтрона, найти скорость полученного ядра-изотопа.

По закону сохранения количества движения

$$m \sqrt{\frac{2E}{m}} = (n+1)\, mV,$$

откуда

$$v = \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{2F}{m}}.$$

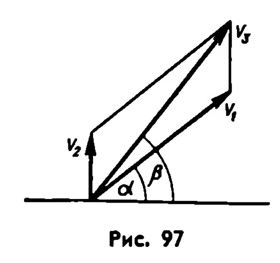


Рис. 97

Рис. 98

3.67. Надувной плот с массой m_1 отплывает от берега со скоростью $\vec{v}_1$, направленной под углом α к линии берега. С берега на плот прыгает с разгона человек с массой m_2, развивая во время прыжка скорость $\vec{v}_2$, направленную перпендикулярно линии берега. Найти скорость плота с человеком (рис. 97).

Закон сохранения количества движения в данном случае используем в векторной форме, так как скорости не направлены по одной прямой:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{v}_3.$$

Проекция на линию берега

$$m_1 v_1 \cos\alpha = (m_1 + m_2)\, v_3 \cos\beta.$$

Проекция на линию, перпендикулярную берегу,

$$m_1 v_1 \sin\alpha + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v_3 \sin\beta.$$

Возведя в квадрат и складывая оба равенства, находим

$$(m_1 + m_2)^2 v_3^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \sin\alpha,$$

откуда

$$v_3 = \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \sin\alpha}\,.$$

3.68. По наклонной плоскости с углом наклона α съезжает лыжник с массой M. Проехав расстояние l от вершины, он стреляет вверх сигнальной ракетой. Найти скорость лыжника после выстрела. Масса ракеты — m, ее начальная скорость — v (рис. 98).

Выберем оси координат, как показано на рисунке. Количество движения лыжника с ракетой вдоль оси X в момент выстрела равно $(M+m)\,v_1$, а после выстрела равно

$$-mv\sin\alpha + Mv_2,$$

где v — скорость ракеты после выстрела; v_2 — скорость лыжника после выстрела.

Таким образом, если считать (как в задаче 3.64), что время выстрела Δt пренебрежимо мало, то закон сохранения количества движения в направлении наклонной плоскости будет приближенно справедлив и

$$(M+m)\,v_1 = -mv\sin\alpha + Mv_2.$$

Согласно закону сохранения энергии $(M+m)\,v_1^2/2 = (M+m)\,gh$, где $h = l\sin\alpha$.

Отсюда находим

$$v_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}.$$

Теперь можем определить

$$v_2 = \sqrt{2gl\sin\alpha}\left(\frac{M+m}{M} + \frac{mv}{M}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{2gl}}\right).$$

3.69. Два тела с массами m_1 и m_2 и скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно движутся под углом α друг к другу. Найти сумму количеств движения обоих тел.

Так как количества движения $m_1\vec{v}_1$ и $m_2\vec{v}_2$ представляют собой два вектора, угол между которыми равен α, то их сумма определяется по формуле

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{v},$$

а модуль суммы

$$Mv = \sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 - 2m_1m_2v_1v_2\cos(180° - \alpha)}.$$

Угол φ между вектором $M\vec{v}$ и одним из составляющих векторов (например, вектором $m_1\vec{v}_1$) можно найти по теореме синусов

$$\frac{Mv}{\sin\alpha} = \frac{m_2v_2}{\sin\varphi},$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{m_2v_2\sin\alpha}{Mv}.$$

3.70. Какова должна быть сила тяги F двигателя, чтобы автомобиль весом P набрал скорость v за время t, если коэффициент трения равен k?

Импульс автомобиля, сообщаемый ему движущей силой, равен Ft, а импульс, сообщаемый тормозящей силой трения, равен $-kPt$. По второму закону Ньютона

$$Ft - kPt = \frac{P}{g} v,$$

откуда находим

$$F = \frac{Pv}{gt} + kP.$$

3.71. На гладкой горизонтальной плоскости лежит брусок с массой M. Брусок снабжен кронштейном, на котором подвешен на нити длиной l шарик с массой m. Нить отклонена на некоторый угол и отпущена без начальной скорости. Найти скорость бруска в момент, когда нить проходит через вертикальное положение, если угловая скорость нити в этот момент равна ω. Трение не учитывать.

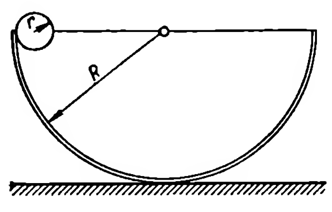


Рис. 99

Когда нить проходит через вертикальное положение, горизонтальная линейная скорость шарика относительно бруска равна ωl, где l — длина нити. Брусок вместе с шариком движутся в противоположном направлении со скоростью u, поэтому

$$m(\omega l - u) = Mu,$$

откуда

$$u = \frac{m\omega l}{M + m}.$$

3.72. По внутренней поверхности полусферической чашки радиуса R скатывается без трения шарик радиуса r, начинающий движение на одном краю и заканчивающий его на другом (рис. 99). Масса чашки M, масса шарика m. Насколько сместится чашка (трение не учитывать)?

Если отвлечься от вертикального движения (совершающегося под действием внешней силы тяжести), то горизонтальное перемещение шарика можно рассматривать как движение со скоростью v_x, и горизонтальная компонента количества движения шарика будет равна mv_x. Количество движения чашки равно Mu_x. По закону сохранения количества движения $mv_x = Mu_x$.

Расстояние, пройденное шариком по горизонтали, равно $2(R - r) - S$, где S — смещение чашки. Так как пройденные расстояния пропорциональны скоростям, то

$$\frac{S}{2(R - r) - S} = \frac{u_x}{v_x} = \frac{m}{M},$$

откуда

$$S = \frac{2m(R - r)}{M + m}.$$

3.73. Невесомый ступенчатый блок состоит из шкивов радиусами r и R (рис. 100). К нити, намотанной на меньший шкив, приложена горизонтальная сила F, на больший шкив подвешен груз с массой m. С каким ускорением будет подниматься груз?

Задачи такого типа удобно решать исходя из того, что если блок невесом, он находится в равновесии, и сумма приложенных к нему вращающих моментов равна нулю. В данном случае на блок действуют два противоположных вращающих момента: Fr и TR, и согласно вышесказанному $Fr - TR = 0$. Отсюда $T = Fr/R$. Второй закон Ньютона для груза запишется в виде

$$T - mg = ma,$$

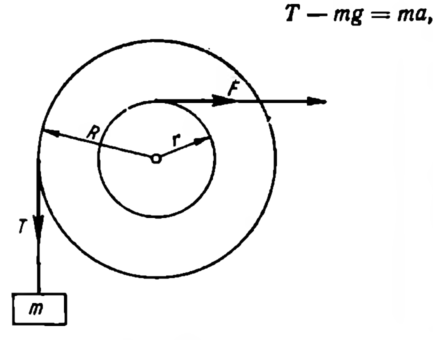


Рис. 100

Рис. 101

откуда

$$a = \frac{T - mg}{m} = \frac{Fr/R - mg}{m}.$$

3.74. Невесомый ступенчатый блок состоит из шкивов с радиусами r и R (рис. 101). На больший шкив намотана нить с грузом m_1, а на меньший — нить с грузом m_2. Найти ускорение каждого груза и натяжение каждой нити.

Напишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось Y:

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2;$$
$$T_1 - m_1 g = -m_1 a_1.$$

Поскольку блок невесом (см. задачу 3.73),

$$T_1 R = T_2 r,$$

и, наконец,

$$a_1/a_2 = [\omega R/t]/[\omega r/t] = R/r.$$

Из этих формул находим

$$a_1 = \frac{(m_1 R - m_2 r) R}{m_1 R^2 + m_2 r^2} g; \quad a_2 = \frac{(m_1 R - m_2 r) r}{m_1 R^2 + m_2 r^2} g;$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g r (R + r)}{m_1 R^2 + m_2 r^2}; \quad T_2 = \frac{m_1 m_2 g R (R + r)}{m_1 R^2 + m_2 r^2}.$$

3.75. Шестерня *1* под действием вращающего момента M приводит в движение шестерню *2* (рис. 102). Шестерня *2* жестко связана со шкивом *3*, на который намотана нить, несущая груз m. Радиусы шестерен равны R_1 и R_2, радиус шкива равен r. Найти ускорение груза, пренебрегая весом шестерен и шкива и трением.

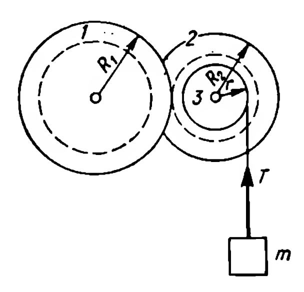


Рис. 102

В точке соприкосновения шестерня *1* действует на шестерню *2* с силой M/R_1. Эта сила создает на шестерне *2* вращающий момент $(M/R_1) R_2$, который, вследствие невесомости системы, равен Tr. Таким образом,

$$T = \frac{MR_2}{R_1 r}.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$T = mg = ma,$$

откуда

$$a = \frac{T - mg}{m} = \frac{MR_2}{mR_1 r} - g.$$

3.76. Два тела весом P_1 и P_2 укреплены на концах невесомого стержня длиной l. Стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг общего центра тяжести с угловой скоростью ω. Определить силу, растягивающую стержень (рис. 103).

Центр тяжести находится в точке, делящей l на отрезки, обратно пропорциональные силам, т. е.

$$P_1 x = P_2 (l - x),$$

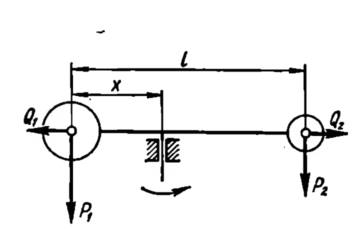


Рис. 103

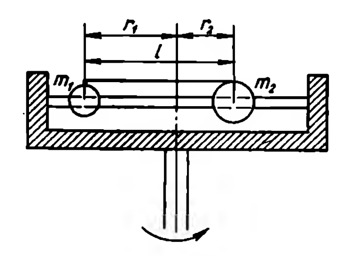


Рис. 104

откуда

$$x = \frac{P_2 l}{P_1 + P_2}.$$

Стержень растягивается реакциями Q_1 и Q_2 на действие центростремительных сил $F_ц$, действующих на каждое тело,

$$Q_1 = \frac{m_1 v_1^2}{x} = \frac{P_1 \omega^2 x}{g} = \frac{P_1 P_2 l \omega^2}{(P_1 + P_2) g} = Q_2.$$

3.77. На вертикальной оси вращается горизонтальный стержень, по которому свободно перемещаются два малых груза с массами m_1 и m_2, связанные нитью длиной l. Стержень вращается с угловой скоростью ω. Найти натяжение нити и кинетическую энергию грузов (рис. 104).

На оба груза действуют одинаковые силы натяжения нити, сообщая им центростремительные ускорения $\omega^2 r_1$ и $\omega^2 r_2$. Сила натяжения

$$F_н = m_1\omega^2 r_1 = m_2\omega^2 r_2.$$

Из этого уравнения, с учетом того, что $r_1 + r_2 = l$, находим

$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \quad r_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Натяжение нити

$$F_н = \frac{m_1 m_2 \omega^2 l}{m_1 + m_2}.$$

Кинетическая энергия грузов (если считать их материальными точками)

$$E = \frac{J_1\omega^2}{2} + \frac{J_2\omega^2}{2} = \frac{m_1\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{m_2\omega^2 r_2^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\omega^2 l^2.$$

3.78. На краю вращающегося горизонтального диска диаметром D подвешен на нити длиной l груз. Во время вращения нить отклоняется на угол α от вертикали. Найти угловую скорость вращения диска (рис. 105).

На груз действуют сила тяжести и сила натяжения нити, равнодействующая которых создает горизонтально направленную центростремительную силу:

$$m\omega^2 R = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha; \quad R = \frac{D}{2} + l\sin\alpha;$$

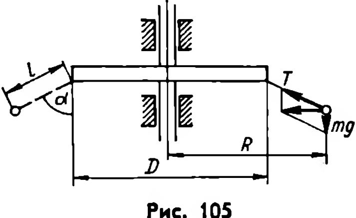


Рис. 105

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{D + 2l\sin\alpha}}.$$

3.79. Жесткий стержень длиной l закреплен под углом φ на вертикальной оси и вращается вместе с ней с угловой скоростью ω. К нижнему концу стержня прикреплен шарик с массой m. Найти силу, с которой стержень действует на шарик (рис. 106).

Заметим, что искомая сила, вообще говоря, направлена не вдоль стержня, а иначе, так как стержень жестко скреплен с осью под углом φ и не меняет своей ориентации ни при вращении, ни при остановке. Поэтому при вращении системы на шарик действуют сила тяжести mg и искомая сила F. Равнодействующая этих двух сил представляет собой центростремительную силу, которая равна

$$m\omega^2 R = \sqrt{F^2 - (mg)^2}.$$

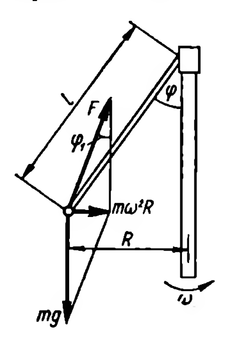
Так как $R = l \sin\varphi$, то

$$F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2\varphi}.$$

Направление этой силы можно найти из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\omega^2 l \sin\varphi}{g}.$$

3.80. Груз m, подвешенный к невесомой нити, описывает горизонтальную окружность с постоянной скоростью (конический маятник). Расстояние от точки подвеса до центра окружности равно h. Найти число оборотов маятника за 1 с.



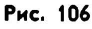


Рис. 106

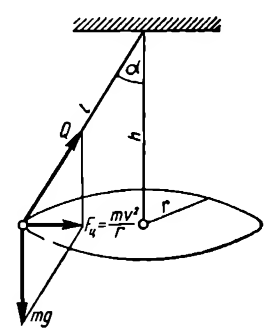


Рис. 107

На маятник действует сила тяжести mg и натяжение нити Q, благодаря которым возникает центростремительная сила

$$\vec{F}_ц = m\vec{g} + \vec{Q}.$$

В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$Q \sin\alpha = m\omega^2 r;$$
$$Q \cos\alpha = mg.$$

Разделив одно равенство на другое и учитывая, что $\omega = 2\pi n$ и $r = h \operatorname{tg}\alpha$, получим

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

3.81. Конический маятник с массой m и длиной подвеса l вращается в горизонтальной плоскости с периодом T. Найти силу натяжения нити и угол α между нитью и вертикалью (рис. 107).

Очевидно, что

$$Q \sin\alpha = m\omega^2 r;$$
$$Q \cos\alpha = mg;$$
$$r = l \sin\alpha; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Из этих уравнений находим

$$Q = \frac{4\pi^2 ml}{T^2}; \qquad \cos\alpha = \frac{gT^2}{4\pi^2 l}.$$

3.82. Автомобиль движется по окружности радиусом r со скоростью v, при превышении которой его «занесет». Найти минимальный коэффициент трения скольжения, при котором «заноса» не будет (рис. 108).

При движении автомобиля сила трения направлена к центру окружности и является центростремительной. Так как $F_{тр} = kmg$, $F_ц = \frac{mv^2}{r}$, то

$$kmg = \frac{mv^2}{r}; \quad k_{мин} = \frac{v^2}{gr}.$$

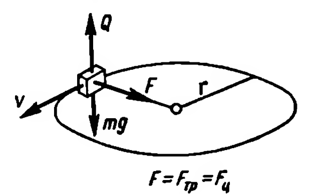


Рис. 108

3.83. Реактивный самолет описывает петлю Нестерова. Скорость самолета в нижней точке петли — v. Радиус петли — R. Найти, во сколько раз «тяжелее» становится летчик (какова перегрузка) в нижней точке петли.

Если траектория — окружность, то в нижней точке на летчика действует центростремительная сила $\vec{F}$, которая является равнодействующей реакции кресла $\vec{R}_{кр}$ и веса летчика $\vec{P}$, т. е.

$$F_ц = R_{кр} - P.$$

По третьему закону Ньютона сила, прижимающая летчика к креслу, равна и противоположна реакции кресла, т. е. равна $F_ц + P$. Перегрузка равна

$$\frac{F_ц + P}{P} = \frac{F_ц}{P} + 1 = \frac{v^2}{gR} + 1.$$

3.84. Платформа движется по закруглению с линейной скоростью v. Шарик, подвешенный на нити на этой платформе, отклоняется на угол α. Найти радиус закругления.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{mv^2}{R} \Big/ mg = \frac{v^2}{gR},$$

откуда

$$R = \frac{v^2}{g \operatorname{tg}\alpha}.$$

3.85. Самолет летит горизонтально с ускорением. Шарик, подвешенный на нити в самолете, отклоняется от вертикали на угол α. Найти ускорение самолета (рис. 109).

В неинерциальной системе отсчета (самолет) шарик покоится. На шарик действуют: сила натяжения нити, сила тяжести и сила инерции ma, направленная в сторону, противоположную направ-

лению ускорения самолета. Равнодействующая этих сил равна нулю, поэтому

$$|ma|/mg = \operatorname{tg} \alpha; \quad a = g \operatorname{tg} \alpha.$$

3.86. На нижнем краю поверхности конуса с углом наклона α лежит тело с массой m. Конус равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Расстояние от оси вращения до тела равно R. Найти наименьший коэффициент трения, при котором тело еще удерживается на поверхности конуса (рис. 110).

Так как система вращается равномерно, то равнодействующей всех сил, действующих на тело, является центростремительная сила

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}; \quad a = \omega^2 R.$$

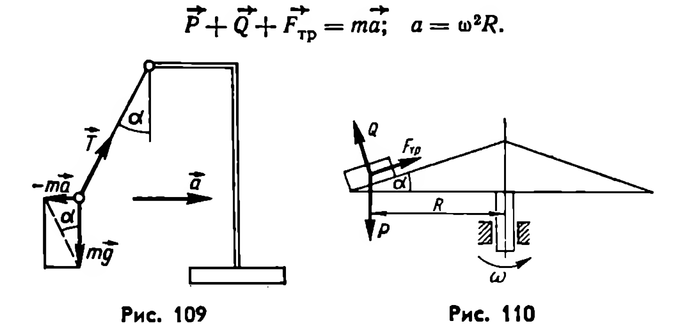


Рис. 109

Рис. 110

Проектируя это уравнение на горизонталь и вертикаль, получим

$$F_{тр} \cos \alpha - Q \sin \alpha = m\omega^2 R;$$

$$F_{тр} \sin \alpha + Q \cos \alpha - mg = 0.$$

Кроме того, $F_{тр} = kQ$. Исключив Q, находим

$$\frac{k \sin \alpha + \cos \alpha}{k \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{g}{\omega^2 R},$$

откуда

$$k = \frac{\omega^2 R \cos \alpha + g \sin \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha},$$

причем должно выполняться условие

$$g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha > 0$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha < \frac{g}{\omega^2 R}.$$

3.87. Груз вращается на подвесе из резинового шнура вокруг вертикальной оси. Начальная длина подвеса равна l, а при вращении подвес упруго растягивается до длины L (рис. 111). Найти угловую скорость вращения груза, если в неподвижном состоянии груз растягивает подвес до длины nl.

На груз действуют сила T натяжения шнура и сила веса, создающие центростремительную силу. Проекция на горизонталь

$$m\omega^2 r = T\sin\alpha.$$

Кроме того, $r = L\sin\alpha$. Учитывая это, находим

$$T = m\omega^2 L.$$

Если начальная длина шнура — l, а L — длина при воздействии силы T, то

$$T = k(L - l).$$

По условию

$$mg = k(nl - l) = kl(n-1),$$

откуда

$$k = \frac{mg}{l(n-1)}.$$

Таким образом,

$$m\omega^2 L = \frac{mg(L-l)}{l(n-1)}.$$

Отсюда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g(L-l)}{Ll(n-1)}}.$$

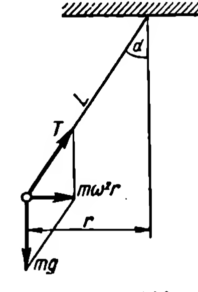


Рис. 111

3.88. Водопроводная труба диаметра d, лежащая горизонтально, имеет закругление радиуса R. Количество воды, протекающей ежесекундно через сечение трубы, — M. Найти давление воды на стенку трубы в колене.

Так как вода движется по закруглению радиуса R, то со стороны боковой стенки трубы на нее действует центростремительная сила mv^2/R. Реакция воды, равная этой силе, составляет

$$\frac{mv^2}{R} = F.$$

Здесь масса воды $m = \rho lS$, где ρ — плотность жидкости; l — длина изогнутого участка; S — сечение трубы; скорость $v = M/\rho S$.

Боковое давление жидкости равно

$$p = \frac{F}{ld} = \frac{mv^2}{Rld} = \frac{\rho lSv^2}{Rld} = \frac{M^2}{Rd\rho S}.$$

3.89. Вращающийся диск, разделенный на n темных и n светлых одинаковых секторов, освещается прерывистым светом с частотой прерывания ν, которая подобрана так, что диск при освещении кажется неподвижным. Скорость вращения такова, что за промежуток времени между двумя вспышками данный темный сектор заменяется следующим темным сектором. 1) Найти скорость вращения диска. 2) Найти скорость вращения в случае, когда за тот же промежуток времени данный темный сектор заменяется сектором, идущим через один, через два и т. д.

1) Угол между соседними темными секторами равен $2\pi/n$. Если диск вращается так, как указано в условии задачи, его угловая скорость равна $2\pi/nT$, где T — промежуток времени между двумя вспышками, или $2\pi\nu/n$, так как $\frac{1}{T}=\nu$.

2) Этот случай эквивалентен уменьшению числа темных секторов вдвое, втрое и т. д., так что угловая скорость будет равна $2\cdot 2\pi\nu/n$, $3\cdot 2\pi\nu/n$, ..., $k\cdot 2\pi\nu/n$.

3.90. Найти линейную скорость точек земной поверхности, расположенных вдоль меридиана от экватора до полюса, и закон изменения силы тяжести на поверхности Земли с широтой в предположении, что Земля — шар ($R=\text{const}$).

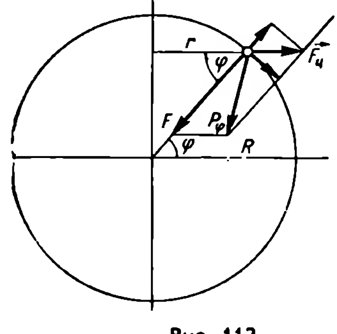


Рис. 112

Обозначим радиус и массу Земли через R и M, угловую скорость вращения Земли через ω, угол между радиусом Земли, лежащим в плоскости экватора, и радиусом, направленным в данную точку поверхности (широту), через φ (рис. 112).

Как видно из рисунка, линейная скорость произвольной точки

$$v=\omega R\cos\varphi.$$

Если рассматривать Землю как неинерциальную систему, то на тело с массой m, находящееся на широте φ, будет действовать (с точки зрения земного наблюдателя) фиктивная центробежная сила инерции $|\vec{F}_ц|=m\omega^2 r=m\omega^2 R\cos\varphi$. Эта сила, геометрически складываясь с силой притяжения Земли $|\vec{F}|=\gamma Mm/R^2$, дает в сумме силу тяжести P_φ, действующую на тело на широте φ:

$$\vec{P}_\varphi=\vec{F}_ц+\vec{F}.$$

По теореме косинусов получаем

$$P_\varphi=\sqrt{\frac{\gamma^2M^2m^2}{R^4}+m^2\omega^4R^2\cos^2\varphi+2m^2\gamma\frac{M}{R}\cos^2\varphi}.$$

Однако легко видеть, что $F_ц\ll F$, т. е. P_φ мало отличается от F. Действительно, поскольку $F=mg$, то

$$\frac{F_ц}{F}=\frac{\omega^2R}{g}\cos\varphi,$$

где g — ускорение свободного падения при $F_ц=0$.

Подставив сюда численные значения ω, R и g, найдем, что $\omega^2R/g=1/289$, т. е. $F_ц$ много меньше, чем F. Разложим силу $F_ц$ на вертикальную $F_ц\cos\varphi$ и горизонтальную $F_ц\sin\varphi$ составляющие и будем

приближенно считать, что вертикальная составляющая изменяет силу F только по модулю, а горизонтальная — только по направлению. Таким образом,

$$P_\varphi \approx F - F_ц \cos\varphi = mg - m\omega^2 R \cos^2\varphi.$$

Горизонтальная составляющая $F_ц \sin\varphi = m\omega^2 R \cos\varphi \sin\varphi$ отклоняет направление силы тяжести в сторону экватора. Эта составляющая равна нулю на полюсе, достигает максимума при $\varphi = 45°$ и на экваторе снова падает до нуля.

3.91. Шарик с массой m движется с постоянной угловой скоростью ω по внутренней поверхности круглой конической воронки, описывая

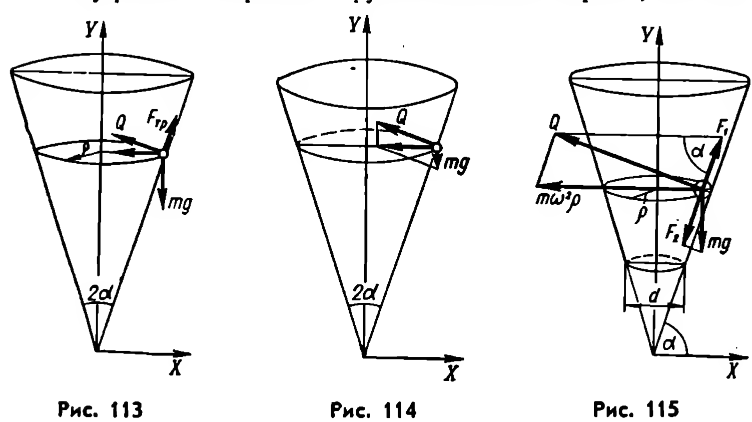


Рис. 113 Рис. 114 Рис. 115

горизонтальную окружность. Угол при вершине воронки равен 2α. Найти радиус окружности, описываемой шариком (рис. 113). Трением пренебречь.

Векторное уравнение второго закона Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{Q} = m\vec{a},$$

где $\vec{Q}$ — реакция поверхности воронки, направленная перпендикулярно образующей конуса.

Выберем оси: горизонтальную X и перпендикулярную ей ось Y. В проекциях на горизонтальную ось получаем

$$Q\cos\alpha = \frac{mv^2}{\rho} = m\omega^2\rho.$$

В проекциях на вертикальную ось

$$mg - Q\sin\alpha = 0,$$

так как точка, движущаяся равномерно по окружности, имеет только нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho = \omega^2\rho$.

Исключая Q, находим

$$\rho = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}\alpha}.$$

3.92. В условиях предыдущей задачи заданы: масса шарика m, радиус вращения ρ, угол при вершине воронки 2α, коэффициент трения скольжения k. Найти минимальную скорость шарика v, необходимую для того, чтобы шарик не соскальзывал вниз (рис. 114).

Векторное уравнение второго закона Ньютона

$$m\vec{g}+Q+F_{\text{тр}}=m\vec{a}_n=\frac{mv^2}{\rho}.$$

В проекциях на оси:

$$Q\cos\alpha-kQ\sin\alpha=\frac{mv^2}{\rho};$$
$$mg-Q\sin\alpha-kQ\cos\alpha=0.$$

Исключая Q, находим, что

$$v\geqslant\sqrt{\frac{\rho g(\cos\alpha-k\sin\alpha)}{\sin\alpha+k\cos\alpha}},$$

т. е. должно выполняться условие

$$\cos\alpha>k\sin\alpha,\ \text{или}\ k<\operatorname{ctg}\alpha.$$

3.93. Сосуд имеет форму усеченного конуса раструбом вверх и его стенки наклонены к горизонтали под углом α. На нижнем основании, диаметр которого равен d, лежит шарик с массой m. Найти, с какой скоростью должен вращаться сосуд, чтобы шарик выкатился из него (рис. 115). Трением пренебречь.

На шарик действуют: сила тяжести mg и сила реакции Q со стороны конической поверхности, направленная перпендикулярно этой поверхности. Разложим силу Q на составляющие: силу F_1, направленную параллельно конической поверхности, и центростремительную силу $m\omega^2\rho$, направленную по горизонтали. Проекцию силы тяжести на направление, параллельное конической поверхности, обозначим через F_2. Из рисунка видно, что

$$F_1=\frac{Q}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{m\omega^2\rho\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=m\omega^2\rho\cos\alpha;\quad F_2=mg\sin\alpha.$$

Для того чтобы шарик при вращении поднимался вверх по стенке, необходимо, чтобы $F_1>F_2$, т. е. $\omega^2\rho\cos\alpha>g\sin\alpha$, откуда

$$\omega>\sqrt{\frac{g\operatorname{tg}\alpha}{\rho}}.$$

Это же условие справедливо и в начальный момент, когда шарик начинает двигаться на дне сосуда, т. е.

$$\omega>\sqrt{\frac{2g\operatorname{tg}\alpha}{d}}.$$

3.94. Какова должна быть скорость движения мотоциклиста, чтобы он мог описывать горизонтальную окружность на внутренней поверхности вертикального кругового цилиндра радиусом r, если при езде по

горизонтальной поверхности с таким же коэффициентом трения скольжения минимальный радиус поворота при скорости v_1 равен R?

Обозначим вес мотоциклиста и мотоцикла через m. При езде по окружности радиуса R по горизонтальной поверхности сила трения $F_{тр}$ является центростремительной силой, т. е.

$$kmg = \frac{mv_1^2}{R},$$

откуда

$$k = \frac{v_1^2}{gR}.$$

При езде по горизонтальной окружности внутри вертикального цилиндра вес мотоциклиста с мотоциклом должен быть не больше силы трения

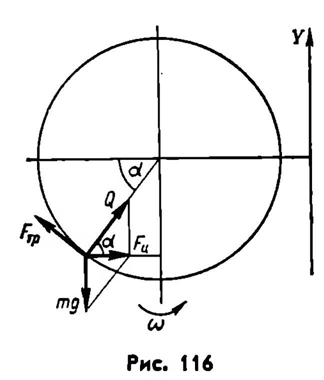


Рис. 116

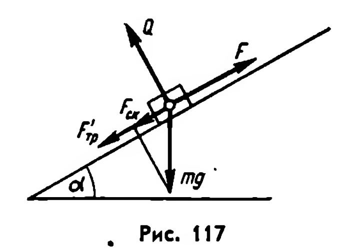


Рис. 117

скольжения $F_{тр}$. Эта сила трения пропорциональна центростремительной силе $F_ц$, т. е.

$$mg \leqslant F_{тр} = kQ = \frac{kmv^2}{r}.$$

Отсюда

$$v \geqslant \frac{g}{v_1}\sqrt{Rr}.$$

3.95. Пустотелый шар радиуса R вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. На внутренней поверхности находится в равновесии маленькая шайба (рис. 116). Считая угол α известным, найти коэффициент трения между шайбой и поверхностью шара.

Силы, действующие на шайбу, показаны на рисунке. Векторное уравнение второго закона Ньютона

$$\vec{Q} + \vec{P} + \vec{F}_{тр} = \vec{F}_ц,$$

так как шайба равномерно вращается по окружности.

В проекциях на горизонталь

$$Q\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha = m\omega^2 R\cos\alpha.$$

В проекциях на вертикаль

$$F_{\text{тр}} \cos \alpha + Q \sin \alpha - mg = 0.$$

Так как $F_{\text{ср}} = kQ$, то уравнения проекций позволяют исключить Q:

$$m\omega^2 R \cos \alpha = Q (\cos \alpha - k \sin \alpha);$$
$$mg = Q (k \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{\omega^2 R \cos \alpha}{g} = \frac{\cos \alpha - k \sin \alpha}{k \cos \alpha + \sin \alpha},$$

откуда

$$k = \frac{\cos \alpha (g + \omega^2 R \sin \alpha)}{g \sin \alpha + \omega^2 R \cos^2 \alpha}.$$

3.96. Аэросани с массой m, двигаясь по горизонтальному пути со скоростью v, развивают мощность N. Какую мощность они должны развивать при движении на подъеме с уклоном α с той же скоростью? Определить крутизну спуска, по которому сани будут равномерно съезжать вниз при выключении мотора (рис. 117).

При равномерном движении по горизонтали двигатель преодолевает только силу трения $F_{\text{тр}} = kmg$. Развиваемая при этом мощность равна $N = F_{\text{тр}} v$. Отсюда находим коэффициент трения

$$k = \frac{N}{mgv}.$$

При равномерном подъеме на тело действует движущая сила F, противоположная по направлению скатывающей силе $F_{\text{ск}}$ и силе трения $F'_{\text{тр}}$, а по модулю равная их сумме.

Как видно из рисунка,

$$F_{\text{ск}} = mg \sin \alpha;$$
$$F'_{\text{тр}} = kP \cos \alpha = \frac{N}{mgv} mg \cos \alpha = \frac{N \cos \alpha}{v};$$
$$F = F_{\text{ск}} + F'_{\text{тр}} = mg \sin \alpha + \frac{N \cos \alpha}{v}.$$

Мощность, развиваемая при подъеме,

$$N_1 = Fv = mgv \sin \alpha + N \cos \alpha.$$

При выключенном двигателе сани будут равномерно съезжать вниз при условии равенства нулю суммы сил, действующих на сани, т. е.

$$mg \sin \alpha = \frac{N \cos \alpha}{v},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N}{mgv}.$$

3.97. Копер весом P ударяет по свае, двигаясь со скоростью v в момент удара. Сила сопротивления земли равна Q. Найти глубину проникновения сваи при ударе. Потерями на нагрев пренебречь. Удар считать абсолютно неупругим.

Кинетическая энергия копра равна работе, произведенной при проникновении сваи в землю,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}\right)v^2 = Ql,$$

откуда

$$l = \frac{Pv^2}{2Qg}.$$

3.98. К концам двух тросов длиной l каждый, прикрепленных к верхушке столба, подвешены два одинаковых груза. Тросы с грузами вращаются вокруг столба, образуя карусель. Тросы могут выдержать нагрузку, в n раз превышающую вес груза. Найти максимальную угловую скорость карусели (рис. 118).

Равнодействующая веса груза mg и натяжения троса T во время движения представляет собой центростремительную силу, направленную горизонтально. Эта центростремительная сила равна

$$m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin\alpha = T\sin\alpha.$$

По условию $T = nmg$, поэтому

$$m\omega^2 l \sin\alpha = nmg \sin\alpha,$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{gn}{l}}.$$

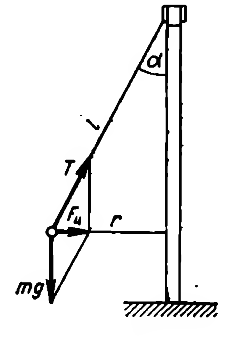


Рис. 118

3.99. Автомобильный двигатель мощностью N сообщает автомашине максимальную скорость v_1 по асфальту. Если его установить на моторной лодке, то максимальная скорость лодки в стоячей воде будет не более v_2. Найти сопротивление движению автомашины по асфальту и сопротивление воды движению лодки.

Сила тяги, развиваемая двигателем,

$$F = \frac{N}{v}.$$

При равномерном движении $F = F_{сопр}$. Поэтому при движении по асфальту

$$F_{сопр} = \frac{N}{v_1},$$

при движении по воде

$$F'_{сопр} = \frac{N}{v_2}.$$

3.100. Электровоз может везти поезд с массой M вверх по уклону α_1 со скоростью v_1 или по уклону α_2 со скоростью v_2. Найти силу сопротивления $F_{\text{сопр}}$.

Мощность электровоза $N = Fv$, где F — сила тяги. При равномерном движении $F = F_{\text{сопр}} + Mg \sin \alpha$. Поэтому

$$N = (Mg \sin \alpha_1 + F_{\text{сопр}}) v_1 = (Mg \sin \alpha_2 + F_{\text{сопр}}) v_2,$$

откуда

$$F_{\text{сопр}} = \frac{Mg (v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2)}{v_2 - v_1}.$$

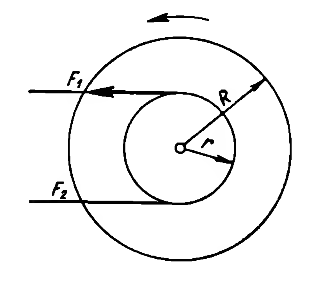


Рис. 119

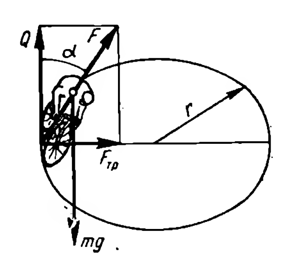


Рис. 120

3.101. Ведущее колесо мотоцикла радиуса R приводится во вращение с помощью цепной передачи. Радиус ведущей шестерни — r. Мотоцикл идет со скоростью v, причем натяжения верхней и нижней частей цепи равны F_1 и F_2 соответственно. Найти мощность мотоцикла (рис. 119).

Угловая скорость колеса $\omega = v/R$. Полезная мощность

$$N = M\omega = (F_1 - F_2) \omega r = (F_1 - F_2) \frac{vr}{R},$$

где $M = Fr$ — вращающий момент. В данном случае $M = (F_1 - F_2) \times r$ — вращающий момент, передаваемый с ведущего колеса на ведомое.

3.102. Два автомобиля с одинаковой массой одновременно стартуют с места и движутся равноускоренно. Первый автомобиль за время t развил скорость, вдвое большую, чем второй. Найти отношение мощностей моторов.

За время t автомобили приобрели энергию:

1-й автомобиль $\dfrac{mv_1^2}{2} = N_1 t;$

2-й автомобиль $\dfrac{mv_2^2}{2} = N_2 t.$

Разделив одно уравнение на другое, найдем

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = 4.$$

3.103. Река, текущая со скоростью v, образует водопад высотой h. Ширина реки выше водопада равна d, средняя глубина — l. Найти максимальную мощность водопада.

Поперечное сечение реки непосредственно выше водопада равно $ld = S$. Масса воды, проходящая за время $t = 1$ с через это сечение, равна $m = \rho l d v = Sv$ (если принять $\rho = 1$). Ее кинетическая энергия на верхнем уровне

$$W_1 = \frac{Svv^2}{2} = \frac{Sv^3}{2}.$$

Следовательно, максимальная мощность водопада

$$W_2 = W_1 + mgh = \frac{mv_1^2}{2},$$

где v_1 можно вычислить по формуле

$$v_1^2 = v^2 + 2gh.$$

Таким образом,

$$W_2 = \frac{Sv}{2}(v^2 + 2gh) = \frac{Sv^3}{2} + Svgh.$$

3.104. Мотоциклист движется по окружности радиуса r. Найти максимальную скорость движения без проскальзывания, если коэффициент трения между колесами и дорогой равен k. Найти также угол наклона мотоциклиста к вертикали при этих условиях (рис. 120).

Если массу системы мотоцикл + водитель обозначить через m, то на эту систему действуют: сила тяжести mg, реакция опоры Q и сила трения $F_{тр}$, являющаяся в данном случае центростремительной силой mv^2/r. Так как $F_{тр} = kQ = kmg$, то максимально допустимую скорость найдем из соотношения:

$$kmg = \frac{mv^2}{r}; \quad v = \sqrt{kgr}.$$

Для того чтобы мотоциклист не упал, равнодействующая $\vec{F} = \vec{Q} + \vec{F}_{тр}$ должна проходить через центр тяжести системы (т. е. момент этой равнодействующей относительно центра тяжести должен равняться нулю). При этом

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{тр}}{Q} = \frac{kQ}{Q} = k.$$

3.105. С наклонной плоскости длиной l и с углом наклона α соскальзывает тело с массой m, после чего проходит некоторое расстояние по горизонтали. Коэффициент трения на всем пути равен k. Найти кинетическую энергию тела у основания наклонной плоскости; скорость тела в той же точке; расстояние, пройденное по горизонтали.

Тело, находящееся на высоте $l \sin\alpha$, обладает потенциальной энергией $mgl \sin\alpha$, переходящей по мере соскальзывания тела в кине-

гическую энергию и работу против сил трения. У основания наклонной плоскости

$$mgl\sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + F_{тр}l.$$

Так как $F_{тр} = kmg\cos\alpha$, то кинетическая энергия тела

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = mgl(\sin\alpha - k\cos\alpha).$$

Отсюда скорость

$$v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - k\cos\alpha)}.$$

Пройденное по горизонтали расстояние S определяется работой против сил трения, т. е.

$$W = kmgS; \quad S = \frac{W_к}{kmg} = \frac{l}{k}(\sin\alpha - k\cos\alpha).$$

3.106. Часть цепочки длиной a лежит на гладком горизонтальном столе, а остальная часть длиной b свисает вниз (рис. 121). Цепочка соскальзывает со стола. Определить, через какое время после того, как вся цепочка примет вертикальное положение, она упадет на пол. Высота стола — H (трением о стол пренебречь).

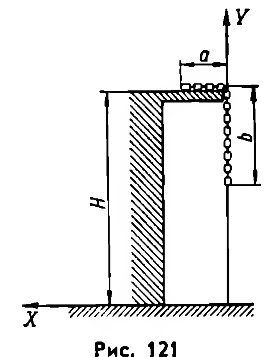


Рис. 121

Выберем систему координат, как показано на рисунке. Координаты центра тяжести всей цепочки в исходном состоянии:

$$x_ц = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m\frac{a}{a+b}\frac{a}{2} + \frac{mb}{a+b}\cdot 0}{\frac{ma}{a+b} + \frac{mb}{a+b}} = \frac{a^2}{2(a+b)};$$

$$y_ц = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\frac{ma}{a+b}H + \frac{mb}{a+b}\left(H - \frac{b}{2}\right)}{\frac{ma}{a+b} + \frac{mb}{a+b}} = H - \frac{b^2}{2(a+b)}.$$

Поскольку свисающая часть b цепочки удлиняется, цепочка будет соскальзывать со стола под действием переменной силы, возрастающей от $mgb/(a+b)$ до mg и приложенной к центру тяжести b (сила тяжести части a уравновешивается реакцией опоры). Благодаря действию этой переменной силы цепочка приобретет переменное ускорение, возрастающее от $gb/(a+b)$ до g.

Эти затруднения мы обойдем следующим образом. Исходная потенциальная энергия цепочки

$$E_1 = mg \cdot y_ц = mg\left[H - \frac{b^2}{2(a+b)}\right].$$

Работа по переносу центра тяжести цепочки на вертикаль падения (ось Y) равна нулю, так как цепочка движется только под действием силы тяжести.

Потенциальная энергия цепочки в момент начала свободного падения

$$E_2 = mg\left(H - \frac{a+b}{2}\right).$$

Разность $E_1 - E_2$ равна кинетической энергии цепочки в момент начала свободного падения

$$mg\left[H - \frac{b^2}{2(a+b)}\right] - mg\left(H - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{ag(a+2b)}{a+b}}.$$

Цепочка упадет на пол тогда, когда ее последнее звено коснется пола. Таким образом, интересующее нас время определяется из соотношения

$$H = vt + \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$t = -\frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}}.$$

Знак минус перед корнем отбрасываем, так как $t > 0$.

Окончательно

$$t = -\sqrt{\frac{a^2+2ab}{g(a+b)}} + \sqrt{\frac{a^2+2ab}{g(a+b)} + \frac{2H}{g}}.$$

3.107. Пуля с массой m, летящая горизонтально, упруго отражается от поверхности клина с массой M и взлетает вертикально вверх на некоторую высоту. Горизонтальная скорость клина после удара равна V. Найти высоту подъема пули.

Согласно законам сохранения энергии и импульса

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + mgh; \quad mv = MV,$$

где v — скорость пули до удара; h — высота подъема пули после удара.

Из второй формулы находим $v = MV/m$ и подставляем в первую, которую разрешаем относительно h:

$$h = \frac{\frac{mv^2}{2} - \frac{MV^2}{2}}{mg} = \frac{\frac{m}{2}\left(\frac{M^2V^2}{m^2}\right) - \frac{MV^2}{2}}{mg} = \frac{MV^2}{2mg}\left(\frac{M}{m} - 1\right).$$

Отметим, что при $M = m$ $h = 0$, т. е. в этом случае пуля передает клину всю свою кинетическую энергию.

3.108. Поезд с массой M и дрезина с массой m движутся с одинаковой скоростью v по параллельным горизонтальным путям. В некоторый момент сила тяги у обоих тел прекращает действовать и они движутся замедленно под действием силы трения. Показать, что если коэффициент трения у обоих тел одинаков, они остановятся в один и тот же момент, пройдя по инерции одинаковые расстояния.

В момент прекращения действия силы тяги кинетическая энергия поезда равна $Mv^2/2$, дрезины — $mv^2/2$. Работа силы трения в случае поезда на пути S_1 равна $kMgS_1$, в случае дрезины на пути S_2 равна $kmgS_2$. По закону сохранения энергии

$$kMgS_1 = \frac{Mv^2}{2}; \quad kmgS_2 = \frac{mv^2}{2}.$$

Из этих уравнений находим

$$S_1 = \frac{v^2}{2kg} = S_2.$$

Отрицательное ускорение в случае поезда

$$a_1 = \frac{F_{тр}}{M} = \frac{kMg}{M} = kg,$$

а в случае дрезины

$$a_2 = \frac{A_{тр}}{m} = \frac{kmg}{m} = kg = a_1.$$

Так как

$$S_1 = v - a_1t_1; \quad S_2 = v - a_2t_2,$$

то, поскольку $S_1 = S_2$ и $a_1 = a_2$, получаем $t_1 = t_2$.

3.109. Небольшое упругое тело соскальзывает с верхней точки полусферы радиуса R и, упруго ударившись о горизонтальную поверхность, подскакивает вверх. Найти высоту точки отрыва тела от полусферы и высоту, на которую подскакивает тело (рис. 122).

При соскальзывании тела на него действует сила тяжести mg и реакция опоры Q, благодаря которым возникает центростремительная сила

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha - Q.$$

В момент отрыва $Q = 0$ и $mg\cos\alpha = mv^2/R$.

По закону сохранения энергии потенциальная энергия тела в верхней точке полусферы равна сумме потенциальной и кинетической энергий в точке отрыва:

$$mgR = mgR\cos\alpha + \frac{mv^2}{2}.$$

Из обоих уравнений находим

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}; \quad v^2 = \frac{2}{3}gR; \quad h = R\cos\alpha = \frac{2}{3}R.$$

После упругого удара о поверхность тело будет снова подниматься вверх. Когда оно будет проходить высоту h, модуль его скорости будет таким же, как и в точке отрыва $\left(|v| = \sqrt{\frac{2gR}{3}}\right)$, а угол, под которым эта скорость направлена к горизонту, также будет равен α, так как горизонтальная составляющая скорости не изменится, а вертикальная изменит направление на противоположное. Согласно задаче 2.28 полная высота подъема будет равна

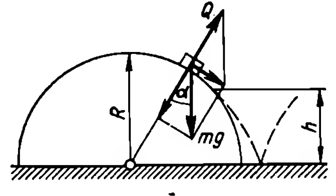


Рис. 122

$$h + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{23}{27}R.$$

3.110. Столб высотой l падает из вертикального положения. Найти скорость верхнего конца при ударе о землю, если нижний конец при падении столба не перемещается.

Потенциальная энергия столба в вертикальном положении равна кинетической энергии при ударе о землю

$$mg\frac{l}{2} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Момент инерции стержня длиной l относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец, равен $ml^2/3$. Положив $\omega = v/l$, находим

$$v = \sqrt{3gl}.$$

3.111. На бросание тела весом mg из точки $x = 0$; $y = 0$ под углом α к горизонту затрачена энергия W. Определить, на каком расстоянии и через сколько времени тело упадет на землю.

Начальная скорость v_0 равна $\sqrt{2W/m}$. Максимальное расстояние (см. задачу 2.28)

$$x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2W}{mg}\sin 2\alpha.$$

Максимальное время полета

$$t_{\text{макс}} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{2}{g}\sqrt{\frac{2W}{m}}\sin\alpha.$$

3.112. Материальная точка с массой m движется по окружности радиуса R с постоянным тангенциальным ускорением. К концу n-го оборота кинетическая энергия точки становится равной W. Найти значение тангенциального ускорения.

К тангенциальной компоненте применимы формулы

$$v = a_t t; \quad S = \frac{a_t t^2}{2},$$

где a_t — тангенциальное ускорение. В данном случае $S = 2\pi R n$. Исключив t, находим (учитывая, что $W = mv^2/2$)

$$a_t = \frac{v^2}{4\pi R n} = \frac{W}{2\pi R n m}.$$

3.113. Найти, во сколько раз уменьшается вес тела на экваторе вследствие суточного вращения Земли и какой продолжительности должны были бы быть сутки на Земле, чтобы тела на экваторе не имели веса?

Согласно задаче 3.90 на тело, находящееся на экваторе, действует центростремительная сила $F_ц$, являющаяся разностью силы притяжения $F = mg$ и силы реакции Q. Так как на экваторе широта $\varphi = 0$, то $\cos\varphi = 1$ и $F_ц = m\omega^2 R$. Относительное изменение веса вследствие вращения

$$\delta = \frac{mg - Q}{mg} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

В обычных условиях угловая скорость Земли $\omega = 1$ об/сут $= 2\pi/24 \cdot 3600$ рад/с, так что $\delta = 0{,}34\%$.

Если же обе силы будут равны, т. е. тела не будут иметь веса, то $\delta = 1$, $\omega = \sqrt{g/R}$ и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3600\sqrt{g/R}} \approx 1 \text{ ч } 25 \text{ мин}.$$

3.114. Небольшое тело соскальзывает вниз по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиуса r (рис. 123, a). С какой высоты H должно начать двигаться тело, чтобы не оторваться от петли в верхней точке траектории?

В верхней точке петли на тело действует центростремительная сила

$$Q + mg = \frac{mv^2}{r},$$

где Q — давление опоры на тело; m — масса тела; v — скорость тела в верхней точке петли.

Потенциальная энергия тела в исходной точке равна mgH.

По закону сохранения энергии в верхней точке петли энергия тела равна

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mg \cdot 2r.$$

Исключая из обоих уравнений v^2, находим

$$Q = mg\left[2\frac{H}{r} - 5\right].$$

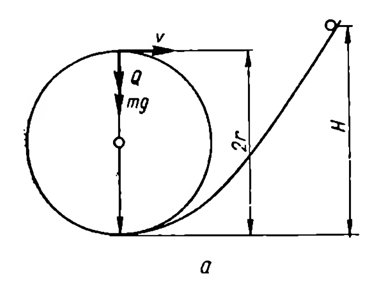
Условие того, что тело не оторвется в верхней точке петли:

$$Q \geqslant 0,$$

откуда следует, что

$$H \geqslant \frac{5}{2} r.$$

3.115. В условиях задачи 3.114 найти силу давления тела с массой m на желоб в точке, определяемой углом α; при каком значении



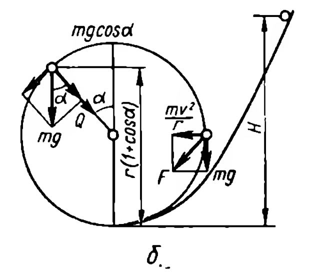


Рис. 123

α произойдет отрыв? Чему равно полное ускорение тела, когда его скорость направлена вертикально?

Как видно из рис. 123, *б*,

$$Q + mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{r};$$

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mgr(1 + \cos\alpha).$$

Исключив v^2, находим

$$Q = mg\left[2\left(\frac{H}{r} - 1\right) - 3\cos\alpha\right].$$

Положив $Q = 0$ (условие отрыва), получим

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}\left(\frac{H}{r} - 1\right).$$

При $\alpha = 0$, как и в предыдущей задаче,

$$H = \frac{5}{2} r.$$

Полная сила, действующая на тело в момент, когда его скорость вертикальна ($\alpha = 90°$), равна

$$F = \sqrt{\left(\frac{mv^2}{r}\right)^2 + (mg)^2} = \sqrt{Q^2 + (mg)^2}.$$

Так как согласно условию $H/r = 5/2$, то при $\alpha = 90°$ для Q получаем выражение $Q = 3mg$ и $F = mg\sqrt{10}$.

Полное ускорение направлено вдоль силы F и его значение равно

$$F/m = g\sqrt{10}.$$

3.116. В условиях задачи 3.115 верхняя часть петли срезана так, как показано на рис. 124. Расстояние $AB = r\sqrt{3}$. Определить, с какой высоты H должно спускаться тело, чтобы из точки A оно перелетело по воздуху в точку B (сопротивлением воздуха пренебречь).

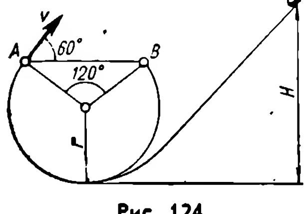


Рис. 124

Для точки A справедлива формула закона сохранения энергии

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mg\cdot\frac{3}{2}r,$$

$$\text{или } v^2 = 2gH - 3gr.$$

Расстояние по горизонтали, пройденное телом, брошенным из точки A под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, равно (см. задачу 2.28)

$$v^2 \sin 2\alpha/g = v^2\sqrt{3}/2g = AB = r\sqrt{3},$$

откуда в точке A $v^2 = 2gr$.

Приравнивая оба выражения для v^2, получим $H = 2{,}5r$, т. е. точно такой же результат, как и в предыдущей задаче.

3.117. Тело с массой m_1 соскальзывает по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиуса r. В низшей точке оно упруго соударяется с покоящимся телом с массой m_2 (рис. 125).

С какой высоты H начинает двигаться первое тело, если после соударения второе тело отрывается от петли на высоте h_0, а первое, поднявшись назад по желобу и затем снова соскальзывая, отрывается в той же точке, что и второе? Каково отношение масс этих тел (трением пренебречь)?

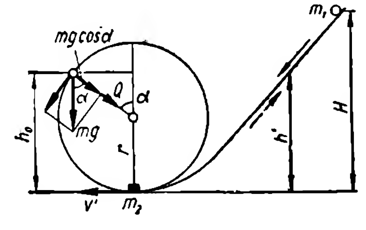


Рис. 125

Как и в задаче 3.115, на тело, движущееся по петле, действуют радиальная составляющая силы тяжести $mg\cos\alpha$ и сила давления Q, сумма которых определяет центростремительное ускорение v^2/r. В момент отрыва от желоба на высоте h_0 сила $Q = 0$ и тогда

$$mg\cos\alpha = mv^2/r,$$

где

$$\cos\alpha = \frac{h_0 - r}{r},$$

т. е. высота отрыва не зависит от массы тела.

Скорость v', которой должно обладать то или иное тело в низшей точке петли, чтобы его отрыв произошел в точке h_0, найдем из закона сохранения энергии

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh_0.$$

Из этих трех уравнений получаем

$$v'^2 = g(3h_0 - r).$$

Двигаясь с высоты H, первое тело перед ударом будет иметь энергию

$$E_1 = \frac{m_1v^2}{2} = m_1gH.$$

Эта энергия, очевидно, равна сумме энергий обоих тел после удара

$$E_1 = E_2 + E',$$

где E' — энергия первого тела, возвращающегося по желобу на некоторую высоту h', которая определяется соотношением $E' = mgh'$.

С этой высоты первое тело начинает снова соскальзывать вниз и для того, чтобы оторваться на высоте h_0, должно в нижней точке иметь такую же скорость, как и тело с массой m_2, т. е. v'. Поэтому энергия первого тела после соударения

$$E' = \frac{m_1v'^2}{2} = \frac{m_1g}{2}(3h_0 - r).$$

Энергия второго тела после соударения

$$E_2 = \frac{m_2}{2}(3gh_0 - gr) = \frac{m_2g}{2}(3h_0 - r).$$

Очевидно, что

$$\frac{E'}{E_2} = \frac{m_1}{m_2}; \quad \frac{E' + E_2}{E_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_2},$$

откуда

$$E_2 = \frac{m_2E_1}{m_1 + m_2}.$$

С другой стороны, при упругом соударении (задача 17.15)

$$E_2 = \frac{4m_1m_2E_1}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Разделив последние два выражения друг на друга, найдем

$$1 = \frac{m_1 + m_2}{4m_1}, \quad \text{или} \quad m_2 = 3m_1.$$

Полная энергия

$$E_1 = E' + E_2 = \frac{m_1 g(3h_0 - r)}{2} + \frac{m_2 g(3h_0 - r)}{2} =$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2} g(3h_0 - r) = m_1 gH,$$

или

$$2m_1 g(3h_0 - r) = m_1 gH,$$

откуда

$$H = 2(3h_0 - r).$$

3.118. Стержень длиной l с массой m вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Найти кинетическую энергию стержня.

Разобьем стержень по длине на большое число n малых отрезков одинаковой длины l/n и одинаковой массы m/n. Будем приближенно считать, что все точки каждого отрезка обладают одинаковыми линейными скоростями. Тогда для k-го отрезка можем написать

$$v_k = \omega k \frac{l}{n}; \quad m_k = \frac{m}{n}.$$

Кинетическая энергия k-го отрезка $E_k = \frac{m_k v_k^2}{2} \approx \frac{m\omega^2 l^2}{2n^3} k^2$.

Кинетическая энергия всего стержня равна сумме энергий отрезков

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k \approx \frac{m\omega^2 l^2}{2n^3} \cdot 1^2 + \frac{m\omega^2 l^2}{2n^3} \cdot 2^2 + \cdots + \frac{m\omega^2 l^2}{2n^3} n^2 =$$

$$= \frac{m\omega^2 l^2}{2n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{m\omega^2 l^2}{2n^3} \; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Если число отрезков будет безгранично возрастать, причем длина каждого из них будет стремиться к нулю, то в пределе получим точное значение энергии

$$E = \lim_{n\to\infty} \frac{m\omega^2 l^2}{12} \; \frac{n^3\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{n^3} = \frac{m\omega^2 l^2}{6}.$$

3.119. Стержень OA жестко скреплен с вертикальной осью OB, вращающейся с угловой скоростью ω (рис. 126). Угол между стержнем и осью равен α. По стержню скользит без трения муфта с массой m, соединенная с точкой O пружиной, длина которой в недеформированном состоянии равна l_0, а жесткость равна k. Найти положение муфты при вращении.

На муфту действуют: сила упругости пружины $F = k(l - l_0) = k\Delta l$; вес муфты mg; реакция стержня Q. Эти силы порождают центростремительную силу, равную их сумме и направленную перпендикулярно оси вращения. В проекциях на вертикаль

$$Q \sin\alpha - mg - k\Delta l \cos\alpha = 0;$$

на горизонталь

$$m\omega^2 r = k\Delta l \sin\alpha + Q\cos\alpha.$$

Замечая, что $\Delta l = l - l_0$ и $r = l\sin\alpha$, находим, исключая из обоих уравнений Q,

$$l = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}.$$

Как видно из формулы, муфта будет находиться в равновесии лишь в том случае, если выполняются условия:

а) $k > m\omega^2\sin^2\alpha$ или $\omega < \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}$, так как уже при $k = m\omega^2\sin^2\alpha$ пружина будет безостановочно растягиваться, пока не разорвется $(l \to \infty)$;

б) $l - l_0 > 0$ или $\omega > \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{l}}$.

При невыполнении этого условия пружина растягиваться практически не будет, ибо сила, растягивающая пружину, будет полностью компенсироваться слагающей силы тяжести вдоль стержня ($mg\cos\alpha$).

3.120. Мотоциклист въезжает на «мертвую петлю» радиусом R. Масса мотоцикла вместе с мотоциклистом — M, масса обоих колес (сосредоточенная в ободьях) — m. Найти, с какой минимальной скоростью мотоциклист должен въехать на петлю, чтобы не сорваться вниз.

Обозначим скорость в нижней точке петли через v_0, в верхней — через v, угловые скорости колес в тех же точках — через ω_0 и ω соответственно.

Кинетическая энергия мотоцикла с мотоциклистом в нижней точке петли равна

$$\frac{Mv_0^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

Рис. 126

где J — момент инерции колеса, равный mr^2.

В верхней точке петли потенциальная энергия мотоцикла с мотоциклистом равна $Mg\cdot 2R$, а кинетическая — $Mv^2/2 + J\omega^2/2$. По закону сохранения энергии

$$\frac{Mv_0^2}{2} + \frac{J\omega_0^2}{2} = 2MgR + \frac{Mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

В верхней точке траектории должно выполняться условие

$$\frac{Mv^2}{R} = Mg.$$

Так как $\omega_0 = v_0/r$, $\omega = v/r$, где r — радиус колеса, находим после преобразований

$$v_0 = \sqrt{\frac{(5M + m)gR}{M + m}}.$$

3.121. Маховик радиусом R, масса M которого равномерно распределена по ободу, вращается с угловой скоростью ω. В некоторый момент времени к ободу с силой F прижимается тормозная колодка, причем коэффициент трения между ободом и колодкой равен k. Найти время торможения и число оборотов маховика до остановки (рис. 127).

Маховик движется равнозамедленно под действием силы трения колодки. Для точки на ободе можно написать

$$v_t = v_0 - at = 0,$$

где v_t — линейная скорость точки.

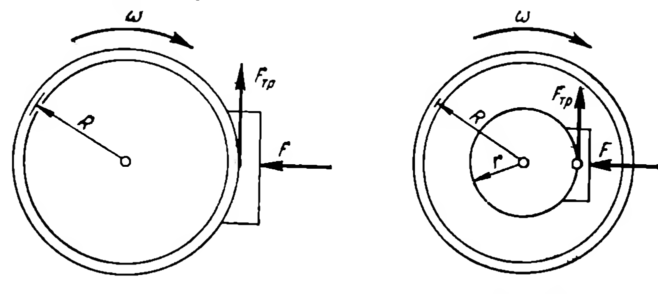


Рис. 127 Рис. 128

Ускорение a вызывается силой трения

$$F_{тр} = kF = Ma.$$

Из этих формул, а также учитывая, что $v_t = \omega R$, находим

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{\omega RM}{kF}.$$

За время t число оборотов точки маховика составит

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\omega t - \frac{\varepsilon t^2}{2}\right),$$

где ε — касательное угловое ускорение точки, равное в данном случае ω/t, откуда

$$n = \frac{1}{2\pi}\left(\omega t - \frac{\omega t}{2}\right) = \frac{\omega t}{4\pi} = \frac{\omega^2 RM}{4\pi kF}.$$

3.122. Маховик радиусом R, масса M которого равномерно распределена по ободу, снабжен тормозным барабаном радиусом r и вращается с угловой скоростью ω. В некоторый момент времени к тормозному барабану прижимается с силой F тормозная колодка (коэффициент трения между колодкой и барабаном равен k). Найти время торможения и число оборотов до полной остановки (рис. 128).

Сила трения, как и в предыдущей задаче, равна

$$F_{тр} = kF.$$

Тормозящий момент

$$N_r = F_{тр} r = kFr.$$

Этот тормозящий момент эквивалентен тормозящему моменту N_R, приложенному к ободу и равному

$$N_R = kF'R.$$

Отсюда находим эквивалентную силу F', приложенную к ободу,

$$F' = \frac{Fr}{R},$$

и затем пользуемся результатами предыдущей задачи, подставляя вместо силы значение Fr/R, откуда имеем

$$t = \frac{\omega R^2 M}{kFr}; \quad nt = \frac{\omega^2 R^2 M}{4\pi kFr}.$$

3.123. Диск с массой m и радиусом R сидит на одном валу со шкивом радиусом r. К шкиву по касательной приложена постоянная сила F. Найти, через сколько времени после начала вращения маховик достигнет скорости ω.

Под действием постоянного момента $M = Fr$ диск вращается равноускоренно. Угол поворота $\varphi = \varepsilon t^2/2$, угловая скорость $\omega = \varepsilon t$, так что

$$\varphi = \frac{\omega t}{2}.$$

Работа, совершенная при вращении,

$$A = M\varphi = Fr\varphi = Fr\frac{\omega t}{2}.$$

При этом энергия, приобретенная диском,

$$W_к = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{4}.$$

Так как $A = W_к$, то

$$Fr\frac{\omega}{2}t = \frac{mR^2\omega^2}{4},$$

откуда

$$t = \frac{mR^2\omega}{2Fr}.$$

3.124. К верхнему концу O вертикальной оси шарнирно прикреплен невесомый стержень. На стержне укреплены два груза весом P_1 и P_2 на расстояниях a и b от точки O. Вся система равномерно вращается с угловой скоростью ω (рис. 129). Найти угол отклонения стержня от вертикали.

Так как оба груза движутся по окружностям, радиусы которых равны $r_1 = a \sin \varphi$ и $r_2 = b \sin \varphi$, то центростремительные силы, действующие на грузы, равны соответственно

$$F_1 = \frac{P_1}{g} \omega^2 a \sin \varphi; \quad F_2 = \frac{P_2}{g} \omega^2 b \sin \varphi.$$

С другой стороны, при равномерном вращении системы сумма приложенных к ней моментов равна нулю. Сумма моментов относительно точки O запишется, как

$$P_1 r_1 + P_2 r_2 - F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0$$

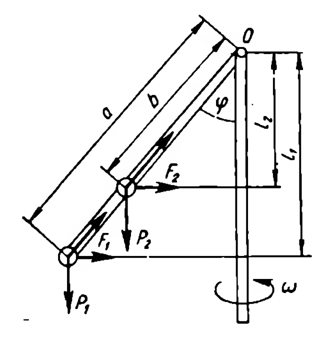


Рис. 129

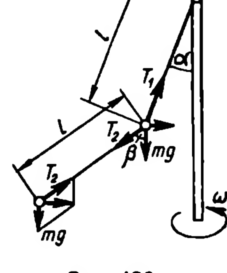


Рис. 130

или

$$P_1 a \sin \varphi + P_2 b \sin \varphi = \frac{P_1}{g} \omega^2 a^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{P_2}{g} \omega^2 b^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{g (P_1 a + P_2 b)}{\omega^2 (P_1 a^2 + P_2 b^2)}.$$

3.125. К верхнему концу вертикальной оси прикреплена нерастяжимая нить длиной l, на конце которой находится груз с массой m. К этому грузу прикреплена вторая нить такой же длины, на свободном конце которой подвешен второй груз также с массой m. Ось вращается с постоянной угловой скоростью ω. Показать, что угол между вертикалью и первой нитью меньше, чем угол между вертикалью и второй нитью (рис. 130).

В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

для первого груза

$$T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta = m\omega^2 l \sin \alpha;$$
$$T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta - mg = 0;$$

для второго груза

$$m\omega^2 l (\sin \alpha + \sin \beta) = T_2 \sin \beta;$$
$$T_2 \cos \beta - mg = 0.$$

Исключив из этих уравнений T_1 и T_2, получим

$$a \sin \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta;$$

$$a (\sin \alpha + \sin \beta) = \operatorname{tg} \beta; \quad a = \frac{\omega^2 l}{g}.$$

Отсюда вытекает, что

$$2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \beta$$

и, следовательно,

$$\alpha < \beta.$$

3.126. Диск весом M катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v. Найти кинетическую энергию диска.

Кинетическая энергия диска складывается из кинетических энергий поступательного и вращательного движений, т. е.

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Для диска $J = mR^2/2$; $\omega = v/R$; отсюда

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2}{2} \frac{v^2}{2R^2} = \frac{3mv^2}{4} = \frac{3Mv^2}{4g}.$$

3.127. Шар диаметром D катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая n об/с. Масса шара равна m. Найти кинетическую энергию шара.

Кинетическая энергия шара

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Для шара $J = 2mR^2/5$; $\omega = v/R = 2\pi n$;

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5} mR^2 \frac{v^2}{2R^2} = 0{,}7mv^2 = 0{,}7\pi^2 n^2 D^2 m.$$

3.128. С верхнего уровня наклонной плоскости одновременно начинают скатываться без скольжения сплошные цилиндр и шар с одинаковой массой и одинаковыми радиусами. Найти отношение скоростей этих тел на некотором данном уровне.

В силу равенства масс и высот начальные потенциальные энергии обоих тел одинаковы. Если тела скатились без скольжения до одного и того же уровня, то они приобрели одинаковую кинетическую энергию. Для каждого из тел кинетическая энергия

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_0\omega^2}{2},$$

где J_0 — момент инерции относительно оси, проходящей через центр массы тела.

Для цилиндра $J_{0ц} = 0{,}5mR^2$; для шара $J_{0ш} = 0{,}4mR^2$; $\omega = v/R$. Таким образом,

$$\frac{mv_ц^2}{2} + \frac{mR^2}{2} \frac{v_ц^2}{2R^2} = \frac{mv_ш^2}{2} + \frac{2mR^2}{5} \frac{v_ш^2}{2R^2},$$

или

$$1{,}5\frac{mv_ц^2}{2} = 1{,}4\frac{mv_ш^2}{2},$$

откуда

$$\frac{v_ц}{v_ш} = \sqrt{\frac{14}{15}}.$$

Следовательно, на данном уровне скорость шара больше скорости цилиндра.

3.129. С наклонной плоскости с углом наклона α скатываются без скольжения шар, диск и обруч. Одновременно по той же плоскости соскальзывает без трения некоторое тело. Найти линейные ускорения центров тяжести всех тел. Начальные скорости равны нулю.

Если тело совершает поступательное и вращательное движения одновременно, то его кинетическая энергия

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где m — масса тела; v — линейная скорость центра тяжести тела; J — момент инерции; ω — угловая скорость вращения.

В начале движения тело имело потенциальную энергию

$$W_1 = mgh,$$

причем

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + J/R^2}}.$$

Так как высота наклонной плоскости $h = l\sin\alpha$ и $\omega = \frac{v}{R}$, то

$$mgl\sin\alpha = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{J}{R^2}\right).$$

Все тела движутся равноускоренно вниз по плоскости, так что

$$l = \frac{at^2}{2} \text{ и } v = at.$$

Учитывая эти формулы, получаем

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + J/R^2}.$$

Моменты инерции:

шара $J_ш = \frac{2}{5}mR^2$;

диска $J_д = \frac{mR^2}{2}$;

обруча $J_о = mR^2$.

Подставляя значения моментов инерции в выражение для a, находим:

для шара $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$;

для диска $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$;

для обруча $a = \frac{1}{2} g \sin \alpha$.

Для соскальзывающего тела $J = 0$, следовательно,

$$a = g \sin \alpha.$$

3.130. Два груза весом P_1 и P_2 подвешены к концам невесомой нити, перекинутой через блок с массой m и радиусом R. Блок имеет форму диска. Найти ускорение, с которым движутся грузы, и натяжения нитей T_1 и T_2 с обеих сторон блока.

Для определенности будем считать, что груз P_1 движется вниз. Для грузов P_1 и P_2 согласно второму закону Ньютона имеем

$$m_1 g - T_1 = m_1 a;$$
$$m_2 g - T_2 = -m_2 a.$$

Натяжение нити с разных сторон блока неодинаково. Разность этих натяжений $T_1 - T_2$ создает вращающий момент $(T_1 - T_2) R$, под действием которого блок вращается. Вращательное движение блока подчиняется второму закону Ньютона для вращающихся тел

$$M = J\varepsilon,$$

где J — момент инерции диска, равный $mR^2/2$; ε — угловое ускорение, равное a/R.

В данном случае

$$(T_1 - T_2) R = \frac{mR^2}{2} \frac{a}{R} = \frac{mRa}{2}.$$

Из этих уравнений находим

$$a = g \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2 + \frac{mg}{2}};$$

$$T_1 = \frac{P_1 \left(2P_2 + \frac{mg}{2}\right)}{P_1 + P_2 + \frac{mg}{2}};$$

$$T_2 = \frac{P_2 \left(2P_1 + \frac{mg}{2}\right)}{P_1 + P_2 + \frac{mg}{2}}.$$

3.131. Два различных груза подвешены на невесомой нити, перекинутой через дисковый блок радиуса R, момент инерции которого равен J. Блок вращается с трением, причем момент силы трения равен $M_{тр}$, и постоянным угловым ускорением ε. Найти разность натяжений нити с обеих сторон блока.

Согласно второму закону Ньютона для вращающегося тела

$$M = (T_1 - T_2) R = J\varepsilon + M_{тр}.$$

Отсюда

$$T_1 - T_2 = \frac{J\varepsilon + M_{тр}}{R}.$$

3.132. Круглая горизонтальная платформа с массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_1. Человек с массой m_2 стоит на краю платформы. Какова будет скорость платформы, если человек перейдет в центр платформы?

По закону сохранения момента количества движения

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где J_1 — момент инерции платформы с человеком на краю; J_2 — момент инерции системы, когда человек находится в центре.

Так как

$$J_1 = \frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2; \quad J_2 = \frac{m_1R^2}{2},$$

то

$$\left(\frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2\right)\omega_1 = \frac{m_1R^2}{2}\omega_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \left(1 + \frac{2m_2}{m_1}\right)\omega_1.$$

3.133. Шар с массой m, катящийся по горизонтальной плоскости со скоростью v_1, ударяется о стенку и откатывается со скоростью v_2. Найти уменьшение кинетической энергии шара и относительную ошибку, которая получится, если при вычислении кинетической энергии шара не учитывать его вращения.

Кинетическая энергия шара слагается из энергии поступательного движения и энергии вращения. Поэтому уменьшение энергии

$$\Delta W_к = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} - \left(\frac{mv_1^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2}\right).$$

Так как в случае шара $J = \frac{2}{5}mR^2$ и, кроме того, $\omega^2 = v^2/R^2$, то

$$\Delta W_к = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2\frac{v^2}{2R^2} - \left(\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{5}\right) = 0{,}7m\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Относительная ошибка составит

$$\frac{J\omega_1^2}{mv^2/2}100 = 40\%.$$

3.134. Найти момент количества движения Земли относительно оси вращения (собственный момент) и энергию ее вращения.

Момент количества движения шара относительно оси вращения, проходящей через его центр, равен

$$M = J\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega,$$

где J — момент инерции шара, равный $\frac{2}{5}mr^2$ (r — радиус шара).

Энергия вращения

$$W = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{2}{5}mr^2\frac{\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{5},$$

где v — линейная скорость точек экватора.

При $m = 6 \cdot 10^{24}$ кг, $v = 4 \cdot 10^7/24 \cdot 3600$ м/с $W \approx 26 \cdot 10^{28}$ Дж.

3.135. n тел с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ находится соответственно на высотах $h_1, h_2, \ldots, h_n$ от поверхности Земли. Найти потенциальную энергию центра инерции этой системы.

Потенциальная энергия всех тел равна

$$m_1gh_1 + m_2gh_2 + \cdots + m_ngh_n.$$

Вертикальная координата центра инерции

$$h_ц = \frac{m_1h_1 + m_2h_2 + \cdots + m_nh_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Потенциальная энергия центра инерции равна

$$m_1gh_1 + m_2gh_2 + \cdots + m_ngh_n = g(m_1h_1 + m_2h_2 + \cdots + m_nh_n) =$$
$$= g\frac{(m_1h_1 + m_2h_2 + \cdots + m_nh_n)(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = Mgh_ц;$$
$$M = \sum m_i.$$

3.136. Тело с массой m движется под действием постоянной силы F. Найти зависимость кинетической энергии тела от времени движения t и от пройденного пути S. Начальная скорость равна нулю.

С помощью формул

$$E_к = \frac{mv^2}{2}; \quad v = at; \quad mv = Ft; \quad a = \frac{F}{m}; \quad S = \frac{at^2}{2}$$

находим

$$E_к = \frac{F^2t^2}{2m} \text{ и } E_к = FS,$$

т. е. $E_к$ зависит от времени квадратично и возрастает линейно с расстоянием (при постоянных F и m).

3.137. Груз весом P подвешен на жестком невесомом стержне, шарнирно укрепленном за верхний конец (рис. 131). Стержень с грузом отводится в сторону на угол α_0 от вертикали, а затем отпускается. Найти натяжение стержня в функции угла α.

Совместное действие силы тяжести и натяжения стержня приводит к возникновению центростремительной силы.

В проекции на направление стержня

$$T - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{l}.$$

Из рисунка видно, что

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h_0 - h) = mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Из обоих уравнений находим

$$T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0).$$

3.138. В условиях предыдущей задачи даны длина стержня l и начальный угол отклонения α_0. Найти зависимость угловой скорости стержня от переменного угла α.

Из закона сохранения энергии вытекает, что

$$mgh_0 = mgh + \frac{mv^2}{2},$$

где v — линейная скорость груза на высоте h.

Так как $|h_0 - h| = l(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$ и $v = \omega l$, то

$$g|h_0 - h| = gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = \frac{\omega^2 l^2}{2},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{l}}.$$

Рис. 131

3.139. Нить длиной l при растяжении ее на $a\%$ разрывается под действием упругой силы F. На эту нить подвешен груз m. Найти, на какую минимальную высоту следует поднять груз m, чтобы он, падая, разорвал нить.

Работа, затраченная на растяжение нити (вплоть до разрыва), при упругой деформации равна

$$A = \frac{FS}{2},$$

где $S = al/100$.

По закону сохранения энергии

$$mgh_{\text{мин}} = A = \frac{Fal}{2 \cdot 100},$$

откуда

$$h_{\text{мин}} = \frac{Fal}{200mg}.$$

3.140. Легкий шарик из материала, плотность которого равна ρ_1, падает с высоты h на жидкость с плотностью ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$. Найти глубину и время погружения шарика в жидкость.

Обозначим глубину погружения через h_1. Изменение механической энергии шарика затрачивается на работу против архимедовой силы выталкивания F_A: $mg(h+h_1) = F_A h_1$, где $F_A = v\rho_2 g = \frac{mg}{\rho_1}\rho_2$; V — объем шара; m — его масса. Из этих двух уравнений находим

$$h_1 = \frac{h\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Время t можно определить из соотношения $Ft = mv$:

$$(F_A - mg)\,t = m\sqrt{2gh},$$

откуда

$$t = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3.141. По наклонной плоскости с углом наклона α соскальзывает упругое тело, которое в конце спуска упруго ударяется о стенку, перпендикулярную к наклонной плоскости, и снова поднимается по плоскости на некоторую высоту h. Коэффициент трения между телом и плоскостью — k. Найти первоначальную высоту H, с которой начало соскальзывать тело (рис. 132).

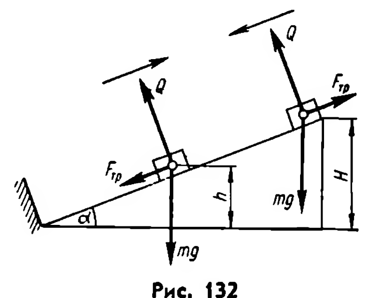


Рис. 132

По закону сохранения энергии потенциальная энергия тела, равная mgH, частично расходуется на работу преодоления сил трения при спуске и частично — на работу по подъему тела на высоту h (также с учетом сил трения):

$$mgH = F_{\text{тр}}\frac{H}{\sin\alpha} + F_{\text{тр}}\frac{h}{\sin\alpha} + mgh;$$

$$F_{\text{тр}} = kmg\cos\alpha.$$

Из этих уравнений находим

$$H = h\,\frac{1 + k\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1 - k\,\mathrm{ctg}\,\alpha}; \quad k < \mathrm{tg}\,\alpha.$$

3.142. С высоты H падает тело весом P. Найти кинетическую и потенциальную энергии тела в произвольной точке с ординатой y.

Введем вертикальную ось координат Y с положительным направ-

лением вверх. Тогда, пользуясь формулой $v^2 = 2g(H - y)$, найдем, что

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = P(H - y); \quad W_п = Py.$$

3.143. Из точки с координатами 0, 0 брошено тело с массой m под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти кинетическую и потенциальную энергии тела в момент t и в наивысшей точке траектории.

Скорость тела в момент t (см. задачу 2.28) определяется по формуле

$$v^2 = v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2t^2.$$

В этот момент кинетическая энергия тела

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v_0^2 - 2v_0^2 gt \sin\alpha + g^2t^2\right).$$

Высота подъема тела в момент t определится из выражения

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту y,

$$W_п = mgy = mg\left(v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right).$$

В точке, где $t = v_0 \sin\alpha / g$ (см. задачу 2.28), $y = y_{макс} = v_0^2 \sin^2\alpha / 2g$. В этой точке

$$W_к = \frac{mv_0^2}{2}\cos^2\alpha;$$

$$W_п = \frac{mv_0^2}{2}\sin^2\alpha.$$

Если тело брошено вертикально вверх, то $\alpha = 90°$ и в наивысшей точке $W_к = 0$, $W_п = mgy_{макс} = \frac{mv_0^2}{2}$, т. е. вся кинетическая энергия, первоначально приобретенная телом, перейдет в потенциальную.

3.144. Теннисный мяч, летящий со скоростью v_1, отброшен ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью v_2. При этом его кинетическая энергия изменилась на ΔW. Найти изменение количества движения мяча.

Изменение кинетической энергии мяча

$$\Delta W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда

$$m = \frac{2\Delta W}{v_2^2 - v_1^2},$$

Изменение количества движения равно

$$m(v_2 + v_1) = \frac{2\Delta W}{v_2 - v_1}.$$

3.145. Вес автомобиля равен P, сила трения в тормозных колодках колес равна F. Водитель начинает тормозить машину на расстоянии l от препятствия. Какой должна быть максимальная скорость машины, чтобы она остановилась перед препятствием (трение колес о землю не учитывать)?

Кинетическая энергия машины равна $Pv^2/2g$. Работа тормозящей силы на пути l равна Fl. Очевидно, что

$$\frac{Pv^2}{2g} = Fl; \quad v_{макс} = \sqrt{\frac{2gFl}{P}}.$$

3.146. Средняя мощность двигателя автомобиля равна N и средняя скорость автомобиля на пути S равна v. Найти расход бензина на пути S, если к. п. д. двигателя равен η; теплотворная способность бензина — q.

Работа двигателя, совершенная при перемещении автомобиля на расстояние S, равна

$$A = \frac{Nt}{\eta} = \frac{NS}{\eta v}.$$

Расход бензина для совершения этой работы равен

$$\frac{A}{q} = \frac{NS}{q\eta v}.$$

3.147. Три одинаковых упругих шара висят, касаясь друг друга, на трех параллельных нитях одинаковой длины. Один из шаров отклоняют в направлении, перпендикулярном прямой, соединяющей центры двух других шаров, и отпускают, благодаря чему этот шар со скоростью v одновременно ударяет оба неподвижных шара. Найти скорости ударяемых шаров (рис. 133).

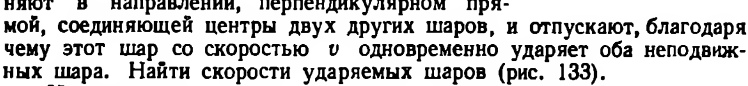


Рис. 133

Из симметрии задачи заключаем, что скорости обоих ударяемых шаров после удара u_2 и u_3 одинаковы по модулю и симметричны по направлению относительно v. По закону сохранения количества движения в векторной форме

$$m\vec{v} = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 + m\vec{u}_3,$$

или

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

Направим оси координат вдоль скорости шара $\vec{u}_1$ и перпендикулярно к ней и спроектируем вышенаписанное уравнение на ось X:

$$u_{2x} - u_{3x} = 0.$$

Так как $u_2 = u_3$, то проекция на ось Y

$$v = 2u_2 \cos\alpha - u_1.$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = 2\frac{mu_2^2}{2} + \frac{mu_1^2}{2}.$$

Решая совместно эти уравнения, находим

$$v = 2u_2 \cos\alpha - u_1;$$
$$v^2 = 2u_2^2 + u_1^2$$

или

$$v + u_1 = 2u_2 \cos\alpha;$$
$$(v + u_1)(v - u_1) = 2u_2^2.$$

Разделив последнее уравнение на предпоследнее, получаем

$$v - u_1 = \frac{u_2}{\cos\alpha},$$

откуда

$$u_1 = \frac{v\cos\alpha - u_2}{\cos\alpha}.$$

Выше мы имели

$$u_1 = 2u_2 \cos\alpha - v.$$

Приравняв последние два выражения, найдем

$$u_2 = \frac{2v\cos\alpha}{2\cos^2\alpha + 1} = u_3$$

и затем

$$u_1 = v\frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\cos^2\alpha + 1}.$$

3.148. Шар с массой m_1, движущийся со скоростью v_1, испытывает центральное упругое соударение с шаром с массой m_2, движущимся навстречу со скоростью v_2. Найти скорости u_1 и u_2 обоих шаров после соударения.

Пусть направление скорости v_1 — положительное. Согласно законам сохранения энергии и импульса

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2};$$
$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

Направления скоростей u_1 и u_2 пока неизвестны. Поэтому мы их берем со знаком (+), так как истинные знаки выяснятся позже. Перепишем оба выражения следующим образом:

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2);$$
$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 + v_2). \qquad (*)$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$v_1 + u_1 = u_2 - v_2.$$

Умножим результат деления сначала на m_1, затем на m_2. При этом получим

$$m_1 v_1 + m_1 u_1 = m_1 u_2 - m_1 v_2;$$
$$m_2 v_1 + m_2 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2.$$

Сложив каждое из этих равенств с равенством (*), найдем

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$
$$u_2 = \frac{(m_1 - m_2)\,v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Если шар с массой m_2 двигается в том же направлении, что и шар с массой m_1 (т. е. шар m_1 догоняет шар m_2), знак скорости v_2 следует изменить на обратный.

Заметим, что если массы шаров равны, то после удара они просто обменяются скоростями. Так, если один из них до удара был неподвижен, то после удара неподвижным станет второй шар, а первый приобретает импульс второго.

Полезно иметь в виду, что найденные выражения позволяют легко найти кинетическую энергию каждого из шаров после соударения.

3.149. Шар с массой m_1, движущийся со скоростью $\vec{v}_1$, испытывает упругое соударение с шаром с массой m_2, движущимся со скоростью $\vec{v}_2$ под углом α к траектории первого шара. После соударения второй шар отклонился на угол β_2 по отношению к исходной траектории первого шара, а его скорость стала равной $\vec{u}_2$. Найти величину и направление скорости первого шара после удара.

Запишем закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2.$$

В проекциях на координатные оси:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\alpha = m_1 u_1 \cos\beta_1 + m_2 u_2 \cos\beta_2;$$
$$m_2 v_2 \sin\alpha = m_1 u_1 \sin\beta_1 + m_2 u_2 \sin\beta_2$$

или

$$m_1 u_1 \cos\beta_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\alpha - m_2 u_2 \cos\beta_2;$$
$$m_1 u_1 \sin\beta_1 = m_2 v_2 \sin\alpha - m_2 u_2 \sin\beta_2,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{m_2\,(v_2 \sin\alpha - u_2 \sin\beta_2)}{m_1 v_1 + m_2\,(v_2 \cos\alpha - u_2 \cos\beta_2)}.$$

Возведя эти же два уравнения в квадрат и сложив, получим (после деления на m_1^2)

$$u_1 = \left[v_1^2 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \left(v_2^2 + u_2^2\right) - 2\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2 u_2 \cos(\alpha - \beta_2) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{m_2 v_1}{m_1}(v_2 \cos\alpha - u_2 \cos\beta_2)\right]^{1/2}.$$

3.150. Шар с массой m, движущийся со скоростью $\vec{v}_1$, испытывает упругое соударение с шаром с такой же массой, движущимся со скоростью $\vec{v}_2$ под углом α к направлению $\vec{v}_1$. Скорости шаров после удара равны $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Найти угол разлета шаров β (между направлениями скоростей $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$).

Согласно законам сохранения энергии и импульса

$$\frac{m}{2}\left(v_1^2 + v_2^2\right) = \frac{m}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right);$$

$$m\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) = m\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right).$$

Из второго уравнения следует, что диагональ векторного параллелограмма, построенного на скоростях $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (до удара), равна диагонали векторного параллелограмма, построенного на скоростях $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ (после удара). Поэтому можно записать

$$v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(180^\circ - \alpha) = u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2 \cos(180^\circ - \beta).$$

Учитывая первое уравнение сохранения, согласно которому

$$v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2,$$

находим, что

$$v_1 v_2 \cos(180^\circ - \alpha) = u_1 u_2 \cos(180^\circ - \alpha),$$

откуда

$$\cos\beta = \frac{v_1 v_2 \cos\alpha}{u_1 u_2}.$$

3.151. Тело с массой m_1, движущееся со скоростью v_1, испытывает центральное неупругое соударение с телом с массой m_2, движущимся со скоростью v_2: а) навстречу; б) попутно. Найти скорость суммарной массы $m_1 + m_2$ после соударения и количество теплоты, выделившееся при ударе.

Закон сохранения импульса в векторной форме

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

а)

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Кинетическая энергия системы из двух тел после удара

$$W_к = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Разность кинетических энергий до и после удара

$$\Delta W = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1m_2(v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

б)

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

$$\Delta W = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Переход от формул а) к формулам б) осуществляется путем замены v_2 на $-v_2$.

3.152. Тело с массой m_1, движущееся со скоростью v_1, упруго ударяется о стенку с массой m_2 $(m_2 \gg m_1)$, движущуюся в ту же сторону со скоростью v_2 $(v_1 > v_2)$. Найти изменение кинетической энергии и импульса тела.

Согласно задаче 3.148 скорости тела и стенки после упругого столкновения равны

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Преобразуем эти выражения следующим образом:

$$u_1 = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)v_1 + 2v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1}; \quad u_2 = \frac{\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)v_2 + 2\frac{m_1}{m_2}v_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}.$$

Поскольку $m_2 \gg m_1$, то для упрощения результата потребуем, чтобы m_2 стремилась к бесконечности. Тогда в пределе выражения для u_1 и u_2 (при $m_2 \to \infty$) примут вид

$$u_1 = 2v_2 - v_1; \quad u_2 = v_2.$$

Изменение кинетической энергии тела

$$\Delta W = \frac{m_1u_1^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2} = 2m_1v_2(v_2 - v_1).$$

Изменение импульса тела

$$\Delta p = m_1u_1 - m_1v_1 = 2m_1(v_2 - v_1).$$

Соответственное приращение кинетической энергии стенки $\Delta W = 2m_1v_2(v_2 - v_1)$ почти не изменяет ее скорости.

Действительно, при $m_2 \gg m_1$ находим

$$u_2^2 = v_2^2 + \frac{2\Delta W}{m_2} \approx v_2^2.$$

Это соответствует сделанному выше выводу, что $u_1 = u_2$ при $m_2 \to \infty$.

3.153. Тело с массой m_1, движущееся со скоростью $\vec{v}_1$, испытывает неупругое соударение с телом с массой m_2, движущимся со скоростью $\vec{v}_2$. Угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ до удара равен α. Найти скорость суммарной массы $m_1 + m_2$ после соударения и количество теплоты, выделившееся при ударе.

Согласно законам сохранения количества движения и энергии

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u};$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + Q.$$

Из векторного треугольника находим

$$[(m_1 + m_2)u]^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos(180° - \alpha),$$

откуда

$$u = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha}}{m_1 + m_2}.$$

Подставляем u^2 в выражение закона сохранения энергии

$$Q = \frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha)}{2(m_1 + m_2)}.$$

3.154. Горизонтально летящая пуля с массой m пробивает лежащий на полу деревянный куб с массой M. Пробитое отверстие проходит через центр куба. Скорость пули до удара — v_1, после вылета из куба — v_2. Найти часть энергии, перешедшую в тепло (трением куба о пол пренебречь).

Энергия пули до удара $E_1 = mv_1^2/2$.

Энергия пули после вылета $E_2 = mv_2^2/2$.

Скорость куба $v_к$ после удара определяется из закона сохранения импульса

$$mv_1 = mv_2 + Mv_к,$$

откуда

$$v_к = \frac{m(v_1 - v_2)}{M}.$$

Энергия куба после удара

$$E_к = \frac{Mv_к^2}{2} = \frac{m^2(v_1 - v_2)^2}{2M}.$$

По закону сохранения энергии доля энергии, перешедшая в тепло, равна

$$E_1 - E_2 - E_к = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) - \frac{m^2}{2M}(v_1 - v_2)^2.$$

3.155. Маятник с периодом колебаний T_0 висит в кабине лифта, движущегося вверх с постоянным ускорением a. Найти, как изменится период колебаний (см. задачу 3.1).

Так как лифт, движущийся с ускорением, представляет собой неинерциальную систему, то заменив g на $g+a$, получим для отношения периодов колебаний выражение

$$\frac{T_0}{T} = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{2\pi\sqrt{l/(g+a)}} = \sqrt{\frac{g+a}{g}}.$$

3.156. Найти минимальную скорость математического маятника в низшей точке, при которой он сможет совершить полный оборот в вертикальной плоскости. Рассмотреть два случая: 1) маятник подвешен на невесомом прямом стержне; 2) маятник подвешен на нерастяжимой нити.

1) Скорость маятника в высшей точке траектории может быть равна нулю и по закону сохранения энергии в этой точке

$$\frac{mv^2}{2} = mg2l,$$

где l — длина подвеса.

Отсюда

$$v = \sqrt{4gl}.$$

2) В высшей точке траектории маятник должен иметь конечную скорость, так как на нить должна действовать сила натяжения mv_1^2/l, где v_1 — линейная скорость маятника в верхней точке. Натяжение должно быть не менее mg, так что в предельном случае $mv_1^2/l = mg$.

Полная энергия маятника в верхней точке траектории в этом случае равна (учитывая предыдущее соотношение)

$$\frac{mv^2}{2} = 2mgl + \frac{mv_1^2}{2} = 2mgl + \frac{1}{2}mgl = \frac{5}{2}mgl.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{5gl}.$$

3.157. Математический маятник с массой m, движущийся в вертикальной плоскости, установлен в лифте, который движется вниз с ускорением $2g$. В наинизшем положении маятника натяжение нити равно нулю. Найти натяжение в наивысшем положении.

Как было показано в задаче 3.1, при ускорении лифта, равном $2g$ и направленном вниз, пол и потолок «меняются местами» и поэтому в наивысшем положении натяжение нити будет определяться, с одной стороны, скоростью маятника в этой точке $v = \sqrt{5gl}$ (см. предыдущую задачу), а с другой — дополнительным «весом» mg, направленным

к потолку лифта. Натяжение, возникающее благодаря скорости $\sqrt{5gl}$ в верхней точке, равно $mv^2/l = 5mg$. Общее натяжение

$$Q = 5mg + mg = 6mg.$$

3.158. Как меняется период колебаний математического маятника, если его поднять на высоту H или опустить на глубину h по отношению к поверхности Земли?

Ускорение свободного падения на высоте H (см. задачи 3.176 и 3.178)

$$g' = \frac{gR^2}{(R+H)^2},$$

а на глубине h

$$g'' = \frac{g(R-h)}{R}.$$

Поэтому период колебаний маятника на высоте H

$$T' = T\frac{R+H}{R} = T\left(1+\frac{H}{R}\right),$$

а на глубине h

$$T'' = T\sqrt{\frac{R}{R-h}}.$$

3.159. Груз с массой m_1, висящий на пружине с жесткостью k, совершает вертикальные колебания с периодом T_1, а груз с массой m_2 совершает колебания с периодом T_2. Найти период колебаний груза с массой $m_1 + m_2$.

Так как $T_i = 2\pi\sqrt{\frac{m_i}{k}}$, $i = 1, 2$, то

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 m_1}{k}+\frac{4\pi^2 m_2}{k}} = \sqrt{T_1^2+T_2^2}.$$

3.160. Два бруска с массами m_1 и m_2 соединены пружиной с жесткостью k. Пружина сжимается при помощи двух нитей, которые в некоторый момент пережигают (рис. 134). Найти период колебаний брусков (трением пренебречь).

Обозначим длину пружины в недеформированном состоянии l. Расстояния от брусков до центра масс системы (если пружина не деформирована) можно определить из соотношений

$$m_1 l_1 = m_2 l_2; \quad l_1 + l_2 = l.$$

При сжатой пружине смещения брусков с массами m_1 и m_2 соответственно равны x и y. При этом расстояния от брусков до центра масс системы удовлетворяют соотношению

$$m_1(l_1 - x) = m_2(l_2 - y), \text{ откуда } m_1 x = m_2 y.$$

Укорочение пружины при сжатии равно

$$x + y = x\frac{m_1+m_2}{m_2}.$$

Сила, с которой пружина действует на какой-либо из брусков (например, первый), равна

$$F = k(x+y) = kx\frac{m_1+m_2}{m_2} = k_1x,$$

где

$$k_1 = k\frac{m_1+m_2}{m_2}.$$

Период колебаний бруска

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}.$$

Таков же период колебаний второго бруска.

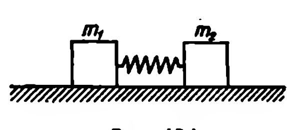


Рис. 134

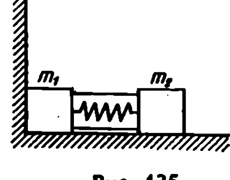


Рис. 135

3.161. В условиях задачи 3.160 левый брусок упирается в стенку (рис. 135). Определить движение системы после пережигания нитей.

Благодаря наличию стенки система оказывается незамкнутой в горизонтальном направлении. Система приобретет горизонтальный импульс и ее центр инерции будет перемещаться в горизонтальном направлении.

В первый момент движется только правый брусок. Потенциальная энергия системы, равная $kx^2/2$, перейдет в кинетическую энергию этого бруска $m_2v^2/2$, когда пружина распрямится. Скорость бруска с массой m_2 в этот момент будет равна $v_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}\,x$, и система приобретет количество движения $m_2v_2 = \sqrt{km_2}\,x$. В связи с отсутствием трения это количество движения будет сохраняться и распределится между обоими грузами, так что

$$v_ц = m_2v_2/(m_1+m_2),$$

где $v_ц$ — горизонтальная скорость центра тяжести системы.

Независимо от этого движения вследствие закона независимости действия сил оба бруска будут колебаться относительно центра тяжести так же, как и в предыдущей задаче, и с таким же периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}.$$

3.162. В свинцовом шаре с радиусом R и массой M сделана сферическая полость с радиусом $R/2$, поверхность которой касается поверхности шара. Найти, с какой силой этот шар будет притягивать малень-

кий шарик с массой m, находящийся на расстоянии d от центра свинцового шара по прямой, соединяющей центры шаров (рис. 136).

Если бы шар с массой M был сплошным, он притягивал бы шарик с массой m с силой

$$F = \gamma \frac{mM}{d^2}.$$

В данном случае сила притяжения будет меньше на величину F_1, которая представляет собой силу, с которой действовал бы свинцовый шар того же объема, что и полость. Так как радиус полости равен $R/2$, то масса шара, заполняющего полость, равна

$$M_1 = \rho \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{M}{8}.$$

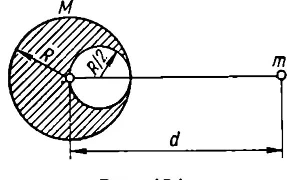


Рис. 136

Такой шар воздействовал бы на шарик m с силой

$$F_1 = \frac{\gamma M m}{8 (d - R/2)^2}.$$

Таким образом, сила притяжения будет равна

$$F - F_1 = \frac{\gamma m M}{d^2} - \frac{\gamma m M}{8 (d - R/2)^2}.$$

3.163. Первый искусственный спутник Земли, запущенный 4 октября 1957 г. в СССР, имел скорость $v = 8$ км/с и период обращения $T = 96$ мин. Найти высоту полета спутника, полагая его орбиту круговой. Радиус Земли $R = 6370$ км.

Путь, пройденный спутником за один оборот,

$$S = vT = 2\pi (R + h),$$

откуда

$$h = \frac{vT}{2\pi} - R = 970 \text{ км}.$$

3.164. Для задачи 3.163 найти отношение частоты обращения спутника к угловой скорости Земли и его ускорение.

Частота

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{96} \text{ мин}^{-1}.$$

Угловая скорость Земли

$$\omega = \frac{1}{24} \text{ ч}^{-1} = \frac{1}{1440} \text{ мин}^{-1}.$$

Искомое отношение

$$n/\omega = 15.$$

Так как частота обращения спутника постоянна, то его касательное ускорение равно нулю, а нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R + h} = 8{,}74 \text{ м/с}^2.$$

3.165. Вокруг Земли на высоте h над поверхностью движется по круговой орбите спутник. Найти зависимости скорости и периода обращения спутника от высоты, если радиус Земли равен R.

На спутник действует сила притяжения, равная по закону тяготения

$$F = \frac{km}{(R+h)^2}.$$

Так как спутник движется по окружности, то сила тяготения равна центростремительной силе $mv^2/(R+h)$.

На поверхности Земли

$$F = mg;\ h = 0,$$

так что

$$k = gR^2.$$

Поэтому

$$F = \frac{gR^2m}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h}.$$

Отсюда следует (см. задачу 3.163):

$$v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}};\ T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(R+h)\sqrt{R+h}}{R\sqrt{g}}.$$

С помощью этой же формулы можно приближенно вычислить скорость движения Луны вокруг Земли, Земли вокруг Солнца и т. п., если известны радиусы этих тел, расстояния между ними и ускорения свободного падения для тел, вокруг которых совершается движение.

3.166. Какова должна быть скорость спутника, чтобы находящийся в нем человек с массой m оказался в состоянии невесомости?

Составим уравнение движения

$$P - Q = \frac{mv^2}{R+h},$$

где P — сила тяжести, действующая на человека; Q — реакция дна кабины спутника, численно равная весу; R — радиус Земли; h — высота спутника над поверхностью Земли.

Условием невесомости является $Q = 0$. В данном случае P является силой притяжения к Земле, которая равна (см. предыдущую задачу)

$$\frac{km}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{(R+h)}.$$

Отсюда получим формулу, тождественную результату предыдущей задачи,

$$v = R\sqrt{g/(R+h)}.$$

Это означает, что человек, находящийся в кабине спутника, движется с той же скоростью, что и кабина, т. е. пребывает в состоянии невесомости независимо от значения своей массы m.

3.167. На какую высоту надо запустить искусственный спутник Земли, чтобы для наблюдателя, находящегося на Земле, он казался

неподвижным? Считать орбиту спутника окружностью, концентричной с экватором.

Для выполнения условия задачи спутник должен располагаться на прямой, проходящей через центр Земли и наблюдателя, находящегося на экваторе. При этом скорость спутника будет равна

$$v = \omega (R + h),$$

где ω — угловая скорость вращения Земли. Внося это выражение в окончательную формулу для скорости v задачи 3.165, получим $\omega (R + h) = R\sqrt{g/(R + h)}$, откуда

$$h = \sqrt[3]{gR^2/\omega^2} - R.$$

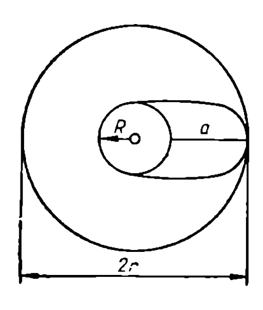


Рис. 137

Подставив сюда численные значения, найдем, что $h = 36\,800$ км.

3.168. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса r. После срабатывания тормозного двигателя скорость спутника уменьшается и он переходит на эллиптическую орбиту, касающуюся Земли (рис. 137). Через какое время после этого спутник приземлится? Сопротивлением атмосферы пренебречь. Радиус Земли равен R.

Большая полуось эллипса, который с одной стороны касается поверхности Земли, а с другой — исходной круговой орбиты, равна

$$a = \frac{r + R}{2}.$$

Согласно третьему закону Кеплера

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{a}{r}\right)^3.$$

Из задачи 3.165 мы знаем, что период обращения спутника по круговой орбите

$$T_0 = \frac{2\pi r}{R}\sqrt{\frac{r}{g}} \quad (r = R + h).$$

Период обращения по эллиптической орбите

$$T = T_0\left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} = T_0\left(\frac{R + r}{2r}\right)^{3/2} = \frac{2\pi r}{R}\sqrt{\frac{r}{g}}\left(\frac{R + r}{2r}\right)^{3/2}.$$

С момента торможения до посадки спутник пройдет как раз половину орбиты. Поэтому

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{R\sqrt{g}}\left(\frac{R + r}{2}\right)^{3/2}.$$

3.169. Период обращения спутника, движущегося вблизи поверхности планеты, равен T. Считая планету однородным шаром, найти ее плотность.

Центростремительная сила в данном случае равна силе притяжения

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{\gamma Mm}{R^2}.$$

Так как

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho \text{ и } T = \frac{2\pi R}{v},$$

то

$$\rho = \frac{3\pi}{\gamma T^2}.$$

3.170. Радиус земной орбиты — r, радиус Солнца — R. Найти среднюю плотность Солнца.

Обозначим массы Земли и Солнца m и M. Так как центростремительное ускорение Земли, с одной стороны, равно $v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$, а с другой — $F/m = \gamma M/r^2$, то $M = 4\pi^2 r^3/\gamma T^2$. Объем Солнца $V = 4\pi R^3/3$. Плотность Солнца

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\pi}{\gamma T^2}\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

3.171. Радиус небесного тела больше радиуса Земли в m раз, а плотность — в n раз. Найти ускорение силы тяжести на поверхности тела.

Обозначим величины, относящиеся к небесному телу, индексом «т», а относящиеся к Земле — индексом «З». Тогда

$$g_т = \frac{\gamma M_т}{R_т^2} = \frac{\gamma}{R_т^2}\frac{4}{3}\pi R_т^3\rho_т = \frac{4}{3}\pi R_т\rho_т\gamma.$$

Аналогично

$$g_З = \frac{4}{3}\pi R_З\rho_З\gamma.$$

Из этих двух уравнений

$$g_т = \frac{g_З R_т\rho_т}{R_З\rho_З} = mng_З.$$

3.172. Советская искусственная планета движется вокруг Солнца по орбите, средний радиус которой равен $R_{пл}$. Найти период обращения планеты вокруг Солнца и ее линейную скорость.

По третьему закону Кеплера

$$\left(\frac{T_З}{T_{пл}}\right)^2 = \left(\frac{R_З}{R_{пл}}\right)^3,$$

где $T_З$ — период обращения Земли; $R_З$ — средний радиус орбиты Земли.

Отсюда

$$T_{пл} = T_З \left(\frac{R_{пл}}{R_З}\right)^{3/2},$$

$$v = \frac{2\pi R_{пл}}{T_{пл}} = \frac{2\pi R_{пл}}{T_З} \left(\frac{R_З}{R_{пл}}\right)^{3/2}.$$

3.173. С какой скоростью упадет на поверхность Луны метеорит, скорость которого вдали от Луны мала?

Энергия тела, находящегося весьма далеко от центра притяжения (в данном случае — Луны) и движущегося с малой скоростью, может считаться равной нулю. По мере приближения к Луне кинетическая энергия тела возрастает, но одновременно возрастает по модулю и отрицательная потенциальная энергия. У поверхности Луны полная энергия тела

$$W = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{M_Л m}{R_Л}.$$

По закону сохранения энергии $W = 0$, т. е.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\gamma M_Л m}{R_Л} = 0,$$

откуда

$$v = \sqrt{2\gamma M_Л / R_Л}.$$

3.174. Планета солнечной системы, двигаясь по круговой орбите радиуса r со скоростью v, вдруг теряет свою орбитальную скорость. Рассчитать скорость u, с которой она упадет на Солнце, радиус которого R.

При движении планеты по орбите сила тяготения равна центростремительной силе

$$\frac{\gamma m M}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Потенциальная энергия планеты в гравитационном поле Солнца равна

$$W_r - W_R = -\left(\gamma \frac{Mm}{r} - \gamma \frac{Mm}{R}\right),$$

где W_r — потенциальная энергия на орбите радиуса r, W_R — потенциальная энергия на поверхности Солнца. На рис. 138 приведены соответствующие энергетические уровни потенциальной ямы, создаваемой притягивающим центром.

При падении планеты на Солнце ее потенциальная энергия будет переходить в кинетическую. При уменьшении потенциальной энергии от уровня, соответствующего расстоянию r от центра Солнца, до уровня, соответствующего поверхности Солнца, тело получит кинетическую энергию

$$\frac{mu^2}{2} = W_r - W_R = -\gamma M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Исключив M, найдем

$$u = v\sqrt{2(r-R)/R}.$$

3.175. Найти первую, вторую и третью космические скорости для планеты с массой M.

Первая космическая скорость v_{I} — это минимальная скорость запуска тела с массой m с планеты с массой M, необходимая для того, чтобы тело стало спутником планеты, т. е. вращалось вокруг планеты по орбите радиуса r со скоростью v_{I}. При таком движении сила тяготения является центростремительной силой. Поэтому

$$\frac{mv_{\text{I}}^2}{r} = \frac{\gamma mM}{r^2},$$

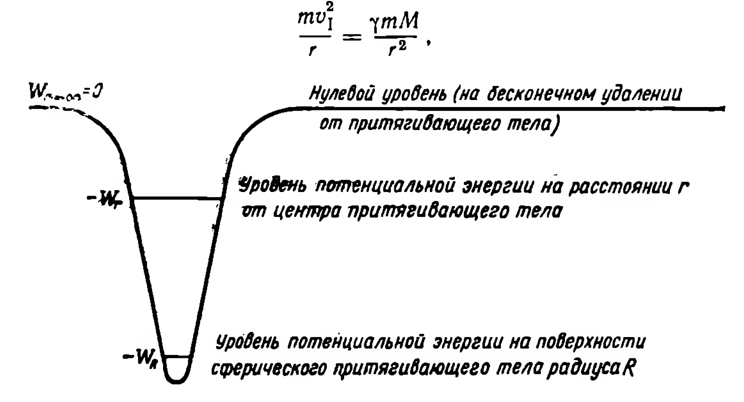


Рис. 138

откуда

$$v_{\text{I}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}.$$

Так как на поверхности планеты $\gamma mM/R^2 = mg_0$, то при запуске с поверхности планеты

$$v_{\text{I}} = \sqrt{g_0 R},$$

где R — радиус планеты; g_0 — ускорение свободного падения на поверхности планеты.

Вторая космическая скорость v_{II} — минимальная скорость, достаточная для того, чтобы тело с массой m, запущенное с планеты с массой M, вышло за пределы притяжения планеты. Для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия тела превысила его потенциальную энергию в поле тяготения данной планеты, т. е. позволила «поднять» тело из потенциальной ямы до «нулевого» уровня:

$$\frac{mv_{\text{II}}^2}{2} \geqslant \frac{\gamma mM}{r},$$

откуда

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} = \sqrt{2g_0R} = v_I \sqrt{2}.$$

Третья космическая скорость v_{III} — наименьшая скорость, достаточная для того, чтобы тело с массой m вышло за пределы Солнечной системы. Для ее вычисления будем рассматривать планету, с которой стартует тело m, как спутник Солнца, и скорость планеты на орбите $v_{пл}$ как первую космическую скорость по отношению к Солнцу. Тогда, по аналогии с вышесказанным, вторая космическая скорость по отношению к Солнцу, достаточная для выхода тела за пределы солнечного притяжения, будет равна $v_{пл}\sqrt{2}$. Однако это относится к случаю запуска тела с поверхности Солнца. Если же тело запускается с планеты, то за счет использования скорости самой планеты телу можно придать меньшую скорость, равную

$$v = v_{пл}\sqrt{2} - v_{пл} \approx 0{,}4v_{пл}.$$

Кроме этого запускаемое тело надо еще вырвать из сферы притяжения самой планеты. Для этого ему надо, как говорилось выше, сообщить дополнительно вторую космическую скорость по отношению к данной планете. Таким образом, полная кинетическая энергия тела должна равняться

$$\frac{mv_{III}^2}{2} = \frac{mv_{II}^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v_{III} = (v_{II}^2 + 0{,}16v_{пл}^2)^{1/2}.$$

3.176. Найти ускорение силы тяжести на высоте h над поверхностью Земли. Радиус Земли — R.

На поверхности Земли $g = g_0$ и $r = R$, поэтому сила притяжения

$$F = \frac{\gamma mM}{R^2} = mg_0.$$

На высоте h над поверхностью Земли тело притягивается с силой

$$mg = \frac{\gamma mM}{(R+h)^2} = \frac{\gamma mM}{r^2}\ (R + h = r),$$

откуда

$$g = \frac{g_0R^2}{(R+h)^2} = \frac{g_0R^2}{r^2}.$$

3.177. Вычислить постоянную тяготения, зная радиус R и плотность ρ Земли, а также ускорение силы тяжести g_0 на ее поверхности.

Масса $m = 1$ притягивается к Земле с силой, численно равной g_0, т. е.

$$F = 1 \cdot g_0 = \frac{\gamma \frac{4}{3}\pi R^3\rho \cdot 1}{R^2},$$

откуда

$$\gamma = \frac{3g_0}{4\pi R\rho}.$$

3.178. Найти зависимость изменения ускорения силы тяжести g от глубины погружения в Землю. При решении этой задачи следует иметь в виду, что тело, находящееся в Земле на глубине h, не испытывает со стороны вышележащего шарового слоя толщиной h никакого притяжения, так как силы притяжения отдельных частей этого слоя взаимно компенсируются.

Пусть тело с массой m находится в глубине Земли на расстоянии r от ее центра. По закону всемирного тяготения эта масса взаимодействует с внутренним шаром радиуса r, массу которого обозначим через M_1:

$$mg = \frac{\gamma m M_1}{r^2}.$$

Так как $M_1 = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ и на поверхности Земли

$$mg_0 = \frac{4\pi R^3\rho\gamma m}{3R^2},$$

то

$$g = g_0\frac{r}{R} = g_0\frac{R-h}{R},$$

где h — глубина погружения тела в Землю.

3.179. Телу с массой m, находящемуся на поверхности планеты с массой M и радиусом R, сообщена вертикальная скорость v_0. Найти: 1) потенциальную энергию тела на высоте h над поверхностью планеты; 2) высоту подъема тела, если v_0 меньше второй космической скорости v_{II}; 3) скорость тела v_∞ на большом удалении от планеты, если v_0 больше v_{II} (воздействием других тел пренебречь).

1) Начальная кинетическая энергия тела равна $mv_0^2/2$, а его начальная потенциальная энергия равна $W_R = -\gamma mM/R$. За счет кинетической энергии тело поднимается на высоту h, где полная энергия представляет собой потенциальную энергию $W_{R+h} = -\gamma mM/(R+h)$.

Приращение потенциальной энергии

$$W_{R+h} - W_R = \frac{mv_0^2}{2} = -\gamma mM\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = \frac{\gamma mMh}{R(R+h)}.$$

Так как на поверхности планеты $\gamma mM/R^2 = mg_0$, то потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h над поверхностью планеты, равна

$$W_{R+h} - W_R = mg_0R\frac{h}{R+h},$$

где g_0 — ускорение свободного падения на поверхности планеты.

2) Высота подъема

$$h = \frac{v_0^2 R}{2g_0R - v_0^2}.$$

3) В этом случае тело с массой m на большом удалении от планеты (на бесконечности) еще сохранит кинетическую энергию $mv_\infty^2/2$. Разность между исходной кинетической энергией и кинетической энергией на бесконечности израсходуется на «подъем» тела из потенциальной ямы (рис. 138), т. е. на увеличение потенциальной энергии тела от уровня $-W_R$, соответствующего поверхности планеты, до нулевого уровня W_∞, соответствующего весьма большому удалению тела (на бесконечность)

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_\infty^2}{2} = -(W_\infty - W_R) = -\left(0 - \frac{\gamma mM}{R}\right) = mg_0R,$$

откуда $v_\infty = \sqrt{v_0^2 - 2g_0R} = \sqrt{v_0^2 - v_{II}^2}$, так как $v_{II} = \sqrt{2g_0R}$ (см. задачу 3.175).

3.180. Две звезды с массами m_1 и m_2 равномерно вращаются по концентрическим окружностям вокруг центра, причем расстояние между ними всегда постоянно и равно l. Найти радиусы орбит и периоды обращения звезд (рис. 139).

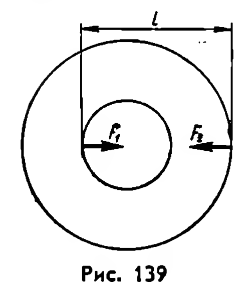


Рис. 139

Так как обе звезды равномерно движутся по окружностям, то сила, действующая на каждую из них, является центростремительной. Согласно третьему закону Ньютона эти силы равны друг другу

$$F_1 = F_2; \; m_1\omega_1^2 r_1 = m_2\omega_2^2 r_2$$

или

$$\frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2}.$$

Так как по условию расстояние l между звездами постоянно, то $T_1 = T_2$ и

$$m_1 r_1 = m_2 r_2; \; r_1 + r_2 = l.$$

Отсюда

$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}; \; r_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Если $m_1 \gg m_2$, то $r_2 \gg r_1$, т. е. малая звезда вращается вокруг большой.

Так как $F_1 = F_2 = \gamma m_1 m_2 / l^2$, то, приравнивая это выражение центростремительной силе, находим, например, для первой звезды

$$\frac{\gamma m_1 m_2}{l^2} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2},$$

откуда

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l^3}{\gamma(m_1 + m_2)}} = T_2.$$

3.181. Ракета с начальной массой m запущена вертикально вверх. Скорость газов на срезе выходного отверстия двигателя равна v, секундный расход топлива — μ. Найти ускорение ракеты через время t с момента запуска.

Запишем уравнение Мещерского (в проекции на вертикаль) для момента времени t

$$(m - \mu t)\, a = v\mu - F.$$

С другой стороны, в этот же момент

$$F = (m - \mu t)\, g.$$

Таким образом, в момент t ускорение

$$a = \frac{v\mu}{m - \mu t} - g.$$

3.182. Сосуд с водой движется горизонтально с постоянной скоростью под действием реактивной силы, возникающей благодаря струе воды, бьющей со скоростью v из отверстия площадью S, расположенного у дна сосуда. Масса сосуда с водой равна m. Найти коэффициент трения между сосудом и плоскостью (пренебрегая изменением массы воды).

Согласно уравнению Мещерского

$$F + v\mu = ma.$$

В данном случае ускорение $a = 0$ и реактивная сила $v\mu$ равна и противоположна по направлению силе трения $F_{\text{тр}}$. Отбрасываемая ежесекундно масса

$$\mu = \rho S \Delta l / \Delta t = \rho S v;$$

реактивная сила равна

$$v\mu = \rho S v^2.$$

Сила трения

$$F_{\text{тр}} = kmg,$$

поэтому

$$k = \frac{\rho S v^2}{mg}.$$

3.183. Ракета с массой M взлетает вертикально с ускорением $5g$. Скорость истечения газов из сопла двигателя равна v. Найти расход горючего.

По закону Мещерского

$$-Mg + v\mu = Ma,$$

откуда

$$\mu = \frac{Mg + Ma}{v} = \frac{6Mg}{v}.$$

3.184. Какую часть веса одноступенчатой ракеты должен составлять вес горючего, если ракета, взлетая вертикально, должна приобрести в конце работы двигателя первую космическую скорость $v_{макс} = 7{,}9$ км/с? Сопротивлением воздуха пренебречь. Скорость истечения газов из сопла двигателя $v \approx 3440$ м/с.

Из формулы Циолковского $v_{макс} = v \ln z$ находим, что число Циолковского

$$z = e^{v_{макс}/v} \approx 10.$$

Таким образом, вес топлива должен составлять по крайней мере 90% веса ракеты, что нецелесообразно. Поэтому космические ракеты всегда многоступенчатые. Так, например, при упомянутых в задаче условиях и числе ступеней $n = 3$ число Циолковского будет равно $z = \sqrt[3]{10} \approx 3{,}1$.

3.185. Автомобиль с ракетным двигателем равноускоренно движется вверх по наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения k. Скорость газов на выходе сопла двигателя равна u, а их масса, отбрасываемая за 1 с, равна μ. Скорость автомобиля в начале подъема равна v_0. Найти время, за которое автомобиль увеличил скорость от v_0 до v.

Векторные уравнения движения:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{Q}; \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t.$$

В проекциях на оси (параллельную и перпендикулярную наклонной плоскости)

$$Ma = -F_{тр} + \mu u; \quad F_{тр} = kQ = kMg\cos\alpha;$$

$$v_t = v_0 + at, \text{ или } a = \frac{v_t - v_0}{t}.$$

Из этих соотношений получим

$$M\frac{v - v_0}{t} = -Mg\sin\alpha - kMg\cos\alpha + \mu u,$$

откуда

$$t = \frac{M(v - v_0)}{\mu u - Mg(\sin\alpha - k\cos\alpha)}.$$

4. Статика

Равновесие. Равновесием тела называется такое состояние, когда любые ускорения тела (поступательное или вращательное) равны нулю, т. е. все действующие на тело силы и моменты сил уравновешены. При этом тело может находиться в покое, двигаться равномерно и прямолинейно или равномерно вращаться вокруг оси, проходящей через его центр тяжести.

Условие равновесия материальной точки: геометрическая сумма всех сил, приложенных к точке, равна нулю:

$$\sum \vec{F} = 0.$$

Если силы, действующие на точку, лежат в одной плоскости, то это условие можно записать в виде

$$\sum F_x = 0; \ \sum F_y = 0.$$

Равновесие твердого тела зависит не только от модулей и направлений сил, но и от точек их приложения. Точку приложения силы, действующей на тело, можно переносить вдоль линии ее действия, так что эта сила — скользящий вектор.

Условия равновесия твердого тела: 1) геометрическая сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю; 2) сумма всех моментов, приложенных к телу, равна нулю.

Если силы, действующие на тело, лежат в одной плоскости, то первое из этих условий можно записать в виде

$$\sum F_x = 0; \ \sum F_y = 0.$$

Второе условие запишем в виде

$$\sum_i M_0 (F_i) = 0,$$

т. е. сумма моментов всех сил относительно какой-либо оси, проходящей через произвольную точку O, равна нулю.

Оси X и Y и точку O выбирают произвольно так, чтобы выкладки были более простыми. Иногда для решения задачи достаточно меньшего числа уравнений, чем указано выше. Например, если наложенные на тело связи не допускают вращения, то уравнения моментов составлять не нужно. С другой стороны, если на тело наложена связь в виде оси вращения, то достаточно составить лишь уравнение моментов.

Равновесие называется устойчивым, если тело после малого отклонения от состояния равновесия снова возвращается к нему.

Равновесие называется неустойчивым, если тело, выведенное из этого состояния, не возвращается к нему, а стремится к другому состоянию равновесия.

Равновесие называется безразличным, если тело, выведенное из этого состояния, остается в равновесии в новом положении.

Простые механизмы позволяют, производя работу с грузом P на перемещении s, получить выигрыш в силе (т. е. уменьшить приложенную силу f) за счет увеличения перемещения, так что $fS = Ps$, где f меньше P, во столько же раз, во сколько S больше s («золотое правило» механики).

Рычаги 1-го и 2-го рода (рис. 140, *а*, *б*) дают выигрыш в силе

$$P/f = S/s.$$

Блок неподвижный (рис. 141) не дает выигрыша в силе, а лишь меняет ее направление.

Блок подвижный (рис. 142) дает выигрыш в силе

$$P/f = 2.$$

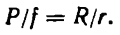
Обычный полиспаст с n подвижными и n неподвижными блоками (рис. 143) дает выигрыш в силе

$$P/f = 2n.$$

Степенной полиспаст (рис. 144) дает выигрыш в силе

$$P/f = 2^n.$$

Ворот, состоящий из двух блоков с радиусами R и r ($R > r$) (рис. 145), дает выигрыш в силе



$$P/f = R/r.$$

Клин (рис. 146). Сила f, вгоняющая клин в щель, связана с силой P бокового

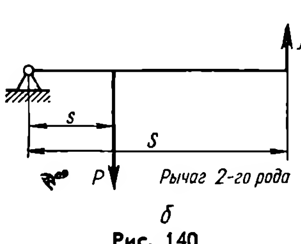


Рис. 140

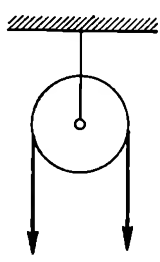


Рис. 141

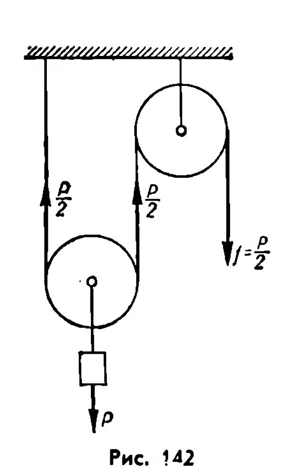


Рис. 142

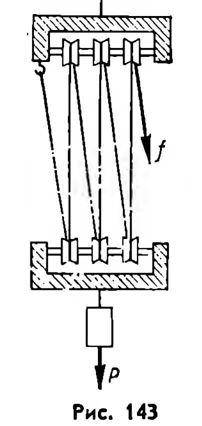


Рис. 143

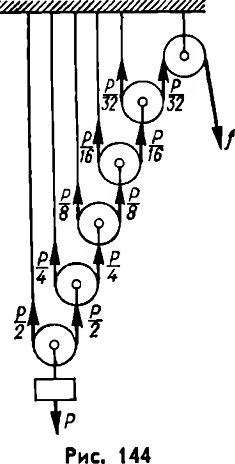


Рис. 144

давления на щеки клина соотношением

$$P/f = l/d,$$

где d — длина основания клина; l — длина щеки клина.

Винт (рис. 147) дает выигрыш в силе

$$P/f = 2\pi r/h,$$

где r — радиус винта; h — шаг винта.

Червячная передача (рис. 148) дает выигрыш в силе

$$P/f = nr/R,$$

где R — радиус шестерни; n — число зубьев шестерни; r — радиус вала.

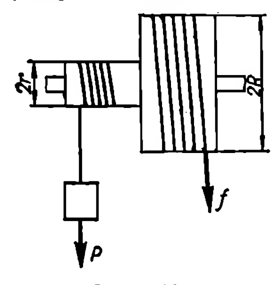


Рис. 145

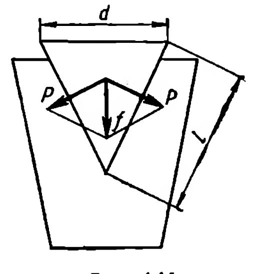
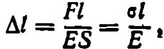


Рис. 146

Закон Гука. При продольном сжатии или растяжении упругого тела длиной l и сечением S постоянной силой F изменение длины тела Δl равно



$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} = \frac{\sigma l}{E},$$

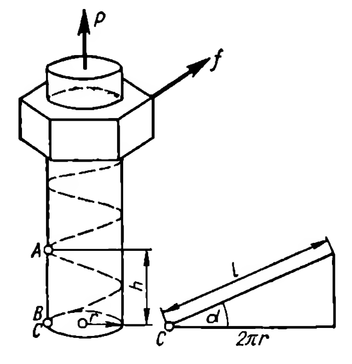




Рис. 147

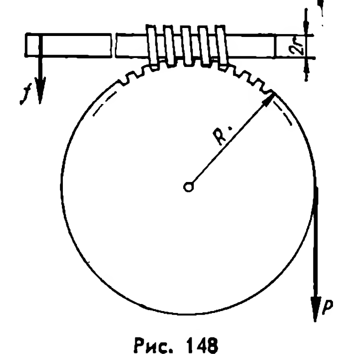


Рис. 148

где E — постоянная, характеризующая упругие свойства тела и называемая модулем Юнга. Величина $F/S = \sigma$ называется удельной нагрузкой или нормальным напряжением. Модуль Юнга численно равен нормальному напряжению, вызывающему удлинение или сжатие стержня единичной площади вдвое, при условии, что деформация остается упругой. Значения модуля Юнга приведены в Приложении.

4.1. Невесомый жесткий стержень длиной l свободно лежит на двух опорах A и B. В точке C, отстоящей от A на расстоянии a, на стержень действует вертикальная нагрузка P. Найти реакции опор (рис. 149).

Поместим начало координат X и Y в точке A и направим их, как показано на рисунке.

Так как все силы вертикальны, то достаточно составить одно уравнение проекций сил и одно уравнение моментов.

Уравнение проекций на ось Y

$$\sum_i F_{iy} = Q_A + Q_B - P = 0.$$

Уравнение моментов относительно точки A (направление момента, вызывающего вращение по часовой стрелке, принимаем за положительное)

$$\sum_i M_A = Pa - Q_B l = 0.$$

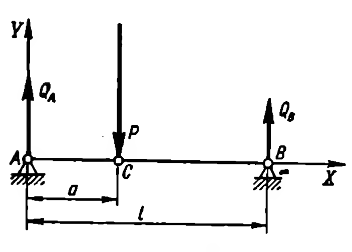


Рис. 149

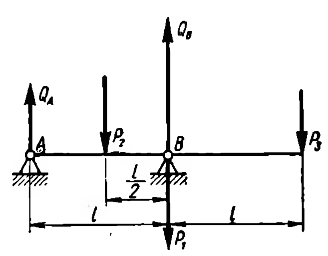


Рис. 150

Из этих двух уравнений находим

$$Q_B = \frac{Pa}{l};\ Q_A = P\frac{l-a}{l}.$$

4.2. Балка весом P_1 свободно лежит на двух опорах A и B, расстояние между которыми равно l, и выступает за опору B на такую же длину l (рис. 150). На середине промежутка AB расположен груз P_2, а на выступающем конце — груз P_3. Найти реакции опор Q_A, Q_B.

Уравнение равновесия сил

$$Q_A + Q_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0.$$

Уравнение равновесия моментов относительно точки B

$$Q_A l - P_2\frac{l}{2} + P_3 l = 0;$$

$$Q_A = P_2/2 - P_3;\ Q_B = P_1 + P_2/2 + 2P_3.$$

4.3. Куб опирается одним ребром на пол, другим — на гладкую вертикальную стенку (рис. 151). Определить, при каких значениях угла α возможно равновесие куба. Коэффициент трения куба о пол равен k, ребро куба равно a.

Уравнение проекций на вертикаль

$$-P + Q_2 = 0.$$

Уравнение проекций на горизонталь

$$Q_1 - F = 0 \ (Q_1 \text{— реакция стенки}).$$

Уравнение моментов относительно точки O

$$Q_1 a \sin \alpha = (Pa\sqrt{2}/2) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right);$$

кроме того,

$$F \leqslant kQ_2.$$

Отсюда находим

$$1 \geqslant \operatorname{tg} \alpha \geqslant \frac{1}{2k+1}.$$

Если $k > 0$, то α всегда меньше $\pi/4$, так как при $\alpha > \frac{\pi}{4}$ куб опрокинется.

4.4. Воздушный шар весом P удерживается тросом. На шар действуют подъемная сила Q и горизонтальная сила давления ветра G. Найти натяжение троса в точке B и угол α (рис. 152).

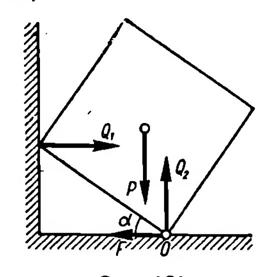


Рис. 151

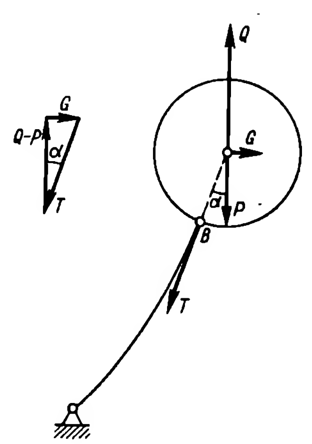


Рис. 152

Составляем силовой треугольник:

$$T = \sqrt{(Q-P)^2 + G^2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{G}{Q-P}.$$

4.5. Железобетонная опора высотой h сжимается силой F. Сечение бетона равно $S_б$, сечение стальной арматуры равно $S_{ст}$, модули упругости бетона и стали равны $E_б$ и $E_{ст}$. Найти деформацию колонны.

По закону Гука

$$\Delta h = \frac{F_б h}{E_б S_б} = \frac{F_{ст} h}{E_{ст} S_{ст}}; \quad \frac{F_{ст}}{F_б} = \frac{E_{ст} S_{ст}}{E_б S_б}.$$

По условию задачи

$$F = F_б + F_{ст}.$$

Из этих трех уравнений находим

$$F_{ст} = \frac{E_{ст}S_{ст}F}{E_{ст}S_{ст} + E_бS_б};$$

$$\Delta h = \frac{Fh}{E_{ст}S_{ст} + E_бS_б}.$$

4.6. Два железных цилиндра высотой l_1 и l_2 и с поперечным сечением S_1 и S_2 поставлены соосно один на другой между двумя неподвижными плитами, связанными друг с другом стойками. Зазор между верхней плитой и верхним цилиндром равен δ. Оба цилиндра нагреваются до температуры t. Найти силу, с которой цилиндры распирают плиты.

Удлинение обоих цилиндров Δl_t под действием нагрева

$$\Delta l_t = \alpha \Delta t\,(l_1 + l_2)$$

Укорочение обоих цилиндров под действием сжатия по закону Гука

$$\Delta l_p = \frac{Fl_1}{ES_1} + \frac{Fl_2}{ES_2} = \frac{F}{E}\left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}\right).$$

Разность этих двух деформаций равна величине зазора

$$\Delta l_t - \Delta l_p = \alpha\,\Delta t\,(l_1 + l_2) - \frac{F}{E}\left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}\right) = \delta,$$

откуда

$$F = \frac{[\alpha\,\Delta t\,(l_1 + l_2) - \delta]\,E}{\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}}.$$

4.7. На пружине висит груз с массой m_1, благодаря чему пружина растягивается до длины l_1. При увеличении массы груза до m_2 длина пружины становится равной l_2. Найти работу растяжения пружины от начальной длины до l_2.

Обозначим начальную длину пружины через l_0. По закону Гука $m_1g = k(l_1 - l_0)$; $m_2g = k(l_2 - l_0)$. Из этих уравнений находим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_1 - l_0}{l_2 - l_0}; \quad l_0 = \frac{m_2l_1 - m_1l_2}{m_2 - m_1};$$

$$(m_2 - m_1)\,g = k\,(l_2 - l_0 - l_1 + l_0) = k\,(l_2 - l_1);$$

$$k = \frac{(m_2 - m_1)\,g}{l_2 - l_1}.$$

Работа растяжения пружины

$$W = k\,\frac{(\Delta l)^2}{2} = \frac{k}{2}\,(l_2 - l_0)^2 = \frac{gm_2^2\,(l_2 - l_1)}{2\,(m_2 - m_1)}.$$

4.8. Упругий невесомый стержень жестко укреплен в горизонтальном положении за концы. Посредине стержня подвешен груз P, благодаря чему стержень прогибается на величину x_0. Найти, во сколько раз начальный прогиб будет больше, если груз P упадет на середину стержня с высоты h.

Деформация упругого тела пропорциональна силе, т. е. $P = kx_0$. Потенциальная энергия тела весом P, поднятого на высоту h, равняется Ph и при падении на стержень энергия деформации последнего будет равна $k\frac{x^2}{2} = P(h + x) = kx_0(h + x)$, откуда $x^2 - 2x_0x - 2x_0h = 0$. Решая это уравнение, находим

$$x = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 2x_0h}.$$

Так как $x > x_0$, берем знак «+» перед корнем, после чего определяем отношение

$$\frac{x}{x_0} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{x_0}}.$$

4.9. Лестница AB длиной l и весом P приставлена к стене под углом α к горизонтали (рис. 153). Коэффициент трения между лестницей и полом — k_1, между лестницей и стеной — k_2. Найти наименьший угол α, при котором лестница еще находится в равновесии, а также реакции пола и стены.

Сумма моментов относительно точки A

$$Q_2 l \sin\alpha - P\frac{l}{2}\cos\alpha + F_{2\,тр} l \cos\alpha = 0.$$

Сумма проекций на горизонталь

$$F_{1\,тр} - Q_2 = 0.$$

Сумма проекций на вертикаль

$$Q_1 - P + F_{2\,тр} = 0.$$

Кроме того,

$$F_{1\,тр} = k_1Q_1; \quad F_{2\,тр} = k_2Q_2.$$

Из первого уравнения находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P/2 - F_{2\,тр}}{Q_2}.$$

Из уравнений $Q_1 = P - k_2Q_2$ и $Q_2 = k_1Q_1$ получаем

$$Q_1 = \frac{P}{1 + k_1k_2}; \quad Q_2 = \frac{k_1P}{1 + k_1k_2},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - k_1k_2}{2k_1}.$$

4.10. Лестница длиной l с массой m приставлена к гладкой вертикальной стене и стоит на шероховатом полу под углом α к плоскости пола. На расстоянии S от верхнего конца лестницы стоит человек с массой M. Найти силу трения, удерживающую лестницу от скольжения (рис. 154).

Имея в виду, что $F_{тр} = R_B$ (см. задачу 4.9), составим уравнение всех моментов сил относительно точки A:

$$mg \cdot AO \cos \alpha + Mg \cdot AC \cos \alpha - R_B AB \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$R_B = F_{тр} = \frac{mg \frac{l}{2} \cos \alpha + Mg (l - S) \cos \alpha}{l \sin \alpha} =$$

$$= \frac{mgl + 2Mgl - 2MgS}{2l} \operatorname{ctg} \alpha.$$

4.11. Доска весом P лежит одним концом на земле. Второй конец поднят и удерживается в таком положении силой Q, приложенной под прямым углом к доске. Угол, образуемый доской с горизонтом, равен α. Найти силу Q (рис. 155).

Обозначим длину доски через l. Уравнение моментов относительно точки O

$$Ql - P \cos \alpha \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

Рис. 153

Рис. 154

Рис. 155

откуда

$$Q = (P \cos \alpha)/2.$$

4.12. На какую максимальную высоту может подняться человек весом G по лестнице весом P и длиной l, приставленной к гладкой стене? Угол между лестницей и полом равен α, коэффициент трения о пол равен k (рис. 156).

Составляем уравнение моментов относительно точки B

$$Q_1 l \sin \alpha - Gx \cos \alpha - P \frac{l \cos \alpha}{2} = 0.$$

Уравнение проекций на вертикальную ось

$$Q_2 - G - P = 0.$$

Уравнение проекций на горизонтальную ось

$$Q_1 - F_{тр} = 0.$$

Отсюда

$$Q_1 = F_{тр} = kQ_2 = k(G + P);$$

$$k(G + P)\, l \sin \alpha - P \frac{l \cos \alpha}{2} - Gx \cos \alpha = 0;$$

$$x = \frac{k(G + P)\, l \sin \alpha - P \frac{l \cos}{2}}{G \cos \alpha}; \quad h = x \sin \alpha.$$

4.13. К вертикальной гладкой стене подвешен на тросе однородный шар весом P. Трос образует со стеной угол α. Найти натяжение троса T и силу давления шара на стену (рис. 157).

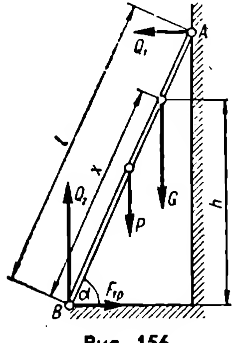


Рис. 156

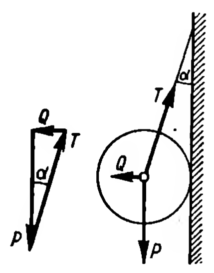


Рис. 157

Сумма сил, действующих на шар, равна нулю:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{Q} = 0,$$

где Q — реакция стены, численно равная силе давления шара на стену.

Уравнение вертикальных проекций

$$-P + T \cos \alpha = 0.$$

Уравнение горизонтальных проекций

$$-Q + T \sin \alpha = 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{P}{\cos \alpha}; \quad Q = T \sin \alpha = P \operatorname{tg} \alpha.$$

4.14. Шарик весом P подвешен на нити длиной l так, что он лежит на поверхности гладкой сферы радиусом r. Кратчайшее расстояние от точки подвеса до сферы равно d. Найти натяжение нити T и реакцию сферы Q (рис. 158).

Так как система сил находится в равновесии, то треугольник, составленный из сил $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{T}$, замкнут и подобен треугольнику AOB. Из этого подобия заключаем, что

$$\frac{P}{d + r} = \frac{T}{l} = \frac{Q}{r}; \quad T = \frac{Pl}{d + r}; \quad Q = \frac{Pr}{d + r}.$$

4.15. Балка весом P одним концом упирается в угол A (рис. 159), а другим — опирается на прямоугольный выступ B, образуя с вертикалью угол α. Величина реакции Q_2 известна. Найти реакцию Q_1.

На балку действуют силы $\vec{P}$, $\vec{Q_1}$ и $\vec{Q_2}$. Так как балка находится в равновесии, то геометрическая сумма сил равна нулю, т. е. из этих трех сил можно построить треугольник. Для этого необходимо, чтобы линии их действия пересекались в одной точке.

Из треугольника AOB находим

$$Q_1 = \sqrt{P^2 + Q_2^2 - 2PQ_2 \sin \alpha};$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sin (90^\circ - \alpha)}{\sin \beta}; \ \sin \beta = \frac{Q_2 \cos \alpha}{Q_1}.$$

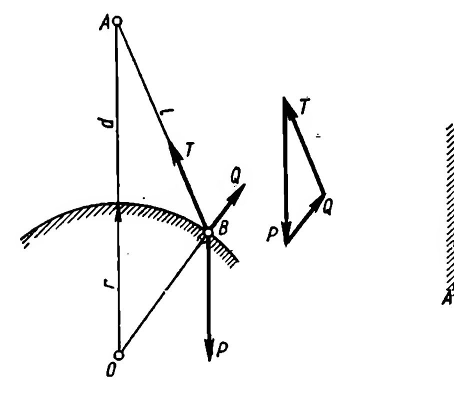


Рис. 158

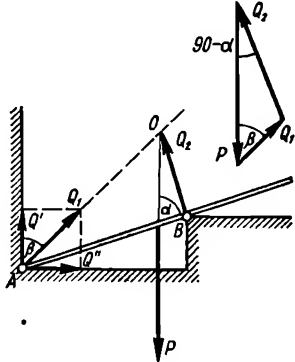


Рис. 159

4.16. Столб весом P, упирающийся одним концом в прямой угол, равномерно поворачивается в вертикальное положение силой F, приложенной ко второму концу столба перпендикулярно столбу. При этом значение силы F постепенно уменьшается до нуля. Найти закон изменения силы F и реакции угла Q.

Выберем систему координат, как показано на рис. 160. Так как столб поворачивается равномерно, то к нему применимы условия равновесия:

1) условие равенства нулю суммарного момента сил

$$\sum M = \frac{Pl}{2} \cos \alpha - Fl = 0,$$

где l — длина столба. Отсюда

$$F = \frac{P \cos \alpha}{2}.$$

С ростом α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ сила F уменьшается от $P/2$ до 0.

2) условие равенства нулю проекций на горизонтальную и вертикальную оси

$$Q_x - F\sin\alpha = 0;\quad Q_y - P + F\cos\alpha = 0;$$

$$Q_y = P[1 - (\cos^2\alpha)/2];\quad Q_x = P(\sin 2\alpha)/4;\quad Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \frac{P}{2}\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}.$$

С увеличением α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ реакция Q возрастает от $P/2$ до P.

4.17. Прут с массой m изогнут посередине под прямым углом (рис. 161) и подвешен за один из концов на шарнире. Найти угол α между вертикалью и верхним стержнем в положении равновесия.

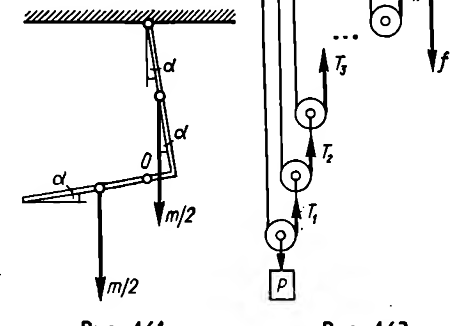


Рис. 160 Рис. 161 Рис. 162

Составим уравнение моментов относительно точки закрепления

$$\frac{gm}{2}\frac{l}{4}\sin\alpha = \frac{gm}{2}\left(\frac{l}{4}\cos\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha\right),$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}.$$

4.18. Найти выигрыш в силе у степенного полиспаста, состоящего из n подвижных блоков, если каждый блок имеет массу m. К первому блоку подвешен груз P (рис. 162).

Очевидно, что

$$T_1 = \frac{P + mg}{2};\quad T_2 = \frac{\frac{P + mg}{2} + mg}{2} = \frac{P}{2^2} + \frac{mg(1+2)}{2^2};$$

$$T_3 = \frac{P}{2^3} + mg\frac{1 + 2 + 2^2}{2^3};\ \ldots;\ T_n = f =$$

$$= \frac{P}{2^n} + mg\frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}}{2^n} = \frac{P + (2^n - 1)mg}{2^n}.$$

4.19. Цилиндр весом P удерживается на наклонной плоскости с углом наклона α лентой, закрепленной с одной стороны на наклонной плоскости, а с другой — направленной вертикально (рис. 163, *а*). Найти натяжение ленты.

Выбрав координаты, как показано на рисунке 163, *б*, составляем уравнения проекций

на ось X: $Q\sin\alpha - F\cos\alpha = 0$;

на ось Y: $Q\cos\alpha + F\sin\alpha + F - P = 0$.

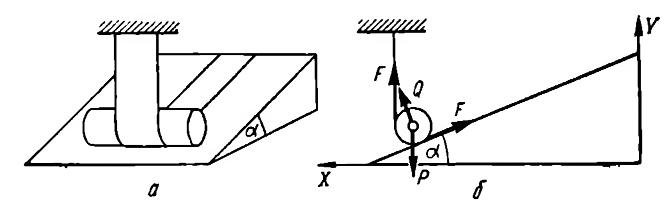


Рис. 163

Отсюда

$$F = \frac{P\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

4.20. Найти условия равновесия клина с острым углом 2α, забитого в щель. Коэффициент трения равен k (рис. 164). Весом клина пренебречь.

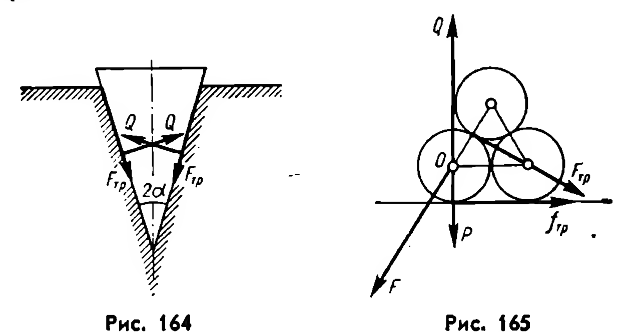


Рис. 164　　　　Рис. 165

Запишем уравнение проекций на вертикаль

$$2Q\sin\alpha - 2F_{\text{тр}}\cos\alpha = 0; \quad F_{\text{тр}} \leqslant kQ,$$

отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant k.$$

4.21. Три деревянных цилиндра одинакового диаметра и веса уложены один на другой, как показано на рис. 165. Найти минимальный коэффициент трения, при котором цилиндры еще будут оставаться неподвижными.

На нижний левый цилиндр действуют следующие силы: F — сила давления со стороны верхнего цилиндра; $F_{тр}$ — сила трения между цилиндрами; $f_{тр}$ — сила трения между цилиндром и поверхностью; P — сила тяжести; Q — реакция опоры. Для равновесия цилиндра необходимо, чтобы:

1) сумма моментов сил относительно точки O равнялась нулю, т. е.

$$F_{тр}r - f_{тр}r = 0,$$

где r — радиус цилиндра;

2) сумма проекций сил на горизонтальную ось равнялась нулю,

$$f_{тр} + F_{тр}\cos 30^\circ - F\cos 60^\circ = 0.$$

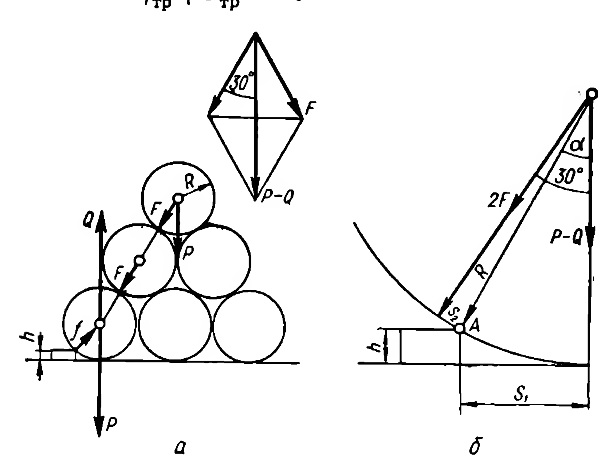


Рис. 166

Учитывая, что $F_{тр} = kF$, и исключив из обоих уравнений $f_{тр}$, находим

$$k \geqslant \frac{\cos 60^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

4.22. Шесть одинаковых деревянных цилиндров радиусом R каждый уложены, как показано на рис. 166, *а*. Под крайние нижние цилиндры уложены подкладки высотой h, удерживающие цилиндры. Найти наименьшую высоту подкладок. Трением пренебречь.

Рассмотрим нижний левый цилиндр. На него действуют сила веса P, сила реакции Q, сила реакции подкладки f, направленная по радиусу от точки соприкосновения с подкладкой к центру цилиндра, и сила $2F$ (рис. 166, *б*). Последняя сила действует со стороны двух вышележащих цилиндров и стремится перекатить нижний левый цилиндр влево через препятствие h. Очевидно, что точкой, относительно которой возможен поворот, является точка A. Перекатывания не произойдет, если выполнено условие

$$(P - Q)\, S_1 \geqslant 2FS_2.$$

Момент силы f относительно точки A равен нулю. Так как $S_1 = R\sin\alpha$ и $S_2 = R\sin(30° - \alpha)$, то

$$(P - Q)R\sin\alpha \geqslant \frac{2(P - Q)R}{\sqrt{3}}\sin(30° - \alpha),$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Из рисунка находим

$$h = R(1 - \cos\alpha).$$

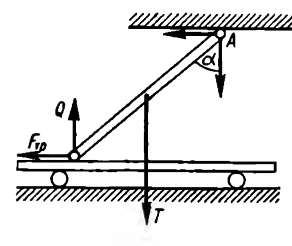


Рис. 167

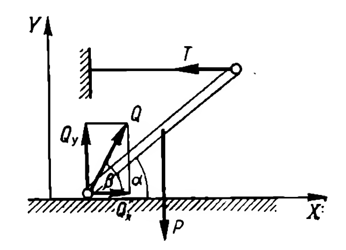


Рис. 168

Так как

$$\cos\alpha \leqslant \sqrt{\frac{12}{13}} \approx 0{,}96,$$

то

$$h \geqslant 0{,}04R.$$

4.23. Стержень весом T, шарнирно подвешенный за один конец, опирается другим концом о тележку. Угол между стержнем и вертикалью равен α. Коэффициент трения между стержнем и тележкой равен k (рис. 167). Найти горизонтальную силу, которую надо приложить к тележке, чтобы сдвинуть ее влево или вправо (трение о пол не учитывать).

Пусть тележку надо сдвинуть влево. При этом на стержень действуют следующие силы: вес стержня T; реакция тележки Q; сила трения $F_{тр} = kQ$, направленная влево (так как стержень по отношению к тележке движется вправо); неизвестная реакция шарнира, изображенная в виде двух составляющих. Уравнение моментов относительно шарнира (l — длина стержня):

$$T\frac{l}{2}\sin\alpha - Ql\sin\alpha - kQl\cos\alpha = 0.$$

Отсюда

$$Q = \frac{T\sin\alpha}{2(\sin\alpha + k\cos\alpha)}; \quad F = F_{тр} = kQ = \frac{kT\sin\alpha}{2(\sin\alpha + k\cos\alpha)}.$$

Если тележка должна быть сдвинута вправо, то сила $F_{тр}$ будет направлена вправо и уравнение моментов запишется в виде

$$T\frac{l}{2}\sin\alpha - Ql\sin\alpha + F_{тр}l\cos\alpha = 0,$$

откуда

$$F = F_{тр} = \frac{kT\sin\alpha}{2(\sin\alpha - k\cos\alpha)}.$$

Как видно из последнего выражения, движение вправо возможно лишь при $\operatorname{tg}\alpha > k$, так как в противном случае произойдет заклинивание тележки ($F \to \infty$).

4.24. Стержень весом P шарнирно укреплен за один конец и удерживается горизонтальной нитью за второй конец. Стержень образует с горизонталью угол α. Найти реакцию шарнира и натяжение нити (рис. 168).

Реакция шарнира не известна ни по величине, ни по направлению, поэтому ее можно представить в виде слагающих Q_x и Q_y. Кроме них на стержень действуют сила тяжести P и натяжение нити T.

Уравнение проекций на ось X

$$Q_x - T = 0.$$

Уравнение проекций на ось Y

$$Q_y - P = 0.$$

Уравнение моментов относительно шарнира

$$\frac{Pl}{2}\cos\alpha - Tl\sin\alpha = 0.$$

Из этих уравнений

$$T = (P/2)\operatorname{ctg}\alpha = Q_x; \quad Q_y = P.$$

Реакция

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = P\sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{4}}$$

и

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{Q_y}{Q_x} = \frac{P\operatorname{tg}\alpha}{P/2} = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

5. Механика жидкостей и газов

Закон Паскаля. Внешнее давление, производимое на неподвижную жидкость или газ, передается ими во все стороны без изменения. Если на поверхность жидкости или газа площадью S_1 действует внешняя

сила F_1, то на поверхность площадью S_2 будет действовать сила F_2, причем

$$\frac{F_1}{S_1}=\frac{F_2}{S_2}=p,$$

где p — давление жидкости или газа (сила на единицу площади).

Гидростатическое давление. Если однородная жидкость или газ находятся в поле силы тяжести и точка B лежит ниже точки A, то

$$p_B=p_A+\rho g\,(h_A-h_B),$$

где p_A и p_B — давления в точках A и B; h_A-h_B — разность высот этих точек; ρ — плотность жидкости или газа.

Закон Архимеда. На тело, погруженное в однородную жидкость (или газ), действует выталкивающая сила F_A, направленная вертикально вверх и равная весу вытесненной жидкости (или газа) в объеме погруженной части тела. Если объем вытесненной жидкости (газа) равен V, а плотность — ρ, то

$$F_A=\rho gV.$$

Условие плавания тела весом P:

$$F_A=P.$$

Закон постоянства потока. При установившемся течении идеальной жидкости в трубе через любое сечение проходит одинаковое количество жидкости

$$Q=m/t=\text{const}.$$

Если жидкость с плотностью ρ проходит через сечение S со скоростью v, то расход жидкости за единицу времени

$$Q=\rho Sv.$$

Условие неразрывности потока. В случае установившегося потока в трубе

$$v_1S_1=v_2S_2,$$

где v_1 и v_2 — значения скоростей потока в сечениях S_1 и S_2.

Уравнение Бернулли. Для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости справедливо уравнение

$$p_1+\rho gh_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\rho gh_2+\frac{\rho v_2^2}{2},$$

где ρ — плотность жидкости; p_1 — статическое давление в сечении S_1; v_1 — скорость жидкости в сечении S_1; h_1 — высота данного сечения трубы над определенным уровнем. Соответственно p_2, v_2 и h_2 определяют давление, скорость и высоту в сечении S_2. Величина $\rho v^2/2$ называется динамическим давлением.

С энергетической точки зрения давление p есть работа внешних сил, совершаемая над единицей объема жидкости; ρgh и $\rho v^2/2$ — потенциальная и кинетическая энергия жидкости, заключенной в этом объеме.

Скорость вытекания жидкости из малого отверстия в стенке широкого открытого сосуда равна

$$v = \sqrt{2gh},$$

где h — высота поверхности жидкости над отверстием.

Мощность потока. Поток жидкости сечением S, текущей со скоростью v и падающей с высоты h, обладает мощностью

$$N = \frac{mv^2}{2t} + \frac{mgh}{t} = \frac{\rho S v^3}{2} + \rho S v g h.$$

Вязкая среда. Формула Стокса. Сила сопротивления F вязкой среды (жидкости, газа) безвихревому движению в ней шара радиусом r с постоянной скоростью v направлена противоположно скорости и определяется формулой

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где η — коэффициент внутреннего трения, или вязкость. В СИ вязкость измеряется в кг · м$^{-1}$с$^{-1}$.

Скорость v равномерного падения малого шарика радиусом r и плотностью ρ в вязкой жидкости с плотностью $\rho_ж$ и вязкостью η вычисляется по формуле

$$v = g\frac{\rho - \rho_ж}{\eta}\frac{2r^2}{9},$$

где g — ускорение свободного падения.

Течение по капилляру. Объем V жидкости с вязкостью η, протекающей в единицу времени по капиллярной трубке радиусом r и длиной l, при разности давлений $p_1 - p_2$ на концах трубки определяется выражением

$$V = \frac{1}{\eta}\frac{\pi r^4}{8l}(p_1 - p_2).$$

5.1. На границе раздела двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 плавает шар так, что отношение объемов погруженных в жидкости частей шара равно $V_1/V_2 = n$. Найти плотность вещества шара.

По условию плавания тел вес шара равен весу вытесненных объемов жидкостей

$$\rho_ш g V_ш = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 = \rho_1 g \frac{nV_ш}{n+1} + \rho_2 g \frac{V_ш}{n+1}.$$

Отсюда

$$\rho_ш = \frac{\rho_1 n + \rho_2}{n+1}.$$

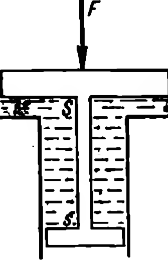


Рис. 169

5.2. Жидкость находится между двумя поршнями (рис. 169), жестко связанными друг с другом. Площади поршней равны S и s, причем $S \neq s$. На верхний поршень действует сила F. Найти давление в жидкости (в пренебрежении весом жидкости и поршней, а также атмосферным давлением).

На поршни действуют силы F, pS и ps. Сила pS направлена вверх, сила ps направлена вниз. Так как система находится в равновесии, то

$$F + ps - pS = 0,$$

откуда

$$p = \frac{F}{S - s}.$$

5.3. Сплошное однородное тело, погруженное в жидкость с плотностью ρ_1, весит P_1, а в жидкость с плотностью ρ_2 — весит P_2. Найти плотность вещества тела.

По закону Архимеда

$$P_1 = g(\rho - \rho_1) V; \quad P_2 = g(\rho - \rho_2) V,$$

где V — объем тела.

Отсюда

$$\rho = \frac{P_2\rho_1 - P_1\rho_2}{P_2 - P_1}.$$

В случае $P_1 = P_2$ получается, что $\rho_1 = \rho_2$ и найти плотность ρ невозможно.

5.4. В полый куб с ребром a налита доверху жидкость плотностью ρ. Найти силу давления жидкости на дно и боковые грани куба.

Гидростатическое давление на глубине a равно ρga. Так как площадь дна равна a^2, то сила давления на дно равна ρga^3. Среднее давление на боковые грани равно полусумме давлений на уровне поверхности и на уровне дна, т. е. $\rho ga/2$, а соответствующая сила давления равна $\rho ga^3/2$.

5.5. Резиновый мяч с массой m и радиусом R погружают в воду на глубину h и отпускают. Найти высоту, на которую подпрыгнет мяч в воздухе.

Согласно закону Архимеда и закону сохранения энергии

$$mgy = (M - m) gh,$$

где M — масса воды в объеме мяча; y — искомая высота.

Отсюда

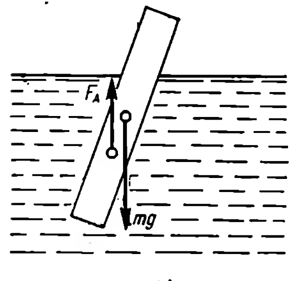
$$y = \frac{(M - m) h}{m} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho - m\right) h}{m}.$$

5.6. Деревянный брусок квадратного сечения с ребром a, массой m и длиной l опущен в воду вертикально. Однако он сразу же переходит в горизонтальное положение. Объяснить это.

У плавающего бруска центр тяжести лежит выше точки приложения выталкивающей архимедовой силы F_A, так как последняя приложена к центру тяжести погруженной части (рис. 170). Поэтому незначительное отклонение бруска от вертикали приводит к появлению вращающего момента пары сил, поворачивающего брусок в горизонтальное положение. Таким образом, вертикальное положение является неустойчивым. Что касается горизонтального положения, то, если мы выведем из него брусок, отклонив его на малый угол α, то наряду с парой mg и F_A появится пара F_1, F_2, стремящаяся вернуть брусок

в равновесное горизонтальное положение. Силы F_1 и F_2 появляются за счет заштрихованных объемов и пропорциональны площадям заштрихованных треугольников, т. е. пропорциональны $\frac{l}{2}\frac{la}{2}$. Их плечи равны приблизительно $l/3$ каждое. Так как толщина бруска равна a, то момент пары F_1, F_2 пропорционален al^3a.

Силы F_A и mg пропорциональны a^2l, а их плечи пропорциональны aa, так что момент этой пары пропорционален a^3la. Отношение обоих моментов пропорционально l^2/a^2, т. е. значительно больше единицы. Поэтому равновесие устойчивое.



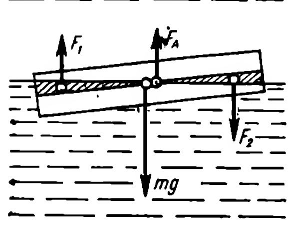


Рис. 170

5.7. Корабль на воздушной подушке имеет вес P. Вытесняет ли он из-под себя воду и если да, то в каком объеме?

Пусть днище корабля — плоское (рис. 171) и его площадь равна S. Для того чтобы корабль не падал, он должен испытывать снизу избыточное давление Δp такой величины, чтобы

$$\Delta pS = P.$$

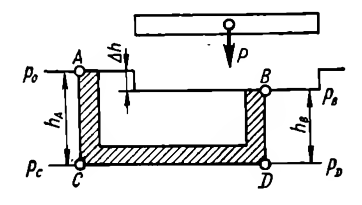


Рис. 171

Такое же избыточное давление испытывает и вода в пределах площади днища корабля. Выделим в воде объем $ACDB$ указанной на рисунке формы (как бы «сообщающиеся сосуды») и рассмотрим поведение жидкости в нем.

По законам гидростатики, в точках C и D, находящихся на одном уровне, давления должны быть одинаковыми, т. е. $p_C = p_D$:

$$p_C = p_0 + \rho g h_A; \quad p_D = p_B + \rho g h_B = p_0 + \Delta p + \rho g h_B.$$

Отсюда следует, что

$$h_A > h_B \text{ и } \Delta h = h_A - h_B = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

Весь «вытесненный» объем

$$V = \Delta h S = \frac{\Delta p S}{\rho g} = \frac{P}{\rho g},$$

т. е. равен объему воды, который бы вытеснил корабль весом P согласно закону Архимеда, если бы он поплыл.

5.8. Однородный деревянный стержень длиной l одним концом лежит на опоре (рис. 172), а другим — погружен в воду. Длина участка, выступающего за опору, равна a. Плотность древесины равна ρ. Найти длину погруженной части.

На стержень действуют сила тяжести P и выталкивающая сила P_A, приложенная к геометрическому центру погруженной части. Так как стержень находится в равновесии, то сумма моментов относительно точки A равна нулю:

$$P_1 (l - a - x/2) \cos \alpha = P (l/2 - a) \cos \alpha,$$

где $P_1 = \rho_0 S x$; $P = \rho l S$; S — площадь поперечного сечения стержня; ρ_0 — плотность воды.

Отсюда

$$x = (l - a) \pm \sqrt{(l - a)^2 - \frac{\rho}{\rho_0} l (l - 2a)}.$$

Так как $x < (l - a)$, то следует выбрать знак минус.

5.9. Жидкость весом P и плотностью ρ налита в два конических сосуда (рис. 173), площади дна которых равны S_1 и S_2. Уровень жидкости находится на высоте H. Найти силу, с которой жидкость действует на стенки сосудов в обоих случаях.

В случае рис. 173, *а* на жидкость действуют: сила тяжести P, направленная вниз; реакция дна, равная силе давления жидкости на дно сосуда $\rho g H S$ и направленная вверх; реакция боковой стенки, равная искомой силе R и направленная вверх в результате векторного сложения реакций от противоположных участков стенки (реакция перпендикулярна стенке).

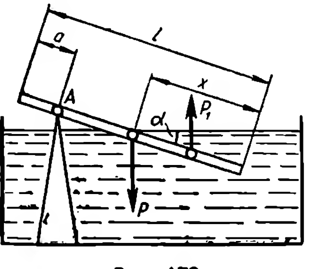


Рис. 172

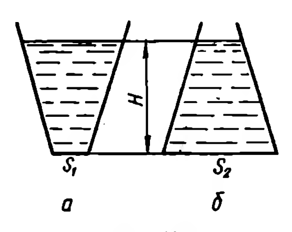


Рис. 173

Следовательно,

$$R_1 = P - \rho g H S_1.$$

В случае рис. 173, *б* реакция боковой стенки направлена вниз. Поэтому

$$R_2 = \rho g H S_2 - P.$$

5.10. В жидкостях с плотностями ρ_1 и ρ_2 вес тела равен P_1 и P_2 соответственно. Найти вес тела в жидкости с плотностью ρ_3.

По условию

$$\left.\begin{aligned} P - \rho_1 g V &= P_1; \\ P - \rho_2 g V &= P_2; \\ P - \rho_3 g V &= P_3. \end{aligned}\right\}$$

Здесь P — вес тела в воздухе; P_3 — искомый вес. Из этой системы уравнений находим

$$P_3 = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} P_1 - \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_1 - \rho_2} P_2.$$

5.11. В цилиндрический сосуд с площадью дна S налита жидкость с плотностью ρ. В сосуд опущено тело произвольной формы с массой m, которое не тонет. Найти изменение уровня жидкости.

При опускании тела в сосуд сила давления на дно возрастает на величину mg. Величину подъема уровня обозначим Δh. Приращение давления воды $\Delta p = \rho g \Delta h$, а приращение силы давления $\Delta F = \Delta p S$. Тогда

$$S\Delta p = S\rho g \Delta h = mg,$$

откуда

$$\Delta h = \frac{m}{\rho S}.$$

5.12. Слиток сплава двух металлов с плотностями ρ_1 и ρ_2 весит в воздухе P_1, а в воде — P_2. Найти вес каждого из металлов в слитке.

Величина архимедовой силы, действующей на слиток в воде

$$F_A = P_1 - P_2,$$

так что объем слитка

$$V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g},$$

где $\rho_в$ — плотность воды.

Объем, занимаемый металлом с плотностью ρ_1, обозначим через x, объем, занимаемый вторым металлом,— через $V - x$. Вес слитка в воздухе

$$P_1 = \rho_1 g x + \rho_2 g (V - x) = \rho_1 g x + \rho_2 g \left[\frac{P_1 - P_2}{\rho_в g} - x\right],$$

откуда

$$x = \frac{\rho_2 (P_1 - P_2) - \rho_в P_1}{\rho_в g (\rho_2 - \rho_1)}; \qquad V - x = \frac{\rho_1 (P_2 - P_1) + \rho_в P_1}{\rho_в g (\rho_2 - \rho_1)}.$$

Вес каждого из металлов равен соответственно $\rho_1 g x$ и $\rho_2 g (V - x)$. Сумма весов, очевидно, равна P_1.

5.13. Аэростат, наполненный газом с плотностью ρ_1, имеет подъемную силу F_1. Найти подъемную силу, если наполнить аэростат газом с плотностью ρ_2. Вес оболочки равен P.

При заполнении аэростата газом с плотностью ρ_1 подъемная сила

$$F_1 = (\rho_в - \rho_1) Vg - P,$$

где $\rho_в$ — плотность воздуха; V — объем аэростата, заполненного газом. Отсюда

$$V = \frac{F_1 + P}{g(\rho_в - \rho_1)}.$$

При заполнении аэростата газом с плотностью ρ_2 подъемная сила

$$F_2 = (\rho_в - \rho_2) Vg - P = \frac{(\rho_в - \rho_2)(F_1 + P)}{\rho_в - \rho_1} - P = \frac{\rho_в - \rho_2}{\rho_в - \rho_1} F_1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_в - \rho_1} P.$$

5.14. Найти зависимость выталкивающей силы Архимеда F_A от глубины погружения.

Плотности жидкости и вещества погружаемого тела равны $\rho_ж$ и $\rho_т$. Выталкивающая сила

$$F_A = \rho_ж V_т = \rho_ж \frac{P_т}{\rho_т},$$

где $P_т$ — вес тела.

Так как $P_т = \text{const}$, то F_A меняется с глубиной только в том случае, если изменяются плотности жидкости и тела.

5.15. Найти выражение для потенциальной энергии тела, погруженного в жидкость.

На тело действует сила тяжести P и выталкивающая сила F_A. Работа по погружению тела с массой ρVg на глубину h равна

$$(P - F_A) h = (\rho - \rho_ж) gVh.$$

Эта работа и служит мерой потенциальной энергии погруженного тела.

5.16. Полый шар с плотностью материала ρ_1 плавает на поверхности жидкости с плотностью ρ_2. Найти плотность вещества, которым следует заполнить полость, чтобы шар находился в безразличном равновесии внутри жидкости. Радиус шара равен R_1, радиус полости — R_2.

Условием безразличного равновесия является равенство веса всего шара и веса жидкости в объеме шара, т. е.

$$\frac{4}{3}\pi\rho_1 (R_1^3 - R_2^3) + \frac{4}{3}\pi\rho_x R_2^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_2 R_1^3,$$

откуда

$$\rho_x = \frac{(\rho_2 - \rho_1) R_1^3 + \rho_1 R_2^3}{R_2^3}.$$

5.17. Тело с плотностью материала ρ падает с высоты H в жидкость с плотностью ρ_1 $(\rho < \rho_1)$. Найти глубину погружения и время подъема тела на поверхность.

Подъемная сила $T = \rho_1 Vg - mg$, где V — объем тела; m—масса тела. Энергия падающего тела в момент касания поверхности жидкости равна mgH. Эта энергия затрачивается на работу погружения тела на глубину l

$$mgH = Tl = (\rho_1 gV - mg)\, l.$$

Так как $m = \rho V$, то

$$\rho VgH = g(\rho_1 V - \rho V) l,$$

откуда

$$l = \frac{\rho H}{\rho_1 - \rho}.$$

Время определяем по формуле $l = at^2/2$, откуда $t = \sqrt{2l/a}$. Величина $a = T/m = g(\rho_1 - \rho)/\rho$. Подставляя выражения для l и a в формулу для t, находим

$$t = \frac{\rho}{\rho_1 - \rho} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

5.18. Через небольшую пробоину в трюме судна бьет струя воды. Один человек не в состоянии преодолеть силу струи, чтобы закрыть отверстие доской. Однако, когда с помощью товарища доска была наложена, человек оказался в состоянии удержать доску. Почему?

Скорость истечения струи $v = \sqrt{2gh}$. Импульс силы $F\Delta t$, действующей со стороны стенки на струю, равен Δmv, где $\Delta m = \rho Sv\Delta t$ — масса воды, вытекающей за время Δt. Поэтому сила давления струи F, бьющей из отверстия, равна

$$F = \rho v^2 S = 2\rho ghS,$$

где S — сечение отверстия.

Когда отверстие было закрыто доской, на доску стала действовать статическая сила

$$f = \rho ghS = \frac{F}{2}.$$

5.19. На гладкой горизонтальной поверхности стоит широкий сосуд с водой. Уровень воды в сосуде — h, вес сосуда с водой — Q. В боковой стенке у дна сосуда имеется заткнутое отверстие с площадью S. Найти, при каком значении коэффициента трения между дном и поверхностью сосуд придет в движение, если вынуть затычку.

Из предыдущей задачи известно, что сила давления струи равна $2\rho ghS$. Так как давление у дна равно $\rho gh = p$, то $F = 2pS$. Такая же сила действует со стороны струи на стенку сосуда, противоположную отверстию. Сосуд начнет двигаться, если $kQ < 2pS$ или $k < 2\rho ghS/Q$.

5.20. Сосуд с жидкостью падает с ускорением $a < g$. Как меняется давление p с глубиной?

В неподвижном сосуде зависимость давления от глубины определяется формулой

$$p = \rho gh.$$

Ускоренно движущийся сосуд представляет собой неинерциальную систему, движущуюся с ускорением a. В такой системе g следует заменить на $g - a$. Поэтому

$$p = \rho(g - a)h.$$

Если $a = g$, то наступает состояние невесомости, при котором $p = 0$.

5.21. Из трубы сечением S_1 бьет вертикально вверх струя воды. Найти сечение струи на высоте h над отверстием трубы. Расход воды из трубы равен Q.

Уравнение Бернулли для данного случая:

$$\rho v_1^2/2 = \rho v_2^2/2 + \rho g h,$$

где v_1 — скорость воды в сечении S_1; v_2 — скорость в сечении струи S_2 на высоте h.

Уравнение неразрывности

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q.$$

Отсюда находим v_1 и v_2 и подставляем в уравнение Бернулли

$$\frac{Q^2}{S_1^2} = \frac{Q^2}{S_2^2} + 2gh,$$

откуда

$$S_2 = \frac{QS_1}{\sqrt{Q^2 - 2ghS_1^2}}.$$

5.22. Труба сечением S образует прямоугольное колено. По трубе течет поток газа со скоростью v. Плотность газа ρ. Найти силу давления газа на трубу.

Количество движения газа, проходящего через колено, меняется только по направлению. Изменение количества движения за единицу времени равно $m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \rho S v (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$, причем $|v_2| = |v_1| = v$. Это изменение равно силе F, действующей со стороны трубы на газ. Так как $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_1$ направлены под углом 90° друг к другу и численно равны, то $|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = v\sqrt{2}$ и $F = \rho S v^2 \sqrt{2}$. Такая же сила, согласно третьему закону Ньютона, действует со стороны газа на трубу.

5.23. Площадь поршня в шприце равна S_1, а площадь отверстия на выходе — S_2. Ход поршня равен l. На поршень действует сила F. Найти скорость и время вытекания воды из шприца, если он расположен горизонтально, а скорость поршня — постоянна.

Обозначим скорость движения поршня через v_1, скорость вытекающей струи—через v_2; h_1, p_1 и h_2, p_2—уровни воды и давления у поршня и на выходе иглы соответственно.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$p_1 + \rho g h_1 + \rho v_1^2/2 = p_2 + \rho g h_2 + \rho v_2^2/2.$$

По условию

$$h_1 = h_2; \quad p_1 = \frac{F}{S_1} + p_{атм}; \quad p_2 = p_{атм}.$$

Тогда

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Условие неразрывности струи

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Из этих двух уравнений находим

$$\frac{F}{S_1}+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 v_2^2=\frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

откуда

$$v_2=\sqrt{\frac{2FS_1}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}.$$

При $S_2 \ll S_1$

$$v_2\approx\sqrt{\frac{2F}{\rho S_1}}.$$

Объем жидкости, вытекающей из шприца, равен объему шприца, т. е.

$$S_2v_2t=S_1v_1t=S_1l.$$

Отсюда

$$t=\frac{S_1l}{S_2v_2}=\frac{S_1l}{S_2}\sqrt{\frac{\rho(S_1^2-S_2^2)}{2FS_1}}.$$

Так как $S_2 \ll S_1$,

$$t\approx\frac{S_1l}{S_2}\sqrt{\frac{\rho S_1}{2F}}.$$

5.24. В дне цилиндрического сосуда диаметром D имеется малое круглое отверстие диаметром d. Найти зависимость скорости v_1 понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня.

Обозначим площади поперечных сечений сосуда и отверстия через S_1 и S_2, а скорость вытекания воды из отверстия — через v_2. Запишем уравнение Бернулли и уравнение неразрывности потока

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+\rho gh=\frac{\rho v_2^2}{2},$$

или

$$v_1^2+2gh=v_2^2;\quad S_1v_1=S_2v_2,$$

откуда

$$v_2=\frac{v_1S_1}{S_2}.$$

Решая оба уравнения совместно относительно v_1, находим

$$v_1=\frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2-S_2^2}}=\frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4-d^4}}.$$

Так как $d^4 \ll D^4$, то

$$v_1\approx\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}.$$

5.25. Сопло фонтана, дающего вертикальную струю высотой H, имеет форму усеченного конуса, сужающегося кверху. Диаметр верхнего сечения — d, диаметр нижнего — D, высота сопла — h. Найти расход воды Q за 1 с и избыточное давление Δp в нижнем сечении (насколько это давление больше атмосферного).

Расход Q воды в 1 с равен объему V воды, протекающей за 1 с через любое сечение S. Скорость воды, протекающей через верхнее сечение, найдем по высоте подъема воды в поле силы тяжести:

$$v_2 = \sqrt{2gH},$$

тогда

$$V = v_2 S_2 = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gH}.$$

Уравнение Бернулли в применении к обоим сечениям:

$$\underset{\text{(верхнее)}}{\rho g h + \rho v_2^2/2 + p_{\text{атм}}} = \underset{\text{(нижнее)}}{\rho v_1^2/2 + p}.$$

Отсюда

$$\Delta p = p - p_{\text{атм}} = \rho g h + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Уравнение неразрывности дает возможность найти скорость v_1 в нижнем сечении

$$v_1 = \frac{v_2 S_2}{S_1} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gH}.$$

Окончательно

$$\Delta p = \rho g h + \rho g H\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

ТЕПЛОТА

6. Уравнения состояния. Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика

Уравнения состояния идеального газа. Состояние любого тела характеризуется совокупностью нескольких физических величин, называемых параметрами состояния. Параметрами состояния газа являются объем V, давление p, температура T. Уравнение, связывающее между собой параметры состояния, называется уравнением состояния.

Идеальным газом называется газ, размерами молекул которого по сравнению с его объемом можно пренебречь и в котором силы взаимодействия между молекулами пренебрежимо малы.

Для идеальных газов справедливы следующие эмпирические законы.

Закон Бойля — Мариотта

$$pV = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

при $T = \text{const}$, $m = \text{const}$ (m — масса газа; T — абсолютная температура).

Закон Гей-Люссака

$$V = V_0\left(1 + \frac{1}{273}t\right) \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

при $p = \text{const}$, $m = \text{const}$ (V_0 — объем газа при 0° С; t — температура, °С).

Закон Шарля

$$p = p_0\left(1 + \frac{1}{273}t\right) \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

при $m = \text{const}$, $V = \text{const}$ (p_0 — давление при 0° С).

Эти три соотношения можно рассматривать как уравнения состояния соответственно при изотермическом ($T = \text{const}$), изобарическом ($p = \text{const}$) и изохорическом ($V = \text{const}$) процессах.

В общем случае идеальные газы подчиняются уравнению состояния Клапейрона — Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

где m — масса газа; μ — масса одного киломоля газа; m/μ — число киломолей газа; R — универсальная газовая постоянная. В СИ $R = 8{,}31 \cdot 10^3$ Дж/(кмоль·К).

Молекулярной массой M данного вещества называют массу m_x молекулы этого вещества, выраженную в атомных единицах массы (а. е. м.). В качестве атомной единицы массы принята 1/12 часть массы изотопа углерода ^{12}C:

$$M = \frac{m_x}{m_C/12}.$$

Киломолем называют такое количество вещества, масса которого в килограммах численно равна молекулярной массе ($\mu = M$) этого вещества.

Закон Авогадро. В одном киломоле (килоатоме) любого вещества содержится $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{26}$ молекул (атомов). N_A называется числом Авогадро.

Закон Дальтона. Давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений, т. е. давлений, которые имел бы каждый из газов в отдельности, если бы он при данной температуре один занимал весь объем.

Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n_0 \overline{E} = \frac{2}{3} n_0 \frac{m_0 v_{с.\,к}^2}{2},$$

где P — давление; n_0 — число молекул в единице объема; $\overline{E}$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул; m_0 — масса молекулы; $v_{с.\,к}$ — средняя квадратичная скорость молекул.

Число молекул в единице объема определяется по формуле

$$n_0 = \frac{p}{kT},$$

где $k = R/N_A$ — постоянная Больцмана, равная $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; p — давление.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул

$$\overline{E} = \frac{3}{2} kT.$$

Средняя квадратичная скорость мелекул

$$v_{с.\,к} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Средняя арифметическая скорость молекул

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Средняя длина свободного пробега молекул

$$l = \frac{kT}{\pi \sqrt{2} p d^2},$$

где $m_0=\mu/N_A$ — масса молекулы; p — давление; d — диаметр молекулы.

Теплопроводность — процесс передачи теплоты посредством хаотического теплового движения молекул или атомов. Количество теплоты, переданное слоем вещества толщиной Δl и площадью S при поддерживании на его поверхностях разности температур ΔT за время t, равно

$$Q=\lambda\frac{\Delta T}{\Delta l}St,$$

где коэффициент теплопроводности λ численно равен количеству теплоты, переданному за 1 с через слой толщиной 1 м и площадью поверхностей 1 м² при разности температур поверхностей 1 К.

Коэффициент теплопроводности вычисляется по формуле

$$\lambda=\frac{1}{3}\rho\bar{v}lc_V,$$

где ρ — плотность газа; $\bar{v}$ — средняя скорость молекул газа; c_V — теплоемкость при постоянном объеме; l — длина свободного пробега.

Диффузия — процесс выравнивания концентраций, обусловленный переносом вещества посредством молекулярного движения. Масса вещества M, перенесенного за время t через слой толщиной Δl и площадью S при поддерживании на его поверхностях разности концентраций ΔC, равна

$$M=D\frac{\Delta C}{\Delta l}St,$$

где коэффициент диффузии D численно равен массе диффундирующего вещества, переданного через слой толщиной 1 м при разности концентраций на его поверхностях в одну единицу. Коэффициент диффузии вычисляется по формуле

$$D=\frac{1}{3}\bar{v}l,$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость молекул газа; l — длина свободного пробега.

Внутреннее трение (вязкость). При относительном параллельном смещении слоев жидкости или газа возникают силы трения, тормозящие движение слоев, движущихся с бóльшей скоростью, и ускоряющие слои, движущиеся с меньшей скоростью. Причиной вязкости является перенос количества движения (импульса) молекулами, переходящими из одного слоя в другой.

Сила внутреннего трения

$$F=\eta\frac{\Delta v}{\Delta l}S,$$

где $\Delta v/\Delta l$ — отношение разности скоростей слоев к расстоянию между ними; S — площадь соприкосновения слоев.

Коэффициент внутреннего трения η численно равен силе трения, возникающей между двумя слоями с площадью 1 м² при отношении $\Delta v/\Delta l$, равном единице, и вычисляется по формуле

$$\eta=\frac{1}{3}\rho\bar{v}l,$$

где ρ — плотность газа; $\bar{v}$ — средняя скорость молекул газа; l — длина свободного пробега.

Последние шесть соотношений справедливы при условии, что длина пробега молекул меньше размеров сосуда.

Энергия теплового движения молекул (внутренняя энергия газа)

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT,$$

где i — число степеней свободы молекулы. Числом степеней свободы называется число независимых координат, определяющих положение тела в пространстве. Для одноатомной молекулы $i = 3$, для двухатомной $i = 5$, для молекулы, состоящей из трех или более атомов, $i = 6$.

Теплоемкость. Удельной теплоемкостью c называется количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг вещества на 1°. Она измеряется в Дж/(кг·К).

Молярной теплоемкостью C называется количество теплоты, необходимое для нагревания одного киломоля вещества на 1°.

Связь между молярной и удельной теплоемкостями:

$$C = \mu c.$$

Молярная теплоемкость газа:
при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2}R;$$

при постоянном давлении (уравнение Майера)

$$C_p = \frac{i+2}{2}R = C_V + R.$$

Первое начало термодинамики (закон сохранения энергии в термодинамике)

$$\Delta Q = \Delta U + A,$$

где ΔQ — количество теплоты, полученной газом; ΔU — изменение внутренней энергии газа; A — работа, совершаемая газом при изменении его объема.

Если температура идеального газа с массой m изменяется на ΔT, его внутренняя энергия изменяется на величину

$$\Delta U = c_V m\Delta T = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Если при постоянном давлении p газ нагревается на $\Delta T = T_2 - T_1$, то его объем возрастает от V_1 до V_2 и газ совершает работу

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V.$$

Применим первое начало совместно с уравнением Клапейрона — Менделеева к каждому из процессов.

При изобарическом процессе ($\Delta p = 0$)

$$A = p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Если в процессе изобарического расширения к газу подводилось тепло, то согласно первому началу

$$\Delta Q = \Delta U + A = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T =$$
$$= \frac{m}{\mu} C_p \Delta T = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R \Delta T.$$

При изотермическом процессе ($\Delta T = 0$) все тепло, получаемое газом, идет на выполнение работы, так как в этом случае $\Delta U = 0$

$$\Delta Q = A.$$

Работа при изотермическом расширении газа определяется по формуле

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

При изохорическом процессе ($\Delta V = 0$) все тепло, получаемое газом, идет на изменение внутренней энергии последнего

$$\Delta Q = \Delta U.$$

В этом случае $A = 0$.

Количество теплоты, получаемое или отдаваемое газом при изохорическом процессе, может быть определено по формуле

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T = \frac{i}{2} R \frac{m}{\mu} \Delta T.$$

При изменении объема газа без теплообмена с окружающей средой (адиабатический процесс) давление p и объем V постоянной массы газа связаны уравнением Пуассона

$$pV^{\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = c_p/c_V$.

При адиабатическом процессе ($\Delta Q = 0$) работа производится за счет внутренней энергии газа, т. е. $p\Delta V = -\Delta U$. Таким образом, при расширении газ охлаждается и наоборот. Работа в этом случае определяется соотношением

$$A = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T = \frac{mRT_1}{\mu(\gamma - 1)} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right],$$

где T_1 и V_1 — первоначальные значения температуры и объема газа; V_2 — объем газа в конце процесса.

Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — тепло, полученное от нагревателя; Q_2 — тепло, отданное холодильнику.

Для идеального цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника.

6.1. Объем баллона, содержащего газ под давлением $p_1 = 1{,}2 \cdot 10^5$ Па, составляет $V_1 = 6$ л. Каким станет давление p_2 газа в баллоне, если его соединить с другим баллоном объемом $V' = 10$ л, практически не содержащим газа (температура остается постоянной)?

Так как процесс протекает при постоянной температуре, к газу может быть применен закон Бойля — Мариотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

где $V_2 = V_1 + V_1'$.

Отсюда

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = 0{,}45 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

6.2. В баллон емкостью $V = 12$ л поместили $m_1 = 1{,}5$ кг азота при температуре $t_1 = 327°$ С. Какое давление p_2 будет создавать азот в баллоне при температуре $t_2 = 50°$ С, если 35% азота будет выпущено? Каково было начальное давление p_1?

Напишем уравнения состояния газа для обоих случаев:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1;$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2;$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1}{m_2 T_2};$$

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu} \frac{R T_1}{V} = 2{,}2 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

причем

$$m_2 = m_1 - 0{,}35 m_1 = 0{,}65 m_1;$$

$$p_2 = \frac{0{,}65 p_1 T_2}{T_1} = 7{,}7 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

6.3. На дне сосуда, заполненного воздухом, лежит полый стальной шарик радиусом $r = 2$ см. Масса шарика $m_ш = 5$ г. До какого давления p надо сжать воздух в сосуде, чтобы шарик поднялся вверх? Считать, что воздух при больших давлениях подчиняется уравнению газового состояния. Температура воздуха $t = 20°$ С $=$ const (сжатие воздуха происходит достаточно медленно).

Шарик поднимется вверх в том случае, если сила тяжести будет уравновешиваться силой Архимеда

$$m_ш g \leqslant \rho g V_ш,$$

где ρ — плотность воздуха, которая может быть найдена из уравнения Клапейрона — Менделеева $\rho = p\mu/RT$.

Следовательно,

$$m_ш \leqslant \frac{p\mu}{RT} V_ш,$$

откуда

$$p > \frac{m_ш RT}{V_ш \mu} = \frac{3}{4} \frac{m_ш RT}{\pi r^3 \mu} = 125{,}6 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

6.4. При нагревании газа на 1 К при постоянном давлении его объем увеличился на 0,005 первоначального. При какой температуре находился газ?

Так как процесс изобарический, применим закон Гей-Люссака $V_1/V_2 = T_1/T_2$.

По условию задачи

$$V_2 = 1{,}005 V_1;\ T_2 = T_1 + \Delta T;\ \Delta T = 1.$$

Отсюда

$$\frac{V_1}{1{,}005 V_1} = \frac{T_1}{T_1 + 1};\ T_1 = \frac{1}{0{,}005} = 200 \text{ К}.$$

6.5. Газообразный кислород массой $m = 10$ г находится под давлением $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па при температуре $t_1 = 10°$ С. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении газ занял объем $V_2 = 10$ л. Найти объем и плотность газа до расширения; температуру и плотность газа после расширения.

Для того чтобы найти объем газа до расширения, воспользуемся уравнением Клапейрона — Менделеева $p_1 V_1 = m/\mu R T_1$:

$$V_1 = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{P_1} = 2{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Плотность газа до расширения

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = 4{,}14 \text{ кг/м}^3.$$

Температуру газа после расширения можно найти, применив закон Гей-Люссака $V_1/V_2 = T_1/T_2$:

$$T_2 = \frac{V_2 T_1}{V_1} = 1170 \text{ К}.$$

Плотность газа после расширения

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = 1 \text{ кг/м}^3.$$

6.6. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом баллоне газ находится под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, во втором — под давлением $p_2 = 1{,}2 \cdot 10^5$ Па. Емкость первого баллона $V_1 = 2$ л, второго — $V_2 = 6$ л. Температура газа в обоих баллонах одинакова. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран?

До открытия крана в каждом из баллонов справедливо уравнение состояния $p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu}RT$; $p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu}RT$.

После открытия крана в обоих баллонах установилось одинаковое давление p:

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{\mu}RT;$$

$$p(V_1 + V_2) = p_1V_1 + p_2V_2;$$

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 1{,}4 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

6.7. Внутри плотно закупоренной бутылки находится гелий с массой m при температуре T_1 и давлении p_1, равном атмосферному. До какой температуры нагрелся газ, если при давлении p_2 пробка вылетела? Каков объем бутылки? С какой силой давит газ на пробку в момент ее вылета? Атмосферное давление — p_0. Сечение отверстия бутылки — S.

Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для газа до и после нагревания

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1; \; p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2.$$

В нашем случае

$$V_1 = V_2; \; p_1 = p_0;$$

$$\frac{p_0}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}; \; T_2 = T_1\frac{p_0}{p_2};$$

$$V_1 = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{p_0}.$$

Силу можно определить по формуле

$$F = p_2S.$$

6.8. На какой глубине радиус пузырька воздуха вдвое меньше, чем у поверхности воды, если барометрическое давление у поверхности равно p_0?

Так как температура остается неизменной, к газу можно применить закон Бойля — Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$.

Из условия задачи $p_1 = p_0$ находим $p_2 = p_0 + \rho gh$, где ρgh — гидростатическое давление жидкости.

Объем пузырька воздуха:

у поверхности

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3;$$

на глубине h

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}V_1.$$

После подстановки найдем

$$p_0V_1 = (p_0 + \rho gh)\frac{1}{8}V_1,$$

откуда

$$h = \frac{7p_0}{\rho g}.$$

6.9. Цилиндр с газом разделен на четыре камеры тремя навесными поршнями (рис. 174). В каждой секции находится газ, состояние которого характеризуется параметрами $p_1V_1T_1$; $p_2V_2T_1$; $p_3V_3T_1$; $p_4V_4T_1$. Каковы будут объемы и давления в каждой секции после того, как освободить поршни и дать им возможность свободно двигаться, а температуру изменить до T_2?

Поршни установятся в положении, при котором давления во всех четырех камерах станут одинаковыми и равными p. Запишем для каждой камеры закон Клапейрона — Менделеева:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{pV_1'}{T_2}; \quad \frac{p_2V_2}{T_1} = \frac{pV_2'}{T_2};$$

$$\frac{p_3V_3}{T_1} = \frac{pV_3'}{T_2}; \quad \frac{p_4V_4}{T_1} = \frac{pV_4'}{T_2},$$

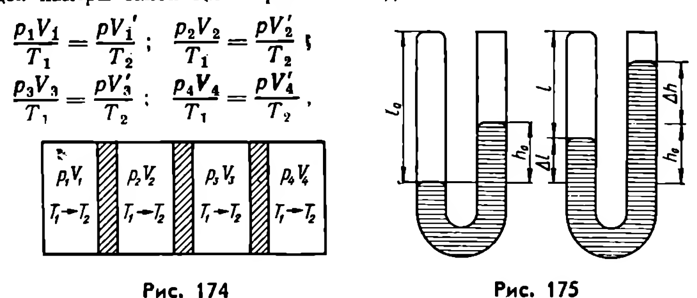


Рис. 174

Рис. 175

причем

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V_1' + V_2' + V_3' + V_4'.$$

Очевидно, что

$$\frac{p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3 + p_4V_4}{T_1} = \frac{p(V_1' + V_2' + V_3' + V_4')}{T_2};$$

$$p = \frac{(p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3 + p_4V_4)\,T_2}{T_1(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)};$$

$$V_1' = \frac{p_1V_1(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3 + p_4V_4};$$

$$V_2' = \frac{p_2V_2(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3 + p_4V_4};$$

$$V_3' = \frac{p_3V_3(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3 + p_4V_4};$$

$$V_4' = \frac{p_4V_4(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3 + p_4V_4}.$$

6.10. В U-образной трубке, запаянной с одного конца, высота столба воздуха $l_0 = 300$ мм, а высота столба ртути $h_0 = 110$ мм (рис. 175). В правое колено долили столько ртути, что ее уровень поднялся на $\Delta h = 40$ мм. Насколько поднялся уровень ртути в левом колене? Атмосферное давление $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па (760 мм рт. ст.).

Изменение объема и давления газа, находящегося в левом колене, происходит при постоянной температуре, следовательно, процесс изотермический. Для изотермического процесса воспользуемся законом Бойля — Мариотта

$$p_1V_1 = p_2V_2; \qquad (*)$$

$$p_1 = p_0 + \rho g h_0; \quad h = h_0 + \Delta h;$$

$$V_1 = l_0S; \quad p_2 = p_0 + \rho g (h_0 + \Delta h) = p_0 + \rho g h; \; V_2 = lS.$$

Подставляя эти выражения в (*), получаем

$$(p_0 + \rho g h_0)\, l_0 S = [p_0 + \rho g (h_0 + \Delta h)]\, lS;$$

$$l = \frac{(p_0 + \rho g h_0)\, l_0}{p_0 + \rho g (h_0 + \Delta h)} \approx 287 \text{ мм};$$

$$\Delta l = l_0 - l \approx 13 \text{ мм}.$$

6.11. Баллон емкостью V, наполненный газом при давлении p и температуре T, взвесили, причем его вес оказался равным P. Из баллона откачали часть газа, после чего давление упало до p_1 при той же температуре. Вес баллона в этом случае оказался равным P_1. Определить плотность газа при нормальных условиях.

Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для трех состояний газа:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT; \qquad (1)$$

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu} RT; \qquad (2)$$

$$p_0V_0 = \frac{m}{\mu} RT_0. \qquad (3)$$

Масса газа в баллоне до откачки

$$m = \frac{P - P_б}{g},$$

где $P_б$ — вес пустого баллона.

Аналогично после откачки

$$m_1 = \frac{P_1 - P_б}{g}.$$

После подстановки значений масс в (1) и (2) соответственно получим

$$pV = \frac{P - P_б}{\mu g} RT; \qquad (4)$$

$$p_1V = \frac{P_1 - P_б}{\mu g} RT. \qquad (5)$$

Из (3) находим

$$\frac{m}{V_0} = \frac{p_0\mu}{RT_0} = \frac{p_0}{T_0}\frac{\mu}{R} = \rho_0. \qquad (6)$$

Вычитая (5) из (4) и пользуясь (6), находим

$$(p-p_1)V=\frac{R}{\mu g}[T(P-P_6)-T(P_1-P_6)];$$

$$\frac{\mu}{R}=\frac{T(P-P_1)}{(p-p_1)Vg};$$

$$\rho_0=\frac{p_0}{T_0}\frac{T(P-P_1)}{(p-p_1)Vg}.$$

6.12. В комнате объемом $V_1=60$ м³ температура поднялась с $t_1=17$ до $t_2=27°$ С. Давление при этом изменилось от $p_1=1{,}03\times10^5$ до $p_2=1{,}06\cdot10^5$ Па (среднюю массу одного киломоля воздуха принять равной $\mu=29$ кг/кмоль). На какую величину Δm изменилась масса воздуха в комнате?

Уравнения Клапейрона — Менделеева для первого и второго состояний газа:

$$p_1V=\frac{m_1}{\mu}RT_1;$$

$$p_2V=\frac{m_2}{\mu}RT_2,$$

где m_1 и m_2 — соответствующие массы воздуха, содержащегося в комнате.

Из вышеприведенных уравнений получаем

$$\Delta m=m_1-m_2=\frac{\mu p_1V}{RT_1}-\frac{\mu p_2V}{RT_2}=\frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_1}{T_1}-\frac{p_2}{T_2}\right)\approx0{,}384\text{ кг}.$$

6.13. Плотность пара некоторого соединения углерода с водородом равна $\rho=3$ кг/м³ при температуре 43° С и давлении $99\cdot10^3$ Па. Какова молекулярная формула этого соединения?

Из уравнения Клапейрона — Менделеева

$$pV=\frac{m}{\mu}RT;\quad \rho=\frac{m}{V}=\frac{p\mu}{RT};$$

$$\mu=\frac{\rho RT}{p}=72\text{ кг/кмоль}.$$

Формула соединения — C_xH_y, причем $12x+y=72$. Очевидно, что молекулярный вес, равный 72 кг/кмоль, имеет вещество с формулой C_5H_{12}.

6.14. Определить температуру газа, находящегося в закрытом баллоне, если его давление увеличилось на 0,4% первоначального при нагревании на $\Delta T=1$ К.

Запишем уравнения состояния газа в обоих случаях, учитывая, что объем и масса неизменны:

$$p_1V=\frac{m}{\mu}RT_1;$$

$$p_2V=\frac{m}{\mu}RT_2;$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1};\ p_2=p_1+kp_1=p_1(1+k),$$

где k — доля, на которую изменилось первоначальное давление при нагревании,

$$T_2 = T_1 + \Delta T;$$

$$(1+k) = \frac{T_1 + \Delta T}{T_1};$$

$$T_1 = \frac{\Delta T}{k} = 250 \text{ К}.$$

6.15. Сколько ртути войдет в стеклянный баллончик объемом V_0, нагретый до температуры t_0, при его остывании до t_1, если плотность ртути при t_1 равна ρ (рис. 176)?

Процесс протекает при постоянном давлении. Этому случаю соответствует закон Гей-Люссака $\frac{V_0}{V_1} = \frac{T_0}{T_1}$, где V_0 — объем газа, содержащегося в баллончике при температуре T_0, V_1 — при температуре T_1.

Рис. 176

Изменение объема газа

$$\Delta V = V_0 - V_1 = V_0\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right).$$

Масса ртути, соответствующая этому изменению,

$$m = \rho\Delta V = \rho V_0\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right).$$

6.16. Тонкостенный резиновый шар собственным весом $P = 0{,}6$ Н наполнен неоном и погружен в озеро на глубину $h = 120$ м. Найти массу неона, если шар находится в положении равновесия. Атмосферное давление $p_0 = 1{,}03 \cdot 10^5$ Па, температура в глубине озера $t = +4^\circ$ С. Натяжением резины пренебречь.

Если шар находится в равновесии, то силы тяжести шара и неона в нем уравновешиваются силой Архимеда

$$mg + P = \rho g V,$$

где m — масса неона; ρ — плотность воды; V — объем шара.

Уравнение состояния газа:

$$(p_0 + \rho g h)\, V = \frac{m}{\mu} RT,$$

где $p_0 + \rho g h$ — давление на глубине h.

Из этих двух уравнений получаем

$$\frac{mg + P}{\rho g} = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{(p_0 + \rho g h)};$$

$$\rho g m R T = \mu (p_0 + \rho g h)\, mg + \mu (p_0 + \rho g h)\, P;$$

$$m = \frac{\mu (p_0 + \rho g h)\, P}{\rho g R T - \mu (p_0 + \rho g h)\, g} \approx 0{,}0007 \text{ кг}.$$

6.17. По газопроводной трубе идет углекислый газ при давлении $p = 4{,}9 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 21^\circ$ С. Какова скорость v движения газа в трубе, если за время $\tau = 10$ мин протекает $m = 3$ кг углекислого газа, а площадь сечения трубы $S = 5$ см^2?

Объем газа, протекающего через поперечное сечение трубы за время τ, равен

$$V = vS\tau.$$

Зная, что в этом объеме содержится масса m углекислого газа, и используя уравнение Клапейрона — Менделеева, можно найти

$$pV = \frac{m}{\mu} RT;$$

$$V = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{p},$$

откуда

$$v = \frac{V}{S\tau} = \frac{mRT}{\mu S\tau p} = 0{,}104 \text{ м/с}.$$

6.18. Стеклянная запаянная с одного конца трубка длиной $l = 20$ см, содержащая некоторое количество воздуха, погружена в ртуть так, что над поверхностью выступает $l_1 = 15$ см трубки. Уровень ртути в трубке при 0° C выше уровня ртути в сосуде на $h_1 = 5$ см. На сколько градусов нужно было бы нагреть воздух в трубке, чтобы он мог занять весь объем трубки? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, уровень ртути в сосуде считать неизменным (рис. 177).

До нагревания состояние воздуха в трубке можно характеризовать параметрами p_1; V_1; T_1, где $p_1 = p_0 - \rho g h_1$; $V_1 = S(l_1 - h_1)$; $T_1 = 273$ K.

После нагревания состояние воздуха определяется параметрами p_2, V_2, T_2, где $p_2 = p_0 + \rho g h_2 = p_0 + \rho g (l - l_1)$; $V_2 = Sl$.

Из уравнения Клапейрона — Менделеева для этих состояний получаем

$$T_2 = \frac{p_2 V_2 T_1}{p_1 V_1} = \frac{(p_0 + \rho g h_2) lST_1}{(p_0 - \rho g h_1) S (l_1 - h_1)} =$$

$$= \frac{[p_0 + \rho g (l - l_1)] lT_1}{(p_0 - \rho g h_1)(l_1 - h_1)} \approx 623 \text{ K};$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 \approx 350 \text{ K}.$$

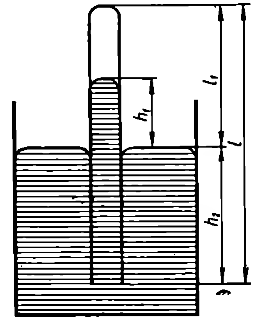


Рис. 177

6.19. Вертикально расположенный цилиндрический сосуд разделен на две равные части тяжелым теплонепроницаемым поршнем, который может скользить без трения. В верхней половине находится m_1 граммов водорода при температуре T_1, в нижней части — m_2 граммов кислорода при температуре T_2. Сосуд перевернули. Чтобы поршень по-прежнему делил сосуд на две равные части, водород пришлось нагреть до температуры T_3. Температура кислорода осталась прежней. Определить, до какой температуры необходимо было нагреть водород и каково давление водорода в первом и втором случаях, если вес поршня — P, его сечение — S.

Поршень будет находиться в равновесии в том случае, когда

$$p_1 + p_п = p_2;$$

$$p_2 + p_п = p_1',$$

где p_1 — давление водорода при температуре T_1; p_2 — давление кислорода при температуре T_2; p_1' — давление водорода при температуре T_3; $p_п$ — давление, оказываемое на газ поршнем.

Уравнения Клапейрона — Менделеева для водорода и кислорода:

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu_1} RT_1;$$

$$p_2V = \frac{m_2}{\mu_2} RT_2;$$

$$p_1'V = \frac{m_1}{\mu_1} RT_3.$$

Решая полученные уравнения, находим

$$\left.\begin{aligned} p_п = p_2 - p_1 = \frac{R}{V}\left(\frac{m_2}{\mu_2}T_2 - \frac{m_1}{\mu_1}T_1\right); \\ p_п = p_1' - p_2 = \frac{R}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1}T_3 - \frac{m_2}{\mu_2}T_2\right). \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Приравняв правые части, имеем

$$\frac{m_2}{\mu_2}T_2 - \frac{m_1}{\mu_1}T_1 = \frac{m_1}{\mu_1}T_3 - \frac{m_2}{\mu_2}T_2;$$

$$T_3 = \frac{2m_2\mu_1}{\mu_2 m_1}T_2 - T_1.$$

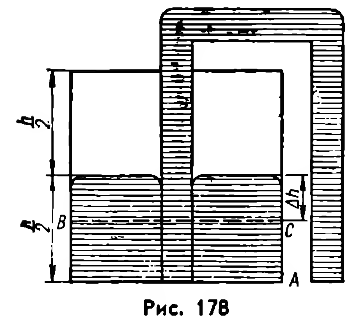


Рис. 178

Из (*) получаем

$$V = \frac{R}{p_п}\left(\frac{m_2}{\mu_2}T_2 - \frac{m_1}{\mu_1}T_1\right) = \frac{RS}{P}\left(\frac{m_2}{\mu_2}T_2 - \frac{m_1}{\mu_1}T_1\right).$$

Таким образом,

$$p_1 = \frac{m_1T_1P\mu_2}{S(m_2\mu_1T_2 - m_1\mu_2T_1)};$$

$$p_1' = 2p_п + p_1 = \frac{2P}{S} + p_1.$$

6.20. Цилиндрический сосуд был до половины наполнен ртутью, после чего герметически закрыт крышкой с пропущенной через нее сифонной трубкой (рис. 178). Высота сосуда $h = 80$ см. Сифон, заранее наполненный ртутью, имеет равные вертикальные участки, один из которых кончается у дна сосуда. При каком давлении в сосуде прекратится истечение жидкости через сифон? Насколько понизится уровень ртути в сосуде за время истечения? Внешнее давление $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па.

Истечение жидкости через сифон будет продолжаться до тех пор, пока давление, создаваемое этой жидкостью на уровне A внутри трубки, будет больше атмосферного.

Пусть уровень ртути в сосуде понизился на Δh и при этом давление воздуха в сосуде стало p_1. Очевидно, такое же давление установится и в трубке на уровне BC, соответствующем свободной поверхности ртути в сосуде.

Давление p_A, создаваемое ртутью на уровне A, слагается из давления p_1 и давления столба ртути AC, равного $\rho g(h/2-\Delta h)$, т. е.

$$p_A = p_1 + \rho g\left(\frac{h}{2} - \Delta h\right),$$

где $h/2$ — начальная высота уровня ртути в сосуде.

По мере понижения уровня ртути давления p_1 и p_A будут уменьшаться и в момент прекращения истечения ртути $p_A = p_0$. Отсюда давление воздуха в сосуде в момент прекращения истечения ртути

$$p_1 = p_0 - \rho g\left(\frac{h}{2} - \Delta h\right).$$

По условию задачи в начальный момент давление воздуха в сосуде — p_0; объем — $V_0 = \frac{h}{2}S$. В момент прекращения истечения

$$V_1 = \left(\frac{h}{2} + \Delta h\right)S.$$

Из закона Бойля — Мариотта $p_0V_0 = p_1V_1$ получим

$$p_0\frac{h}{2} = \left[p_0 - \rho g\left(\frac{h}{2} - \Delta h\right)\right]\left(\frac{h}{2} + \Delta h\right),$$

откуда

$$\Delta h^2 + \frac{p_0}{\rho g}\Delta h - \frac{h^2}{4} = 0;$$

$$\Delta h_{12} = \frac{1}{2\rho g}\left[-p_0 \pm \sqrt{p_0^2 + h^2\rho^2 g^2}\right];$$

$$\Delta h \approx 17{,}2 \text{ см},$$

$$p_1 = 0{,}78 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

6.21. Компрессор захватывает при каждом качании $V_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3 воздуха при нормальном атмосферном давлении p_0 и температуре $t_0 = -3°$ С и нагнетает его в резервуар емкостью $V = 2$ м^3, причем температура воздуха в резервуаре поддерживается равной $t = -53°$ С. Сколько качаний должен сделать компрессор, чтобы давление в резервуаре увеличилось на $\Delta p = 4 \cdot 10^5$ Па?

Пусть до начала работы компрессора давление в резервуаре было p_1, а масса воздуха — m_1. Уравнение состояния в этом случае имеет вид $p_1V = \frac{m_1}{\mu}RT_1$. После нагнетания масса воздуха в резервуаре стала равной m_2, а давление — p_2. Следовательно, уравнение состояния в

этом случае $p_2V = \frac{m_2}{\mu} RT_1$. Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$V\Delta p = \frac{\Delta m}{\mu} RT_1;$$

$$\Delta m = \frac{\mu V \Delta p}{RT_1},$$

где $\Delta p = p_2 - p_1$; $\Delta m = m_2 - m_1$ — масса воздуха, перенесенного в резервуар компрессором за N качаний. Число качаний N может быть определено как $N = \Delta m / m_0$, где m_0 — масса воздуха, переносимая за одно качание. Ее можно найти из уравнения для порции воздуха, захватываемой при одном качании,

$$p_0V_0 = \frac{m_0}{\mu} RT_0,$$

$$m_0 = \frac{p_0V_0\mu}{RT_0}.$$

Таким образом,

$$N = \frac{V \Delta p T_0}{T_1 p_0 V_0} \approx 1964 \text{ качания.}$$

6.22. В чашечный барометр попал пузырек воздуха, вследствие чего барометр показывает давление, меньшее истинного. При сверке его с точным барометром оказалось, что при атмосферном давлении $p_{a1} = 768$ мм рт. ст.* барометр показывает $p_1 = 748$ мм рт. ст., причем расстояние от уровня ртути до верхнего основания трубки $h_1 = 80$ мм. Каково истинное давление, если барометр показывает $p_2 = 734$ мм рт. ст. (температура воздуха та же)?

Если при атмосферном давлении p_{a1} барометр показывает давление p_1, то давление воздуха в пузырьке $p_{в1} = p_{a1} - p_1 = 20$ мм рт. ст.

При изменении атмосферного давления давление воздуха в пузырьке станет равным

$$p_{в2} = p_{a2} - p_2.$$

Так как изменение давления и объема пузырька воздуха происходит при постоянной температуре, можно использовать уравнение Бойля — Мариотта

$$p_{в1}V_1 = p_{в2}V_2,$$

где объемы пузырька воздуха соответственно равны

$$V_1 = Sh_1; \; V_2 = Sh_2;$$

$$(p_{a1} - p_1)\, Sh_1 = (p_{a2} - p_2)\, Sh_2;$$

$$h_2 = (h_1 + h_{рт1} - h_{рт2}) = 94 \text{ мм}$$

---

* 1 мм рт. ст. = 133 Па.

($h_{рт1}$ и $h_{рт2}$ — высоты столбиков ртути в барометре);

$$p_{a2} = \frac{(p_{a1} - p_1) h_1 + p_2 h_2}{h_2} \approx 751 \text{ мм рт. ст.} \approx 10^5 \text{ Па}.$$

6.23. В большой сосуд с водой опрокинут стеклянный стакан (рис. 179). Уровень воды внутри и вне стакана одинаков. Расстояние от дна стакана до уровня воды равно l. Температура воздуха — T_1, атмосферное давление — p_{01}. На какую высоту h изменится уровень воды в стакане при понижении температуры до T_2 и повышении атмосферного давления до p_{02}? Изменением уровня воды в сосуде пренебречь.

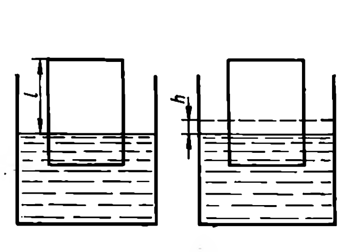


Рис. 179

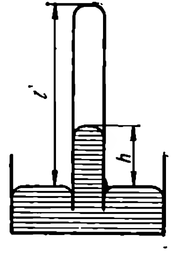


Рис. 180

Запишем уравнения состояния газа для обоих случаев:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1;$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2;$$

$$p_1 = p_{01};$$

$$p_2 = p_{02} - p_h,$$

где $p_h = g\rho h$ — гидростатическое давление, оказываемое столбом воды высотой h.

Из вышенаписанных уравнений получаем

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Так как $V_1 = Sl$; $V_2 = S(l - h)$, где S — сечение стакана, то

$$\frac{p_1 l}{p_2 (l - h)} = \frac{T_1}{T_2}; \quad \frac{p_{01} l}{(p_{02} - \rho g h)(l - h)} = \frac{T_1}{T_2};$$

$$p_{01} l T_2 = T_1 p_{02} l - T_1 \rho g h l - T_1 p_{02} h + T_1 \rho g h^2;$$

$$h^2 \rho g T_1 - h(\rho g l + p_{02}) T_1 + l(T_1 p_{02} - T_2 p_{01}) = 0;$$

$$h_{1,2} = \frac{1}{2}\left(l + \frac{p_{02}}{\rho g}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(l - \frac{p_{02}}{\rho g}\right)^2 + \frac{4 l p_{01} T_2}{\rho g T_1}}.$$

При обычных атмосферных давлениях порядка 10^5 Па $l \ll \frac{p_{02}}{\rho g}$; кроме того, второе слагаемое под корнем меньше первого. Поэтому выражение для $h_{1,2}$ следует взять со знаком «—» перед корнем, так как в противном случае значение h окажется порядка десятков метров.

6.24. Барометрическая трубка опущена в сосуд с ртутью (рис. 180). Уровень ртути выше, чем в сосуде, на h. Насколько нужно опустить трубку, чтобы уровни ртути в сосуде и трубке сравнялись, если в начальном положении непогруженная часть трубки была l, а атмосферное давление — p_0?

В результате опускания трубки давление в ней изменилось до p_0. Для изотермического процесса можно применить уравнение Бойля — Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$:

$$p_1 + \rho gh = p_0; \quad p_2 = p_0;$$
$$V_1 = (l - h)\,S; \quad V_2 = l_1 S,$$

где S — сечение трубки. Подставив эти выражения, получим:

$$(p_0 - \rho gh)(l - h)\,S = p_0 l_1 S;$$
$$l_1 = \frac{(p_0 - \rho gh)(l - h)}{p_0};$$
$$\Delta l = l - l_1 = l - \frac{(p_0 - \rho gh)(l - h)}{p_0} = \frac{\rho gh\,(l - h) + hp_0}{p_0}.$$

6.25. Оболочка воздушного шара с массой m и объемом V на 8/9 заполнена водородом при температуре T_1 и давлении p_1. Какая масса водорода выйдет из оболочки и как изменится подъемная сила водорода, наполняющего оболочку, на высоте, где давление и температура равны p_2 и T_2 (при подъеме водород может выходить через отверстие в нижней части оболочки)?

Уравнения состояния водорода в обоих случаях имеют вид:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu_H} RT_1;$$
$$p_2V = \frac{m_2}{\mu_H} RT_2,$$

где $V_1 = \frac{8V}{9}$;

$$m_1 = \frac{\mu_H p_1 V_1}{RT_1}; \quad m_2 = \frac{\mu_H p_2 V}{RT_2};$$
$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{\mu_H V}{R}\left[\frac{8p_1}{9T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right].$$

В первом случае подъемная сила

$$F_1 = F_A - P_1 - P_0,$$

где F_A — сила Архимеда; P_1 — вес водорода, содержащегося в оболочке; P_0 — вес оболочки.

$$F_A = \rho_в gV, \quad P_1 = \rho_H gV_1 = m_1 g,$$

где ρ_H, $\rho_в$ — плотности водорода и воздуха при температуре T_1 и давлении p_1.

Плотность воздуха при различных p и T может быть выражена из уравнения Клапейрона — Менделеева в виде

$$\rho_в = \frac{p\mu_в}{RT}.$$

При этом

$$F_1 = Vg\frac{p_1\mu_в}{RT_1} - m_1 g - m_0 g.$$

Аналогично во втором случае

$$F_2 = Vg\frac{p_2\mu_в}{RT_2} - m_2 g - m_0 g.$$

Отсюда

$$\Delta F = F_1 - F_2 = \frac{Vg\mu_в}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) - (m_1 - m_2)g =$$

$$= \frac{Vg\mu_в}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) - \frac{\mu_H Vg}{R}\left[\frac{8p_1}{9T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right] =$$

$$= \frac{Vg}{R}\left[\mu_в\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) - \mu_H\left(\frac{8p_1}{9T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)\right].$$

6.26. Цилиндрический сосуд с газом разделен поршнем на две камеры. Состояние газа в обеих камерах характеризуется соответственно параметрами p_1, V_1, T_1 и p_2, V_2, T_2. При каком давлении поршень будет находиться в равновесии, если его освободить, газ в первой камере нагреть, а во второй — охладить на ΔT (нагревом поршня пренебречь)?

Поршень находится в равновесии, когда давление в обеих камерах одинаково.

Запишем уравнения состояния для газа в каждой камере:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{pV_1'}{T_1 + \Delta T}; \quad \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{pV_2'}{T_2 - \Delta T_2},$$

причем $V_1' + V_2' = V_1 + V_2$.

Решая полученную систему уравнений, находим

$$\frac{(V_1 + V_2 - V_2')(T_2 - \Delta T)}{V_2'(T_1 + \Delta T)} = \frac{p_1V_1T_2}{T_1p_2V_2};$$

$$V_2' = \frac{(V_1 + V_2)(T_2 - \Delta T)T_1p_2V_2}{(T_1 + \Delta T)p_1V_1T_2 + (T_2 - \Delta T)T_1p_2V_2};$$

$$V_1' = \frac{(V_1 + V_2)(T_1 + \Delta T)p_1V_1T_2}{(T_1 + \Delta T)p_1V_1T_2 + (T_2 - \Delta T)T_1p_2V_2};$$

$$p = \frac{p_1V_1(T_1 + \Delta T)}{V_1'T_1} = \frac{(T_1 + \Delta T)p_1V_1T_2 + (T_2 - \Delta T)T_1p_2V_2}{T_1T_2(V_1 + V_2)}.$$

6.27. Трубка имеет вид перевернутой буквы П (рис. 181). Горизонтальная часть трубки длиной l заполнена ртутью. Вертикальные участки имеют высоту H_1. Один из них запаян сверху и содержит воздух при атмосферном давлении. С какой скоростью нужно вращать трубку вокруг открытого вертикального участка, чтобы в запаянном участке ртуть поднялась до половины его высоты? Атмосферное давление — p_1.

При вращении вокруг оси OO' столбик ртути, находящийся в горизонтальной части трубки, будет перемещаться в запаянный участок до тех пор, пока сила давления со стороны воздуха и вошедшего столбика ртути не достигнет такой величины, которая обеспечивает горизонтальному столбику ртути необходимое центростремительное ускорение.

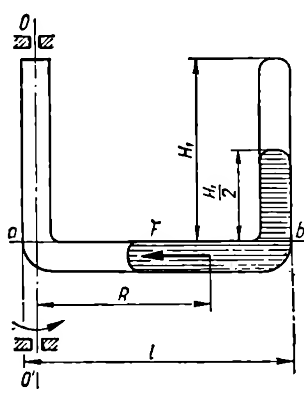


Рис. 181

В процессе смещения столбика ртути происходит изотермическое сжатие воздуха в закрытом колене, следовательно, для решения задачи можно использовать уравнение Бойля — Мариотта $p_1H_1 = p_2H_2$, где p_1, H_1 — давление и высота столбика воздуха, занимающего весь вертикальный участок; p_2, $H_2 = H_1/2$ — давление и высота столбика воздуха, занимающего половину участка. Таким образом,

$$p_1H_1 = p_2\frac{H_1}{2}; \quad p_2 = 2p_1.$$

Следовательно, давление на уровне ab

$$p = p_2 + \rho g\frac{H_1}{2} = 2p_1 + \rho g\frac{H_1}{2},$$

где $\rho g\frac{H_1}{2}$ — гидростатическое давление столбика ртути высотой $H_1/2$. Согласно закону Паскаля, на горизонтальный столбик ртути действует сила

$$F = pS = \left(2p_1 + \rho g\frac{H_1}{2}\right)S, \qquad (*)$$

где S — площадь поперечного сечения трубки. Эта сила и будет играть роль центростремительной силы

$$F = m\omega^2R = 4\pi^2n^2mR, \qquad (**)$$

где m — масса ртути, оставшейся в горизонтальной части трубки; ω — угловая скорость; n — число оборотов в единицу времени; R — расстояние центра тяжести ртути в горизонтальной части до оси вращения.

Из (*) и (**) получим

$$4\pi^2n^2mR = \left(2p_1 + \rho g\frac{H_1}{2}\right)S;$$

$$n^2 = \frac{\left(2p_1 + \rho g\frac{H_1}{2}\right)S}{4\pi^2mR}.$$

Величины m и R можно представить в виде

$$m = \rho S\left(l - \frac{H_1}{2}\right); \quad R = \frac{1}{2}\left(l - \frac{H_1}{2}\right),$$

так как ртуть вначале занимала всю горизонтальную часть трубки, а потом — половину ($H_1/2$) ее вертикального участка.

Таким образом,

$$n^2 = \frac{\left(2p_1 + \rho g \frac{H_1}{2}\right)}{0{,}5\,\rho\left(l^2 - \frac{H_1^2}{4}\right)4\pi^2} = \frac{4p_1 + \rho g H_1}{\left(4l^2 - H_1^2\right)\rho\pi^2}.$$

6.28. В стеклянную манометрическую трубку, запаянную с одного конца, налита ртуть. Высота столба воздуха в запаянном колене равна $3H$, причем ртуть в открытом колене стоит на H выше, чем в закрытом. Найти разность уровней в коленах манометра, если он установлен в лифте, который: опускается с ускорением $0{,}5g$ (рис. 182, *а*); поднимается с ускорением $0{,}5g$ (рис. 182, *б*) (в лифте поддерживается нормальное атмосферное давление p_a).

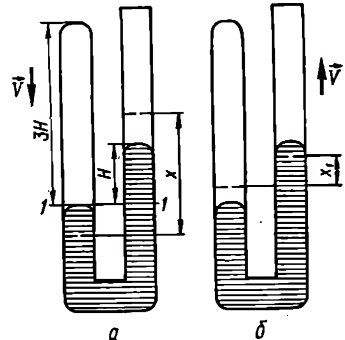


Рис. 182

При ускоренном движении вниз вес тела уменьшается: $P = mg - ma$, где g — ускорение свободного падения; a — ускорение, с которым движется тело.

При ускоренном движении вверх $P = mg + ma$, следовательно, и удельный вес в системе, движущейся ускоренно вниз, будет не ρg, а $\rho(g - a)$, а в системе, движущейся вверх, — $\rho(g + a)$. Аналогичные явления происходят и в манометре.

Как только лифт начнет ускоренно опускаться, давление столбика ртути уменьшится вследствие уменьшения удельного веса ртути, и ртуть станет переходить из закрытого колена в открытое до тех пор, пока давление воздуха в закрытом колене не будет уравновешено атмосферным давлением и давлением вновь установившегося столбика ртути. Таким образом, при ускоренном движении вниз происходит изотермическое расширение воздуха. Так как в процессе расширения масса газа не меняется, можно применить уравнение Бойля — Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$, где $V_1 = 3HS$; $V_2 = SH_2$. Отсюда $p_1 3H = p_2H_2$, причем $p_1 = p_a + \rho g H$, $p_2 = p_a + \rho(g - a)x$, где x — разность уровней во время движения.

Как видно из чертежа, высота столба воздуха при опускании может быть выражена следующим образом:

$$H_2 = 3H + \frac{x - H}{2} = 2{,}5H + \frac{x}{2},$$

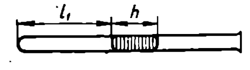
Согласно закону Паскаля

$$p_1 = p;$$
$$p_2 = p - \rho g h;$$
$$p_3 = p + \rho g h;$$
$$p_4 = p - \rho g h \cos\alpha;$$
$$p_5 = p + \rho g h \cos\alpha.$$

Отсюда

$$l_2 = \frac{p l_1}{p - \rho g h};$$
$$l_3 = \frac{p l_1}{p + \rho g h};$$
$$l_4 = \frac{p l_1}{p - \rho g h \cos\alpha};$$
$$l_5 = \frac{p l_1}{p + \rho g h \cos\alpha}.$$

6.31. При нагревании газа были получены графики зависимости давления (рис. 185, *а*) и объема (рис. 185, *б*) от абсолютной температуры. Как изменились в первом случае объем, а во втором — давление?



Из рис. 185, *а* видно, что $p_2/T_2 < p_1/T_1$. В данном случае справедливо также уравнение состояния $p_1V_1/T_1 =$

а б в г

Рис. 184

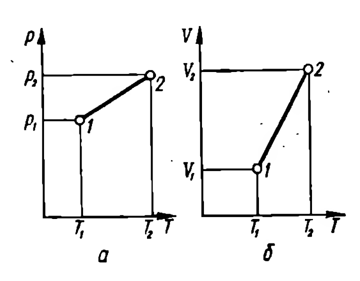


Рис. 185

$= p_2V_2/T_2$. Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы $V_1 < V_2$.

Из рис. 185, *б* видно, что $V_2/T_2 > V_1/T_1$. Для того чтобы уравнение состояния при этом условии имело смысл, необходимо, чтобы $p_2 < p_1$.

6.32. Два сосуда, содержащие одинаковые массы одного газа, соединены трубкой с краном. В первом сосуде давление $p_1 = 5 \cdot 10^3$ Н/м², во втором — $p_2 = 8 \cdot 10^3$ Н/м². Какое давление установится после открытия крана, если температура останется неизменной?

следовательно,

$$(p_a+\rho g H)\,3H=[p_a+\rho(g-a)x]\left(2{,}5H+\frac{x}{2}\right).$$

Если учесть, что

$$p_a=\rho g H_0,\quad a=0{,}5g,$$

где H_0 — высота ртутного столба в барометре, то

$$\rho g(H_0+H)\,3H=[\rho g H_0+0{,}5\rho g x]\left(2{,}5H+\frac{x}{2}\right).$$

Отсюда получаем квадратное уравнение $x^2+x(5H+2H_0)-2H(H_0+6H)=0$, решив которое, найдем

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-2H_0-5H\pm\sqrt{73H^2+28HH_0+4H_0^2}\right).$$

Берем перед корнем знак «+», так как x — положительное число.

При ускоренном подъеме лифта давление столба ртути в открытом колене манометра возрастает, ртуть будет переливаться в закрытое колено до тех пор, пока давление воздуха не уравновесится суммой атмосферного давления и давления установившегося в данном случае столбика ртути высотой x_1.

Таким образом, при ускоренном подъеме лифта происходит изотермическое сжатие воздуха. Для этого процесса также можно использовать уравнение Бойля — Мариотта $p_1 3H=p_3 H_3$.

Здесь

$$p_3=p_a+\rho(g+a)x_1,$$

где x_1 — разность уровней ртути в поднимающемся манометре; H_3 — высота столба воздуха в движущемся манометре, которая, как следует из чертежа, может быть представлена, как $H_3=3H-\frac{H-x_1}{2}$, $\left(\frac{H-x_1}{2}\right.$ численно равно смещению уровней ртути от начального положения$\left.\right)$.

Подставив p_3 и H_3 в уравнение Бойля — Мариотта, получаем снова квадратное уравнение

$$(p_a+\rho g H)\,3H=[p_a+\rho(g+a)x_1]\left(3H-\frac{H-x_1}{2}\right),$$

решив которое, найдем

$$x_1=\frac{1}{6}\left(\sqrt{369H^2+84HH_0+4H_0^2}-15H-2H_0\right).$$

6.29. Посередине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки находится столбик ртути длиной h (рис. 183). Если трубку поставить под углом α к горизонту, то столбик ртути переместится на Δl_1; если ее поставить вертикально, — то на Δl_2. До какого давления откачан воздух из трубки?

В процессе перемещения трубки из горизонтального положения в вертикальное газ в нижней части трубки будет сжиматься, а в верхней — расширяться.

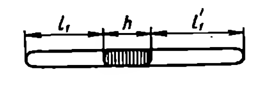
Рассмотрим три состояния газа в нижней части трубки: первое — при горизонтальном положении трубки, второе — при наклонном, третье — при вертикальном. Первое состояние характеризуется параметрами p_1 и $V_1 = l_1 S$; второе — p_2 и $V_2 = l_2 S$; третье — p_3 и $V_3 = l_3 S$.

По условию задачи масса газа, заключенного в нижней и верхней частях трубки, и его температура не меняются. Применяя закон Бойля — Мариотта к каждой паре состояний, можно записать:

$$p_1 l_1 = p_2 l_2; \quad p_1 l_1 = p_3 l_3.$$

Учитывая, что в первом состоянии объемы и давления газа в обеих частях одинаковы, для газа, заключенного в верхней части, получаем

$$p_1 l_1 = p_2' l_2'; \quad p_1 l_1 = p_3' l_3'.$$



Исходя из условия задачи, можно записать

$$l_2 = l_1 - \Delta l_1; \quad l_3 = l_1 - \Delta l_2;$$
$$l_2' = l_1 + \Delta l_1; \quad l_3' = l_1 + \Delta l_2.$$

Кроме того,

$$p_2 = p_2' + \rho g h \cos\alpha; \quad p_3 = p_3' + \rho g h,$$

где h — длина столбика ртути; ρ — плотность ртути.

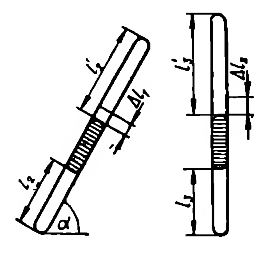


Рис. 183

Подставляя вышеприведенные выражения в уравнение закона Бойля — Мариотта, находим

$$p_1 l_1 = (p_2' + \rho g h \cos\alpha)(l_1 - \Delta l_1);$$
$$p_1 l_1 = (p_3' + \rho g h)(l_1 - \Delta l_2);$$
$$p_1 l_1 = p_2'(l_1 + \Delta l_1);$$
$$p_1 l_1 = p_3'(l_1 + \Delta l_2).$$

Решив уравнения относительно p_1, получим

$$p_1 = \rho g h \left[\sqrt{\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}\frac{(\Delta l_2 - \Delta l_1 \cos\alpha)}{(\Delta l_1 - \Delta l_2 \cos\alpha)}} - \sqrt{\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1}\frac{(\Delta l_1 - \Delta l_2 \cos\alpha)}{(\Delta l_2 - \Delta l_1 \cos\alpha)}}\right].$$

6.30. В запаянной с одного конца узкой стеклянной трубке, расположенной горизонтально, находится столбик воздуха длиной l_1, закрытый столбиком ртути длиной h (рис. 184). Атмосферное давление равно p. Какой будет длина воздушного столбика, если трубку расположить: *а* — вертикально отверстием вверх; *б* — вертикально отверстием вниз; *в* — под углом α к горизонту отверстием вниз; *г* — то же отверстием вверх?

Так как изменение состояния газа, находящегося в объеме, закрытом столбиком ртути, происходит при неизменных массе и температуре, для каждого состояния может быть применен закон Бойля — Мариотта. Учитывая, что площадь сечения трубки одна и та же, можно записать

$$p_1 l_1 = p_2 l_2; \quad p_1 l_1 = p_3 l_3;$$
$$p_1 l_1 = p_4 l_4; \quad p_1 l_1 = p_5 l_5.$$

Напишем уравнение состояния газа для каждого из сосудов (до открытия крана) и для всего объема, занимаемого газом, после открытия крана:

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT; \quad p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT;$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{2m}{\mu}RT,$$

где V_1, V_2 — объемы сосудов; m — масса газа в каждом из них.

Из первых двух уравнений найдем выражения для V_1 и V_2 и подставим их в третье уравнение:

$$p\left(\frac{\frac{m}{\mu}RT}{p_1} + \frac{\frac{m}{\mu}RT}{p_2}\right) = \frac{2m}{\mu}RT,$$

или

$$p\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) = 2,$$

$$p = \frac{2p_1p_2}{p_2 + p_1} = 6153 \text{ Н/м}^2.$$

6.33. В закрытом сосуде емкостью $V = 2$ м^3 находится $m_1 = 2{,}7$ кг воды и $m_2 = 3{,}2$ кг кислорода. Найти давление в сосуде при температуре $t = 527°$ С, зная, что в этих условиях вся вода превращается в пар (считать, что пар в данном случае подчиняется законам идеального газа).

При температуре 527° С в сосуде будет находиться смесь газов. Согласно закону Дальтона давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений $p = p_1 + p_2$.

Парциальные давления можно определить с помощью уравнений Клапейрона — Менделеева

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT; \quad p_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT.$$

Давление в сосуде

$$p = p_1 + p_2 = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V} = 8{,}31 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

6.34. Найти плотность воздуха при давлении $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 13°$ С, считая, что в воздухе содержится 23,6 вес. % кислорода (O_2) и 76,4 вес. % азота (N_2). Найти парциальные давления кислорода и азота при этих условиях.

Согласно закону Дальтона, давление смеси равно сумме парциальных давлений компонентов $p = p_1 + p_2$.

Уравнение Клапейрона — Менделеева для каждого из компонентов:

$$p_{O_2}V = \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}}RT;$$

$$p_{N_2}V = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}}RT.$$

Складывая приведенные равенства, находим

$$(p_{O_2} + p_{N_2}) V = \left(\frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}} + \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}}\right) RT.$$

По условию задачи $m_{O_2} = 0{,}236\ m$; $m_{N_2} = 0{,}764\ m$, где m — масса смеси.

Следовательно, плотность

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p_0}{\left(\frac{0{,}236}{\mu_{O_2}} + \frac{0{,}764}{\mu_{N_2}}\right) RT} = 1{,}21\ \text{кг/м}^3.$$

Парциальные давления кислорода и азота

$$p_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{V\mu_{O_2}} RT = \frac{0{,}236}{\mu_{O_2}} \rho RT \approx 0{,}213 \cdot 10^5\ \text{Н/м}^2;$$

$$p_{N_2} = \frac{0{,}764}{\mu_{N_2}} \rho RT \approx 0{,}787 \cdot 10^5\ \text{Н/м}^2.$$

6.35. В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью диссоциирован на атомы, давление равно p (диссоциацией водорода пренебречь). При температуре $3T$, когда оба газа полностью диссоциированы, давление в сосуде равно $4p$. Каково отношение масс водорода и азота в смеси?

Давление смеси равно сумме парциальных давлений азота и водорода

$$p = p_{1а} + p_{1в}.$$

Записав уравнение состояния для каждой из компонент смеси

$$p_{1а} V = \frac{m_а}{\frac{\mu_а}{2}} RT;$$

$$p_{1в} V = \frac{m_в}{\mu_в} RT,$$

получим

$$p_{1а} = \frac{2m_а RT}{\mu_а V}; \quad p_{1в} = \frac{m_в RT}{\mu_в V};$$

$$p = \left(\frac{2m_а}{\mu_а} + \frac{m_в}{\mu_в}\right) \frac{RT}{V}.$$

При $T_1 = 3T$, когда оба газа диссоциированы, их давление может быть представлено в виде

$$p_1 = \left(\frac{m_а}{\frac{\mu_а}{2}} + \frac{m_в}{\frac{\mu_в}{2}}\right) \frac{RT_1}{V},$$

$$4p=\left(\frac{2m_a}{\mu_a}+\frac{2m_в}{\mu_в}\right)\frac{3RT}{V}.$$

Подставляя сюда выражение для p, получаем

$$4\left(\frac{2m_a}{\mu_a}+\frac{m_в}{\mu_в}\right)=3\left(\frac{2m_a}{\mu_a}+\frac{2m_в}{\mu_в}\right),$$

откуда

$$\frac{m_a}{m_в}=\frac{\mu_a}{\mu_в}=14.$$

6.36. Газ с массой m_1 и молекулярным весом μ_1 смешали с газом, масса которого равна m_2, а молекулярный вес — μ_2. Найти кажущийся молекулярный вес смеси.

Давление смеси газов может быть определено по закону Дальтона $p=p_1+p_2$, где p_1, p_2 — парциальные давления.

Напишем уравнение состояния для каждого компонента, учитывая, что эти газы находятся при одинаковой температуре и занимают одинаковый объём:

$$p_1V=\frac{m_1}{\mu_1}RT;$$

$$p_2V=\frac{m_2}{\mu_2}RT.$$

Сложив почленно эти уравнения, получим

$$(p_1+p_2)V=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)RT.$$

С другой стороны, уравнение состояния для смеси с массой m

$$pV=\frac{m}{\mu}RT.$$

Сравнивая два вышеприведенных уравнения и учитывая, что $m=m_1+m_2$, получим

$$\frac{m}{\mu}=\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2};$$

$$\mu=\frac{m_1+m_2}{\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}}.$$

6.37. Определить плотность смеси газов, состоящей из m_1 кислорода, m_2 водорода и m_3 углекислого газа, при температуре T и давлении p и кажущийся молекулярный вес смеси.

Согласно закону Дальтона давление смеси газов равно сумме парциальных давлений компонентов смеси:

$$p=p_1+p_2+p_3.$$

Для каждого из компонентов можем составить уравнение Клапейрона — Менделеева

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT;$$

$$p_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT;$$

$$p_3V = \frac{m_3}{\mu_3}RT.$$

Сложив их почленно, получим

$$V(p_1 + p_2 + p_3) = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3}\right)RT,$$

или

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3}\right)RT,$$

откуда

$$V = \frac{\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3}\right)RT}{p};$$

$$\rho = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\,p}{\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3}\right)RT}. \qquad (*)$$

Кажущийся молекулярный вес смеси может быть найден из сравнения уравнения (*) и уравнения Клапейрона — Менделеева для смеси

$$pV = \frac{m_c}{\mu_c}RT.$$

Разделив почленно одно уравнение на другое и учитывая, что $m_c = m_1 + m_2 + m_3$, получаем

$$\mu_c = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3}}.$$

6.38. В сосуде объемом $V = 80$ л при температуре $t = 58°$ C находится идеальный газ при давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Н/м^2. Сколько молекул газа находится в этом сосуде?

Уравнение состояния для идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu}RT.$$

Известно, что число молекул в каждом киломоле газа равно числу Авогадро. Поэтому число молекул в сосуде

$$N = \frac{m}{\mu}N_A = N_A\frac{pV}{RT} = 3{,}5 \cdot 10^{23}.$$

Другой способ решения приведен в задаче 6.39.

6.39. Сколько молекул газа содержится в баллоне емкостью $V = 60$ л при температуре $T = 300$ К и давлении $5 \cdot 10^3$ Н/м²?

Число молекул в единице объема газа при температуре T и давлении p определяется по формуле

$$p = n_0 kT; \quad n_0 = \frac{p}{kT}.$$

В объеме V число молекул

$$N = n_0 V = \frac{pV}{kT} \approx 7{,}2 \cdot 10^{22}.$$

6.40. Газ занимает объем $V = 4$ л под давлением $p = 5 \cdot 10^2$ Н/м². Определить суммарную кинетическую энергию поступательного движения молекул.

Суммарная энергия поступательного движения молекул может быть определена как

$$E = N\overline{E} = \frac{m}{\mu} N_A \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT,$$

где $\overline{E}$ — средняя энергия поступательного движения молекул; N — число молекул в данном объеме газа.

Обратившись к уравнению газового состояния $pV = \frac{m}{\mu} RT$, получаем

$$E = \frac{3}{2} pV = 3 \text{ Дж}.$$

6.41. Молекула азота летит со скоростью $v = 500$ м/с. Найти количество движения K этой молекулы.

Количество движения молекулы $K = mv$, где m — масса молекулы; v — ее скорость.

Так как число молекул в одном киломоле вещества равно числу Авогадро, для K получим следующее выражение:

$$K = \frac{\mu}{N_A} v \approx 2{,}33 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

6.42. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа $v_{с.\,к} = 450$ м/с. Давление газа $p = 7 \cdot 10^4$ Н/м². Найти плотность газа ρ при этих условиях.

Из уравнения Клапейрона — Менделеева $pV = m/\mu RT$ следует:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

Учитывая, что $v_{с.\,к} = \sqrt{3RT/\mu}$, получаем

$$\rho = \frac{3p}{v^2_{с.\,к}} = 1{,}03 \text{ кг/м}^3.$$

6.43. Газ с массой $m = 15$ кг, молекулы которого состоят из атомов водорода и углерода, содержит $N = 5{,}64 \cdot 10^{26}$ молекул. Определить массу атомов углерода и водорода, входящих в молекулу этого газа.

В одном моле газа содержится число молекул, равное числу Авогадро. Число молей газа $n = N/N_A$. С другой стороны, $n = \frac{m}{\mu}$, откуда

$$\mu = \frac{mN_A}{N} \approx 16 \text{ кг/кмоль}.$$

Такой молекулярный вес имеет соединение CH_4, масса молекулы которого $m_{CH_4} = m/N$. Масса атомов водорода составляет 4/16 массы молекулы, т. е.

$$m_{H_4} = \frac{4}{16}\frac{m}{N} \approx 6,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Масса атома углерода составляет 12/16 массы молекулы соединения, т. е.

$$m_C = \frac{12}{16}\frac{m}{N} \approx 0,2 \cdot 10^{-25} \text{ кг}.$$

6.44. Какое число частиц находится в одном грамме кислорода и одном грамме парообразного иода, если степень их диссоциации 50 %?

Если степень диссоциации равна α, то в сосуде находится $\alpha\frac{m}{\mu/2}$ киломолей газа в атомарном состоянии и $(1-\alpha)\frac{m}{\mu}$ киломолей газа в молекулярном состоянии. Общее число киломолей в сосуде равно

$$\alpha\frac{m}{\mu/2} + (1-\alpha)\frac{m}{\mu} = 2\alpha\frac{m}{\mu} + (1-\alpha)\frac{m}{\mu} = (1+\alpha)\frac{m}{\mu}.$$

Зная, что в одном киломоле газа содержится число частиц, равное числу Авогадро, находим число частиц в сосуде

$$N = N_A(1+\alpha)\frac{m}{\mu}.$$

Число частиц кислорода

$$N_O = 2,82 \cdot 10^{22}.$$

Число частиц иода

$$N_I = 3,56 \cdot 10^{21}.$$

6.45. Найти отношение средних квадратичных скоростей молекул гелия и азота при одинаковых температурах.

Средняя квадратичная скорость молекул

$$v_{с.к} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

где m — масса молекулы. В этом случае

$$\frac{v_{с.к\,He}}{v_{с.к\,N}} = \sqrt{\frac{\mu_N}{\mu_{He}}} \approx 1,84.$$

6.46. Какое число молекул двухатомного газа содержится в сосуде объемом $V = 20$ см^3 при давлении $p = 1{,}06 \cdot 10^4$ Па и температуре $t = 27°$ С? Какой энергией теплового движения обладают эти молекулы?

Число молекул, содержащееся в единице объема, может быть определено по формуле $n_0 = p/kT$. Число молекул в сосуде

$$N = n_0 V = \frac{pV}{kT} = 5{,}16 \cdot 10^{19}.$$

Кинетическая энергия теплового движения одной молекулы определяется по формуле $\varepsilon = ikT/2$, где i — число степеней свободы молекулы.

Для N молекул

$$E = \varepsilon N = \frac{i}{2} \frac{kTpV}{kT} = \frac{i}{2} pV.$$

Для двухатомной молекулы $i = 5$ и $E = 0{,}53$ Дж.

6.47. Определить: число молекул в 1 мм^3 воды; массу молекулы воды; диаметр молекулы воды, считая условно, что молекулы воды шарообразны и соприкасаются.

Число N молекул, содержащихся в массе m вещества, равно числу Авогадро N_A, умноженному на число киломолей m/μ:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{\rho V}{\mu} N_A,$$

где ρ — плотность вещества; V — объем, занимаемый массой m этого вещества.

Подставив числовые значения, получим

$$N = \frac{10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26}}{18} = 3{,}34 \cdot 10^{19}.$$

Массу m_1 одной молекулы можно определить, разделив массу одного киломоля на число Авогадро:

$$m_1 = \frac{m}{N_A} = 2{,}99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Так как молекулы соприкасаются, можно считать, что каждая молекула занимает объем $V_1 = d^3$, где d — диаметр молекулы. Отсюда $d = \sqrt[3]{V_1}$, и так как $V_1 = V_0/N_A$, где $V_0 = \mu/\rho$ — объем одного киломоля, то

$$d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}} = 3{,}11 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

6.48. Найти отношение c_p/c_V для смеси газов, состоящей из $m_1 = 20$ г гелия и $m_2 = 8$ г водорода.

Количество теплоты, необходимое для нагревания m_1 граммов гелия при постоянном объеме,

$$\Delta Q_1 = c_{V_1} m_1 \Delta t.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания m_2 граммов водорода при тех же условиях,

$$\Delta Q_2 = c_{V_2} m_2 \Delta t.$$

Аналогично, для смеси газов

$$\Delta Q_V = c_V m \Delta t,$$

где c_V — удельная теплоемкость смеси при постоянном объеме; $m = m_1 + m_2$ — масса смеси.

Согласно закону сохранения энергии можно записать

$$\Delta Q_V = \Delta Q_1 + \Delta Q_2;$$

$$c_{V_1} m_1 \Delta t + c_{V_2} m_2 \Delta t = c_V (m_1 + m_2) \Delta t;$$

$$c_V = \frac{c_{V_1} m_1 + c_{V_2} m_2}{m_1 + m_2}.$$

Путем аналогичных рассуждений получаем

$$c_{p_1} m_1 \Delta t + c_{p_2} m_2 \Delta t = c_p (m_1 + m_2) \Delta t,$$

$$c_p = \frac{c_{p_1} m_1 + c_{p_2} m_2}{m_1 + m_2};$$

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{c_{p_1} m_1 + c_{p_2} m_2}{c_{V_1} m_1 + c_{V_2} m_2}.$$

Удельные и молярные теплоемкости связаны следующими соотношениями:

$$c_p = \frac{C_p}{\mu}; \quad c_V = \frac{C_V}{\mu}. \qquad (1)$$

В свою очередь,

$$C_V = \frac{i}{2} R; \quad C_p = \frac{i+2}{2} R, \qquad (2)$$

где i — число степеней свободы молекулы.

Гелий — одноатомный газ, следовательно, для него $i_1 = 3$; водород — двухатомный газ, для него $i_2 = 5$.

С учетом (1) и (2) отношение

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{(i_1 + 2)\frac{m_1}{\mu_1} + (i_2 + 2)\frac{m_2}{\mu_2}}{\frac{i_1 m_1}{\mu_1} + \frac{i_2 m_2}{\mu_2}} = \frac{(i_1 + 2)\mu_2 m_1 + (i_2 + 2) m_2 \mu_1}{i_1 m_1 \mu_2 + i_2 m_2 \mu_1} = 1{,}51.$$

6.49. Разность удельных теплоемкостей некоторого двухатомного газа $c_p - c_V = 260$ Дж/(кг · К). Найти массу одного киломоля газа и его удельные теплоемкости.

Известно, что $C_V = \frac{i}{2}R$; $C_p = \frac{i+2}{2}R$. С другой стороны, $c = C/\mu$. Таким образом,

$$c_p - c_V = \frac{C_p - C_V}{\mu} = \Delta c;$$

$$\mu = \frac{C_p - C_V}{\Delta c} = \frac{R}{\Delta c} \approx 32 \text{ кг/кмоль}.$$

Отсюда видно, что газ, о котором идет речь в задаче,— кислород.

Удельная теплоемкость при постоянном объеме

$$c_V = \frac{C_V}{\mu} = \frac{iR}{2\mu}.$$

Для двухатомного газа $i = 5$, следовательно,

$$c_V = \frac{5R}{2\mu} \approx 649 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)};$$

$$c_p = c_V + \Delta c = 909 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

6.50. Молекула углекислого газа, летящая со скоростью $v = 600$ м/с, ударяется упруго о стенку сосуда. Угол между направлением скорости молекулы и нормалью к стенке сосуда $\alpha = 60°$. Найти импульс силы, полученный стенкой (рис. 186).

Импульс силы, полученный стенкой, равен по модулю импульсу силы, полученному молекулой. Согласно второму закону Ньютона импульс силы, полученный молекулой, равен изменению количества движения тела в направлении действия силы:

$$F\,\Delta t = \Delta K.$$

Рис. 186

Количество движения молекулы в направлении, перпендикулярном стенке, до удара $K_1 = mv\cos\alpha$ (m — масса молекулы); после удара $K_2 = -mv\cos\alpha$.

Изменение количества движения $\Delta K = -2mv\cos\alpha$.

Масса молекулы $m = \mu/N_A$. Следовательно,

$$F\,\Delta t = \frac{2\mu v\cos\alpha}{N_A} = 4{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

6.51. Во сколько раз средняя квадратичная скорость пылинок, взвешенных в воздухе, меньше средней квадратичной скорости молекул воздуха? Масса пылинки $m = 10^{-8}$ г. Воздух считать однородным газом, для которого $\mu = 29$ кг/кмоль.

Средние квадратичные скорости молекул и пылинок равны соответственно

$$v_{\text{с. к}1} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \quad v_{\text{с. к}2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

Отношение скоростей

$$\frac{v_{с.\,к2}}{v_{с.\,к1}} = \sqrt{\frac{k\mu}{mR}} = \sqrt{\frac{\mu}{mN_A}} = 0{,}69 \cdot 10^7.$$

6.52. Найти среднюю длину свободного пробега молекул воздуха при нормальных условиях. Эффективный диаметр d молекул условно принять равным $3 \cdot 10^{-10}$ м.

Средняя длина свободного пробега $l = (\pi\sqrt{2}\,n_0 d^2)^{-1}$, где $n_0 = p/kT$ — число молекул в единице объема. Здесь p — давление газа; T — абсолютная температура.

Таким образом,

$$l = \frac{kT}{\pi\sqrt{2}d^2 p} = 9{,}1 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

6.53. Найти среднюю длину свободного пробега атомов гелия в условиях, когда плотность гелия $\rho = 2{,}1 \cdot 10^{-2}$ кг/м³, а эффективный диаметр атома гелия $d = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

Для определения средней длины свободного пробега необходимо знать плотность n_c частиц газа при данных условиях, так как

$$l = \frac{1}{\pi\sqrt{2}n_0 d^2}.$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева $pV = \frac{m}{\mu}RT$ следует, что

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

Так как $R = kN_A$, где k — постоянная Больцмана; N_A — число Авогадро, то

$$\rho = \frac{\mu p}{N_A kT} = \frac{\mu}{N_A} n_0;$$

$$n_0 = \frac{\rho N_A}{\mu}; \quad l = \frac{\mu}{\pi\sqrt{2}d^2 \rho N_A} = 1{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

6.54. Какое предельное число молекул азота может находиться в сферическом сосуде диаметром D, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом?

Для того чтобы молекулы не сталкивались друг с другом, необходимо, чтобы длина свободного пробега была не меньше диаметра сосуда ($l \geqslant D$). Известно, что $l = 1/\pi\sqrt{2}n_0 d^2$, где d — эффективный диаметр молекулы азота. Зная d, можно найти допустимую концентрацию молекул

$$n_0 \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{2}d^2 D}.$$

Максимальное число молекул в сосуде, объем которого $V = \frac{1}{6}\pi D^3$,

$$N = n_0 V = n_0 \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{D^2}{6\sqrt{2}d^2}.$$

6.55. Зная, что диаметр молекулы кислорода $d = 2{,}98 \cdot 10^{-10}$ м, подсчитать, какой длины получилась бы цепочка из молекул кислорода, находящихся в объеме $V = 2$ см^3 при давлении $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па и температуре $T = 300$ K, если эти молекулы расположить вплотную в один ряд.

Число молекул кислорода, содержащихся в объеме V,

$$N = n_0 V,$$

где n_0 — концентрация молекул, которая зависит от давления и температуры, при которых находится газ, следующим образом:

$$n_0 = \frac{p}{kT}.$$

Отсюда

$$l = dN = \frac{dp}{kT} V \approx 1{,}47 \cdot 10^{10} \text{ м}.$$

6.56. Коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях — D. Определить коэффициент теплопроводности λ водорода, считая газ идеальным.

Коэффициент диффузии газа определяется формулой

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} l,$$

где $\bar{v}$ — средняя арифметическая скорость молекул газа; l — длина свободного пробега молекул.

Выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \bar{v} l c_V,$$

где ρ — плотность газа; c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Учитывая, что

$$c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu},$$

где $i = 5$ для двухатомного газа; R — универсальная газовая постоянная; μ — молекулярная масса газа, из двух вышеприведенных выражений получим

$$\lambda = \frac{i}{2} D\rho \frac{R}{\mu} = \frac{5}{2} D\rho \frac{R}{\mu}.$$

6.57. Вычислить среднее расстояние между центрами молекул идеального газа при нормальных условиях.

Согласно уравнению Клапейрона — Менделеева один киломоль идеального газа при нормальных условиях занимает объем

$$V_0 = \frac{RT_0}{p_0} = 22{,}4 \text{ м}^3.$$

Объем элементарного куба, приходящийся на одну молекулу, в данных условиях равен

$$V = \frac{V_0}{N_A}.$$

Ребро этого куба, приблизительно равное среднему расстоянию между центрами молекул, можно найти из соотношения

$$l = \sqrt[3]{\frac{V_0}{N_A}} = 7{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

6.58. Определить расстояние между ближайшими атомами кубической кристаллической решетки железа, если плотность железа $\rho = 7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³.

Масса 1 м³ железа численно равна его плотности. Число молекул в 1 м³ $N = \frac{m}{\mu} N_A$.

Обозначим объем одного киломоля железа через V. Кубическая кристаллическая решетка железа содержит 1 атом на элементарный куб. Объем элементарного куба

$$v = \frac{V}{N} = \frac{V\mu}{mN_A} = \frac{\mu}{\rho N_A}.$$

Длина a ребра элементарного куба представляет собой расстояние между атомами:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}} \approx 2{,}28 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

6.59. На пути молекулярного пучка стоит «зеркальная стенка». Найти давление, испытываемое этой стенкой, если скорость молекул в пучке одинакова и равна $v = 10$ м/с; концентрация $n_0 = 1{,}5 \times 10^{17}$ 1/м³; масса молекулы $m = 3{,}3 \cdot 10^{-27}$ кг. Рассмотреть три случая: 1) стенка расположена перпендикулярно пучку и неподвижна; 2) стенка неподвижна и расположена под углом $\alpha = 45°$ к направлению пучка; 3) стенка движется навстречу молекулам со скоростью $v_c = 50$ м/с.

При ударе каждая молекула передает стенке импульс, равный $2mv$ (см. задачу 6.50).

1) За одну секунду об единичную поверхность стенки площадью 1 м² ударяются все молекулы, содержащиеся в единице объема и движущиеся к стенке со скоростью v. Иначе говоря, за 1 с о стенку ударяется N молекул, где $N = n_0 v$. Давление, оказываемое пучком, равно изменению количества движения за единицу времени, т. е.

$$p_1 = 2mvN = 2mn_0v^2 = 9{,}9 \cdot 10^{-9} \text{ Па}.$$

2) Если молекула движется под углом к стенке, то согласно второму закону Ньютона меняется только составляющая скорости, направленная перпендикулярно к стенке, и переданный при этом стенке импульс будет равен (рис. 187) $2mv \sin\alpha$.

Давление, испытываемое стенкой,

$$p_2 = 2mn_0v^2 \sin\alpha = p_1 \sin\alpha \approx 7 \cdot 10^{-9} \text{ Па}.$$

3) Если стенка движется навстречу пучку со скоростью v_c, то скорость молекул относительно стенки $v' = v_c + v$.

Импульс, передаваемый стенке молекулой, равен

$$2mv' = 2m(v + v_c);$$

давление на стенку

$$p_3 = 2mn_0(v + v_c)^2 \approx 5{,}94 \cdot 10^{-8} \text{ Па}.$$

6.60. В помещении площадью $S = 100$ м^2 и высотой $h = 4$ м разлит 1 л ацетона. Сколько молекул ацетона содержится в 1 м^3 воздуха, если весь ацетон испарился и равномерно распределился по помещению?

Масса разлитого ацетона $m = \rho V_1$, где ρ — плотность ацетона; V_1 — его объем.

Число молекул, содержащееся в массе m вещества,

$$N = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{\rho V_1}{\mu} N_A.$$

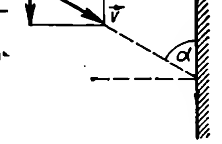


Рис. 187

Химическая формула ацетона $(CH_3)_2CO$, следовательно $\mu = 58$ кг/кмоль.

Число молекул, содержащееся в единице объема,

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{\rho V_1 N_A}{\mu V},$$

где $V = Sh$ — объем помещения.

Отсюда

$$n_0 = \frac{\rho V_1 N_A}{\mu S h} \approx 2 \cdot 10^{22} \text{ 1/м}^3.$$

6.61. В сферическом сосуде с внутренним диаметром $d = 5$ см находится азот, давление которого $p_0 = 1{,}33$ Па при температуре $t_0 = 190°$ С. На стенках сосуда имеется мономолекулярный слой адсорбированного азота. Площадь, занимаемая одной молекулой, $s = 1 \cdot 10^{-15}$ см^2. Каково давление азота в сосуде при температуре $t_1 = 427°$ С, при которой азот полностью десорбируется со стенок?

Масса m_0 азота, первоначально находившегося в сосуде, может быть найдена из уравнения Клапейрона — Менделеева $p_0 V = \frac{m_0}{\mu} R T_0$:

$$m_0 = \frac{\mu p_0 V}{R T_0} = \frac{4\mu\pi r^3 p_0}{3 R T_0} = \frac{\mu \pi d^3 p_0}{6 R T_0}.$$

Число молекул адсорбированного азота

$$N = \frac{\pi d^2}{s}.$$

Так как число молей адсорбированного газа равно N/N_A, то масса адсорбированного азота

$$m = \frac{N}{N_A}\mu = \frac{\pi d^2 \mu}{N_A s}.$$

При полной десорбции азота внутри сосуда будет находиться масса газа

$$m_1 = m_0 + m = \frac{\mu \pi d^3 p_0}{6RT_0} + \frac{\mu \pi d^2}{N_A s} = \frac{\mu \pi d^2}{2}\left(\frac{dp_0}{3RT_0} + \frac{2}{N_A s}\right).$$

Уравнение состояния газа после десорбции молекул

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT_1,$$

откуда

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu}\frac{RT_1}{V} = p_0 \frac{T_1}{T_0} + \frac{6kT_1}{ds} = 3{,}3 \text{ Па}.$$

6.62. Плотность смеси азота и водорода при температуре $t = 47°$ C и давлении $p = 2{,}03 \cdot 10^5$ Па равна $\rho = 0{,}3$ кг/м^3. Какова концентрация молекул водорода в смеси?

Согласно закону Дальтона $p = p_1 + p_2$, где p_1 и p_2 — парциальные давления. Для каждого из компонентов имеем

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT; \quad p_1 = \frac{\rho_1}{\mu_1} RT;$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT; \quad p_2 = \frac{\rho_2}{\mu_2} RT,$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности водорода и азота для тех случаев, когда водород и азот занимают (каждый в отдельности) весь объем.

Так как из основного уравнения молекулярно-кинетической теории следует, что $n = \frac{p}{kT}$, то вышеприведенные уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{p_1}{RT} = \frac{\rho_1}{\mu_1}; \quad \frac{n_1}{N_A} = \frac{\rho_1}{\mu_1};$$

$$\frac{p_2}{RT} = \frac{\rho_2}{\mu_2}; \quad \frac{n_2}{N_A} = \frac{\rho_2}{\mu_2},$$

где n_1 и n_2 — концентрации молекул водорода и азота соответственно. Вследствие того, что концентрация молекул обоих сортов

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{pN_A}{RT}$$

и

$$\rho = \rho_1 + \rho_2,$$

находим, что

$$\frac{n_1\mu_1}{N_A}+\frac{n_2\mu_2}{N_A}=\rho;$$

$$\frac{pN_A}{RT}=n_1+n_2,$$

откуда

$$n_1=\frac{\frac{\mu_2 pN_A}{RT}-\rho N_A}{\mu_2-\mu_1}=4{,}2\cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

6.63. Найти число столкновений, которые произойдут за 1 с в 1 см^3 кислорода при нормальных условиях. Эффективный радиус молекулы кислорода принять равным $1{,}5\cdot 10^{-10}$ м.

Общее число столкновений, происходящих за 1 с в единице объема (учитываем, что в одном столкновении участвуют две молекулы),

$$Z=\frac{1}{2}\bar{z}n_0,$$

где n_0 — концентрация молекул газа; $\bar{z}$ — среднее число столкновений каждой молекулы с остальными в единицу времени.

Эта величина может быть представлена как

$$\bar{z}=\frac{\bar{v}}{l}=4\sqrt{2}\pi r^2 n_0\bar{v},$$

где $\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекулы.

Число молекул n_0, содержащееся в 1 см^3 газа при нормальных условиях, равно $2{,}7\cdot 10^{19}$ (число Лошмидта). Общее число столкновений

$$Z=2\sqrt{2}\pi r^2 n_0^2\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}=8\pi r^2 n_0^2\sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}\approx 6{,}2\cdot 10^{28}.$$

6.64. Найти среднюю продолжительность свободного пробега молекул азота при давлении $p=133$ Па и температуре $t=27°$ С.

Средняя продолжительность свободного пробега может быть представлена, как $\Delta t=l/\bar{v}$, где l — средняя длина свободного пробега; $\bar{v}$ — средняя арифметическая скорость молекул.

Известно, что

$$l=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0};\quad \bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}};$$

$$n_0=\frac{p}{kT}=\frac{pN_A}{RT},$$

где d — эффективный диаметр молекул; n_0 — концентрация молекул; μ — молекулярная масса.

Отсюда

$$\Delta t = \frac{RT\sqrt{\pi\mu}}{\sqrt{2}\,\pi d^2 p N_A \sqrt{8RT}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu RT}{\pi}}}{4d^2 p N_A} = 7{,}1 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

6.65. В сосуде находится $V = 2 \cdot 10^{-3}$ м³ воды при температуре $t = 47°$ C. Найти давление внутри сосуда при условии, что силы взаимодействия между молекулами внезапно исчезли.

При исчезновении сил взаимодействия между молекулами вода превратится в идеальный газ, давление которого можно найти из уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} \approx 6{,}92 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

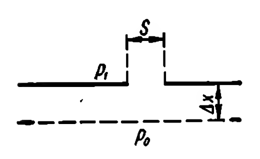


Рис. 188

6.66. В дне сосуда, из которого выкачан воздух до давления p_1, проделано малое отверстие. С какой скоростью начнет врываться в сосуд воздух, если атмосферное давление — p_0 и плотность воздуха — ρ.

Выделим слой воздуха толщиной Δx и сечением, равным сечению отверстия s, прилегающий к отверстию (рис. 188). Можно считать, что заполнение сосуда заключается в поочередном проталкивании подобных слоев внутрь сосуда под действием разности давлений $(p_0 - p_1)$ вне и внутри сосуда. На площадку S действует сила, равная $S(p_0 - p_1)$. При этом выполняется работа

$$A = S(p_0 - p_1)\Delta x,$$

которая идет на сообщение воздуху кинетической энергии

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\rho V v^2 = \frac{1}{2}\rho S\,\Delta x v^2.$$

Так как $A = E_к$, получаем

$$S(p_0 - p_1)\Delta x = \frac{1}{2}\rho S\,\Delta x v^2;$$

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho}}.$$

6.67. При температуре $t = 207°$ C масса $m = 2{,}5$ кг некоторого газа занимает объем $V = 0{,}3$ м³. Определить давление газа, если удельная теплоемкость $c_p = 519$ Дж/(кг · К) и $\gamma = 1{,}67$.

Известно, что

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V};$$

$$c_p - c_V = \frac{C_p - C_V}{\mu} = \frac{R}{\mu};$$

$$\mu = \frac{R}{c_p - c_V} = \frac{R}{c_p\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Зная μ, по уравнению состояния $pV = \frac{m}{\mu} RT$ можно найти давление газа:

$$p = \frac{mc_p\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)T}{V} \approx 8{,}33 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

6.68. Некоторый газ при нормальных условиях имеет плотность $\rho = 0{,}0894$ кг/м^3. Определить его удельные теплоемкости c_p, c_V, а также найти, какой это газ.

Исходя из уравнения состояния, получаем

$$\rho = \frac{p\mu}{RT},$$

$$\mu = \frac{\rho RT}{p} = 2 \text{ кг/кмоль}.$$

Очевидно, это водород.

Число степеней свободы молекулы водорода $i = 5$, так как это двухатомный газ.

$$c_p = \frac{C_p}{\mu} = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu} = 14560 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}; \; c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu} = 10400 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

6.69. После того как в комнате протопили печь, температура поднялась с 15 до 27° С. На сколько процентов уменьшилось число молекул в этой комнате?

Зависимость числа молекул в единице объема от температуры и давления имеет вид: $n = p/kT$. По условию задачи объем и давление остаются неизменными, поэтому число молекул при температурах T_1 и T_2 соответственно равно

$$N_1 = n_1 V = \frac{p}{kT_1} V;$$

$$N_2 = n_2 V = \frac{p}{kT_2} V;$$

$$\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{pV}{k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right);$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\frac{pV}{k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}{\frac{pV}{kT_1}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 4\%.$$

6.70. Доказать, что средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости молекул газа пропорциональны $\sqrt{p/\rho}$, где p — давление газа; ρ — плотность газа.

Средняя арифметическая скорость

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева $pV = \frac{m}{\mu} RT$ получаем: $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$; $\mu = \frac{\rho RT}{p}$. Отсюда

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8p}{\pi\rho}}.$$

Средняя квадратичная скорость

$$\bar{v}_{с. к} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Аналогично предыдущему,

$$v_{с. к} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}.$$

6.71. Два одинаковых сосуда, содержащие одинаковое число молекул кислорода, соединены краном. В первом сосуде средняя квадратичная скорость молекул равна $v_{с. к1}$, во втором — $v_{с. к2}$. Какой будет эта скорость, если открыть кран, соединяющий сосуды (теплообмен с окружающей средой отсутствует)?

Число молекул в каждом из сосудов

$$N_1 = \frac{m_1}{\mu} N_A; \quad N_2 = \frac{m_2}{\mu} N_A.$$

Если $N_1 = N_2$, то $m_1 = m_2$, следовательно, температура, установившаяся в сосудах после их соединения,

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2},$$

где T_1 и T_2 — начальные температуры газа.

Средняя квадратичная скорость связана с температурой следующим образом:

$$v_{с. к} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

откуда

$$v^2_{с. к} = \frac{v^2_{с. к1} + v^2_{с. к2}}{2}.$$

6.72. На рис. 189, *а* изображен график изменения состояния идеального газа в координатах pV. Представить этот круговой процесс в координатах pT и VT, обозначив соответствующие точки.

Как видно из рисунка, участки *4—1* и *2—3* соответствуют изохорическим процессам, а *1—2* и *3—4* — изобарическому расширению и изобарическому сжатию соответственно.

Из уравнения Клапейрона — Менделеева следует, что графики изохорического ($V = \text{const}$) и изобарического ($p = \text{const}$) процессов

в координатах pT и VT соответственно должны проходить через начало координат (рис. 189, *б*, *в*). Участок *4—1* соответствует изохорическому возрастанию давления, *2—3* — изохорическому понижению давления.

6.73. Некоторое количество идеального газа совершает замкнутый процесс *1—2—3—1*, который изображен на графике зависимости объема от температуры (рис. 190, *а*). Изобразить этот процесс в координатах pV и указать, на каких стадиях процесса газ получал, а на каких — отдавал тепло.

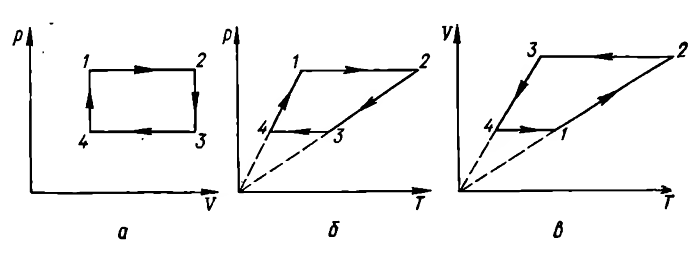


Рис. 189

Вследствие того, что продолжение прямой *1—2* проходит через начало координат, можно утверждать, что участок *1—2* представляет собой изобару. Значит, газ нагревается при постоянном давлении, поглощая тепло.

Участок *2—3* является изохорой. Давление газа падает при неизменном объеме, значит тепло выделяется.

Участок *3—1* — изотерма. Газ уменьшает объем при постоянной температуре. Давление растет. Газ не нагревается, хотя внешние силы совершают над ним работу, значит, газ отдает тепло.

Этот процесс представлен в координатах pV на рис. 190, *б*.

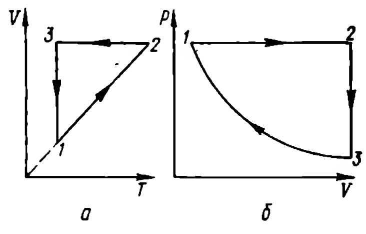


Рис. 190

6.74. Количество азота, находящегося в сосуде под поршнем, равно m. Вес поршня — P, площадь его поперечного сечения — S. Атмосферное давление — p_0. Сколько теплоты нужно затратить, чтобы нагреть газ на Δt? Насколько при этом поднимется поршень?

Из условия задачи следует, что газ изобарически расширяется.

При изобарическом расширении работа $A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R\,\Delta T$, где V_2, V_1 — объемы, занимаемые газом соответственно после и до нагревания на ΔT. Так как $V_2 - V_1 = S\,\Delta h$, а $p = p_0 + P/S$, то

$$\Delta h = \frac{mR\,\Delta T}{\mu(p_0 + P/S)\,S}.$$

Для изобарического нагревания газа необходимо количество тепла

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R \Delta T$$

(для двухатомного газа $i = 5$).

6.75. При изобарическом расширении двухатомного газа была совершена работа A. Какое количество теплоты сообщено газу?

При изобарическом процессе работа

$$A = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Следовательно,

$$\Delta T = \frac{A}{\frac{m}{\mu} R}.$$

Количество теплоты, подводимое к газу в процессе изобарического расширения,

$$\Delta Q_p = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T.$$

Подстановка сюда $C_p = \frac{i+2}{2} R$ и полученного выражения для ΔT дает:

$$\Delta Q_p = \frac{i+2}{2} A.$$

Для двухатомного газа $i = 5$, следовательно,

$$\Delta Q_p = \frac{7}{2} A.$$

6.76. Масса m идеального газа, находящегося при температуре T, охлаждается изохорически так, что его давление уменьшается в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. Температура газа в конечном состоянии равна первоначальной. Определить совершенную газом работу. Молекулярная масса газа — μ.

Во время изохорического охлаждения $A = 0$, так как $\Delta V = 0$. Следовательно, количество теплоты, отдаваемой газом,

$$\Delta Q_V = \Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T = \frac{m}{\mu} C_V (T - T_1),$$

где T_1 — температура газа в конце изохорического процесса. При этом давление газа становится равным p_1. Согласно соотношению $\frac{p_1}{p} = \frac{T_1}{T}$, где p — первоначальное давление, можем написать:

$$\frac{1}{n} = \frac{T_1}{T}; \quad T_1 = \frac{T}{n}.$$

При изобарическом расширении газа тепло расходуется на повышение его температуры до значения T и на совершение работы $A = \frac{m}{\mu} R\,\Delta T$. Изменение температуры

$$\Delta T = T - T_1 = T - \frac{T}{n} = T\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

откуда

$$A = \frac{m}{\mu} R \frac{n-1}{n} T.$$

6.77. Один моль идеального газа совершает замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 191). Температура в точке *1* равна T_1, в точке *3* — T_3. Определить работу, совершаемую газом за цикл, если точки *2* и *4* лежат на одной изотерме.

Работа при замкнутом цикле равна площади *1—2—3—4*, т. е.

$$A = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = \\ = p_2V_4 - p_2V_1 - p_1V_4 + p_1V_1.$$

Запишем уравнения для каждого состояния:

$$p_1V_1 = RT_1;\quad p_3V_3 = RT_3;$$
$$p_2V_2 = RT_2;\quad p_4V_4 = RT_4.$$

Рис. 191

Учитывая, что $p_1 = p_4$; $p_2 = p_3$; $V_1 = V_2$; $V_3 = V_4$; $T_2 = T_4 = T$, получаем

$$T/T_1 = T_3/T;$$
$$A = R\left(T_3 - 2\sqrt{T_1T_3} + T_1\right).$$

6.78. При адиабатическом расширении азота с массой m совершается работа A. Насколько уменьшилась внутренняя энергия и понизилась температура азота, если его удельная теплоемкость при постоянном объеме равна c_V?

При адиабатическом процессе $\Delta Q = 0$, т. е. $\Delta U + A = 0$ и

$$A = -\Delta U.$$

Следовательно, $\Delta U = mc_V\,\Delta T$; $\Delta T = \frac{\Delta U}{mc_V} = -\frac{A}{mc_V}$.

Знак «—» указывает, что температура понижается.

6.79. Каковы были начальные объем и температура массы m гелия, заключенного под поршнем в цилиндре, если при охлаждении его до 0° С потенциальная энергия груза весом P, лежащего на поршне, уменьшилась на ΔE. Площадь поршня — S, атмосферное давление — p_0.

Согласно закону сохранения энергии

$$\Delta E = A;\quad A = P\,\Delta h;\quad \Delta h = \frac{V_1 - V_2}{S};$$

$$\Delta E = P\frac{V_1 - V_2}{S} = \frac{P}{S}\,\Delta V;$$

$$\Delta V = \frac{\Delta E S}{P}.$$

С другой стороны, работа, совершаемая газом при изобарическом процессе,

$$A_1 = p\,\Delta V = \left(p_0 + \frac{P}{S}\right)\Delta V = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1),$$

откуда

$$T_1 = T_2 + \frac{(p_0 S + P)\,\Delta E \mu}{mRP}.$$

Записав уравнение для начального состояния, получим

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1; \quad V_1 = \frac{mRT_1}{\mu\left(p_0 + \frac{P}{S}\right)}.$$

6.80. В закрытом сосуде находятся массы m_1 азота и m_2 кислорода. Найти изменение внутренней энергии смеси при охлаждении ее на ΔT.

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2,$$

где ΔU_1 и ΔU_2 — изменения внутренних энергий азота и кислорода соответственно

$$\Delta U_1 = \frac{im_1}{2\mu_1} R\,\Delta T; \quad \Delta U_2 = \frac{im_2}{2\mu_2} R\,\Delta T;$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) R\,\Delta T.$$

6.81. Двухатомный газ с массой m, имеющий молекулярную массу μ, находится в закрытом сосуде под давлением p при температуре T. После нагревания давление в сосуде стало равно p_1. Какое количество теплоты было сообщено газу при нагревании?

В данной задаче идет речь об изохорическом нагревании газа, следовательно, $A = p\,\Delta V = 0$.

Таким образом, все полученное системой тепло идет на изменение внутренней энергии

$$\Delta Q = \Delta U;$$

$$\Delta U = \frac{im}{2\mu} R\,\Delta T.$$

Для изохорического процесса

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1};$$

$$T_1 = \frac{p_1 T}{p}.$$

Следовательно,

$$\Delta U = \frac{im}{2\mu} R\left(\frac{p_1 T}{p} - T\right) = \frac{im}{2\mu} RT\left(\frac{p_1}{p} - 1\right).$$

6.82. Найти молекулярную массу и первоначальный удельный объем газа, подвергшегося изотермическому сжатию, если в конце

сжатия давление массы m газа увеличилось в n раз и произведенная работа равна A. До сжатия газ находится под давлением p_1 при температуре T_1.

Для изотермического процесса $A = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$.

Согласно условию

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}; \ \frac{p_2}{p_1} = n; \ \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{n}$$

и

$$A = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{1}{n};$$

$$\mu = \frac{mRT_1 \ln \frac{1}{n}}{A}.$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева $p_1V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ удельный объем газа

$$\frac{V_1}{m} = \frac{RT_1}{p_1\mu} = \frac{ART_1}{p_1 mRT_1 \ln \frac{1}{n}} = \frac{A}{p_1 m \ln \frac{1}{n}}.$$

6.83. Атомарный кислород O, молекулярный кислород O_2 и озон O_3 отдельно друг от друга расширяются изобарически. При этом расходуется количество ΔQ теплоты. Определить доли теплоты, расходуемые на расширение и изменение внутренней энергии для O, O_2, O_3.

Для изобарического процесса

$$A = \frac{m}{\mu} R\,\Delta T.$$

Количество теплоты, получаемое газом при изобарическом нагревании,

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R\,\Delta T.$$

Следовательно, $A = \frac{2}{i+2}\Delta Q$, где i — число степеней свободы.

Из первого начала термодинамики $\Delta Q = \Delta U + A$ получаем

$$\Delta U = \Delta Q - A = \Delta Q - \frac{2}{i+2}\Delta Q = \frac{i}{i+2}\Delta Q.$$

Для O $(i = 3)$ $A = 0{,}4\,\Delta Q$, $\Delta U = 0{,}6\,\Delta Q$;
для O_2 $(i = 5)$ $A = 0{,}29\,\Delta Q$, $\Delta U = 0{,}71\,\Delta Q$;
для O_3 $(i = 6)$ $A = 0{,}25\,\Delta Q$, $\Delta U = 0{,}75\,\Delta Q$.

6.84. На рис. 192 показана теоретическая диаграмма работы компрессора двойного действия. Участок *1—2* соответствует изотермическому сжатию; участок *2—3* — проталкиванию воздуха в резервуар ($p = \text{const}$); на участке *3—4* происходит мгновенное уменьшение давления в цилиндре компрессора при закрытии выпускного клапана

и открытии впускного; участок $4-1$ соответствует впуску воздуха при нормальном давлении. Показать, что работа, производимая компрессором за один оборот, характеризует изотермический процесс и может быть представлена площадью фигуры $1-2-5-6$.

Работа за цикл изображается площадью фигуры $1-2-3-4-1$. Площадь фигуры $2-3-4-7$, соответствующая работе при совершении части цикла, равна

$$(p_2 - p_1) V_2 = V_2 p_2 - V_2 p_1;$$

площадь фигуры $1-7-5-6$ равна

$$(V_1 - V_2) p_1 = V_1 p_1 - V_2 p_1.$$

Так как точки 1 и 2 лежат на одной изотерме, то

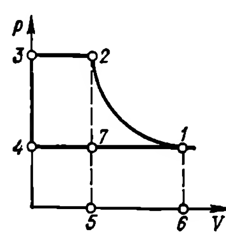


Рис. 192

$$V_2 p_2 = V_1 p_1.$$

Следовательно,

$$S_{12341} = S_{1271} + S_{17561} = S_{12561},$$

т. е. работа за один оборот равна работе при изотермическом процессе.

6.85. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в n раз выше абсолютной температуры охладителя. Какую долю теплоты, получаемой за один цикл от нагревателя, газ отдает охладителю?

К. п. д. идеальной машины Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1};$$

$$T_1 = nT_2, \text{ так что } \eta = \frac{n-1}{n}.$$

С другой стороны,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 и Q_2 — количество теплоты, получаемое от нагревателя и отдаваемое охладителю соответственно. Таким образом,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \eta = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

6.86. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится ежечасно с помощью холодильника количество теплоты Q_2' при температуре T_2. Определить мощность установки, если количество подводимой теплоты равно Q_1'. При какой температуре подводится тепло?

Количество теплоты, подводимое и отводимое за время t, равно соответственно

$$Q_1 = Q_1' t; \quad Q_2 = Q_2' t;$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1'}.$$

С другой стороны,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2'}{Q_1'}; \quad T_1 = T_2 \frac{Q_1'}{Q_2'};$$

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Q_1 - Q_2}{t} = Q_1' - Q_2'.$$

6.87. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре T_2 кипятильнику с водой при температуре T_1. Какое количество воды m_1 нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар воду с массой m_2 в кипятильнике?

При обратном цикле внешние силы совершают над газом работу A. При этом сумма количества теплоты Q_2, отнятой у холодного тела, и затраченной работы A равна количеству теплоты, переданной более нагретому телу.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \quad \eta = \frac{A}{Q_1};$$

$$Q_2 = Q_1 - A = \frac{A}{\eta} - A = \frac{1 - \eta}{\eta} A;$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1};$$

$Q_2 = \lambda m_1$, где m_1 — масса замерзшей воды; λ — удельная теплота плавления; $Q_1 = L m_2$, где m_2 — масса испарившейся воды; L — удельная теплота парообразования.

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{L m_2 - \lambda m_1}{L m_2};$$

$$m_1 = \frac{L m_2 - \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) L m_2}{\lambda} = \frac{T_2}{T_1} \frac{L m_2}{\lambda}.$$

6.88. Масса $m = 2$ г гелия, находящегося при $t = 0°$ C и давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Н/м^2, изотермически расширяется за счет полученного извне тепла до объема $v = 2$ л. Найти: работу, совершенную газом при расширении; количество сообщенной газу теплоты.

Работа при изотермическом процессе может быть определена по формуле

$$A = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

где V_1 — объем, который газ занимал до расширения; V_2 — после расширения.

Объем V_1 можем найти, воспользовавшись уравнением Клапейрона — Менделеева $p_1V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$, откуда

$$V_1 = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{p_1}.$$

Работа

$$A = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2 \mu p_1}{mRT_1} \approx 1168 \text{ Дж}.$$

Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, следовательно,

$$\Delta Q = A.$$

7. Термостатика. Изменение агрегатного состояния

Уравнение теплового баланса. В ряде случаев работа, производимая при нагревании тел, не играет роли (например, при нагревании твердых и жидких тел, при изохорическом процессе для газов и т. п.). В этих случаях полагают $A = 0$. Обозначив количество теплоты, отдаваемое телом, через Q_1, а воспринимаемое другим телом (или телами) — через Q_2, можем написать

$$Q_1 = Q_2.$$

Если тело с массой m и удельной теплоемкостью c, нагретое до температуры T, передает тепло окружающим телам с массами m_1, m_2, ..., m_n и удельными теплоемкостями c_1, c_2, ..., c_n, находящимся при температурах T_1, T_2, ..., T_n, то при достижении теплового равновесия справедливо уравнение

$$mc(T - \theta) = m_1c_1(\theta - T_1) + m_2c_2(\theta - T_2) + \dots + m_nc_n(\theta - T_n),$$

где θ — равновесная температура всех тел.

Теплота плавления. При увеличении внутренней энергии ΔU ($A = 0$) потенциальная энергия молекул вещества возрастает. Если вещество — твердое, то (в подавляющем большинстве случаев) при достижении определенной температуры оно плавится. Тепловая энергия, затраченная на расплавление массы m, называется теплотой плавления и равна

$$\Delta Q = \Delta U = \lambda m,$$

где λ — удельная теплота плавления.

При обратном процессе, т. е. при затвердевании расплавленного вещества, энергия ΔU выделяется и передается окружающим телам.

Теплота парообразования. Тепловая энергия, затраченная на испарение вещества с массой m, называется теплотой парообразования и равна

$$\Delta Q = \Delta U = Lm,$$

где L — удельная теплота парообразования.

При конденсации вещества тепло выделяется и передается окружающим телам.

Тепловое расширение тел. При нагревании твердых или жидких тел их размеры (почти всегда) увеличиваются.

Линейное расширение

$$l = l_0 (1 + \alpha \Delta t),$$

где l_0 — длина при начальной температуре; α — коэффициент линейного расширения.

Поверхностное расширение

$$S = S_0 (1 + 2\alpha \Delta t),$$

где S_0 — площадь при начальной температуре.

При нагревании твердого или жидкого тела его объем может быть найден по формуле

$$V = V_0 (1 + \beta \Delta t),$$

где V_0 — объем при начальной температуре; β — коэффициент объемного расширения.

Для твердых тел

$$\beta \approx 3\alpha.$$

При нагревании тел происходит изменение их плотности. При температуре t плотность тела

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta \Delta t},$$

где ρ_0 — плотность при начальной температуре; β — коэффициент объемного расширения.

Вышеприведенные соотношения являются приближенными и верны лишь в не очень больших температурных интервалах, в которых можно считать, что коэффициенты α и β изменяются мало.

7.1. Для определения температуры t_1 печи нагретый в ней стальной цилиндр с массой $m_1 = 0{,}3$ кг бросили в медный сосуд с массой $m_3 = 0{,}2$ кг, содержащий $m_2 = 1{,}27$ кг воды при $t_2 = 15°$ С. Температура воды повысилась до $\Theta = 32°$ С. Вычислить температуру печи.

Уравнение теплового баланса

$$Q_1 = Q_2, \qquad (*)$$

где Q_1 — количество теплоты, отданное цилиндром; Q_2 — количество теплоты, полученное водой и калориметром.

В свою очередь,

$$Q_2 = Q_в + Q_к,$$

где $Q_в$ — количество теплоты, полученное водой; $Q_к$ — количество теплоты, полученное калориметром.

$$Q_1 = m_1 c_1 (t_1 - \Theta),$$

где m_1 — масса цилиндра; c_1 — его удельная теплоемкость; t_1 — первоначальная температура цилиндра; Θ — средняя температура, установившаяся в калориметре.

$$Q_в = m_2 c_2 (\Theta - t_2);$$
$$Q_к = m_3 c_3 (\Theta - t_2),$$

где m_2, m_3 — массы воды и калориметра; c_2, c_3 — их удельные теплоемкости; t_2 — первоначальная температура воды и калориметра.

Подставив все эти уравнения в (*), получим:

$$m_1c_1(t_1-\theta)=m_2c_2(\theta-t_2)+m_3c_3(\theta-t_2),$$

откуда искомая температура цилиндра, а значит и печи,

$$t_1=\frac{(\theta-t_2)(m_2c_2+m_3c_3)+m_1c_1\theta}{m_1c_1}\approx 695{,}5^\circ \text{ C}.$$

7.2. Свинцовая пуля, летящая со скоростью v_0, пробив доску, уменьшает свою скорость до v. Начальная температура пули — t. Определить, какая часть пули расплавится, если считать, что на нагревание пошла k-я часть энергии ($k<1$).

При пробивании доски скорость пули уменьшается, следовательно, ее кинетическая энергия уменьшается на

$$\Delta E=\frac{m}{2}(v_0^2-v^2).$$

На нагревание пули до температуры плавления $t_{пл}$ и на плавление части пули с массой m_1 расходуется k-я часть этой энергии:

$$k\frac{m}{2}(v_0^2-v^2)=mc(t_{пл}-t)+\lambda m_1,$$

где c — удельная теплоемкость; λ — удельная теплота плавления свинца.

Разделив обе части уравнения на $m\lambda$, получим

$$\frac{m_1}{m}=\frac{k(v_0^2-v^2)-2c(t_{пл}-t)}{2\lambda}.$$

7.3. На какую высоту можно было бы поднять груз $m_2=10^3$ кг, если бы удалось полностью использовать энергию, освобождающуюся при остывании 1 л воды от $t_1=100^\circ$ С до $t_2=20^\circ$ С?

При остывании воды освобождается энергия $Q=m_1c(t_1-t_2)$, где $m_1=\rho V$ — масса воды (ρ — плотность воды; V — объем воды).

Для того чтобы поднять груз m_2 на высоту h, должна быть выполнена работа

$$A=m_2gh.$$

Следовательно,

$$\rho Vc(t_1-t_2)=m_2gh,$$

$$h=\frac{\rho Vc(t_1-t_2)}{m_2g}=34 \text{ м}.$$

7.4. Какое количество теплоты выделится при замерзании $m=1$ кг воды, переохлажденной до $t=-15^\circ$ С (удельную теплоемкость переохлажденной воды считать равной $c=4190$ Дж/(кг · К))?

Для нагревания воды до температуры замерзания необходимо количество теплоты

$$Q_1=mc(0-t).$$

При замерзании вода отдает количество теплоты

$$Q_2 = m\lambda.$$

Полное количество выделившейся теплоты

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = m\lambda - mc(0 - t) = 2{,}7 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

7.5. На сколько градусов нагреется вода, падая с высоты h, если $k\%$ выполненной при ее падении работы тратится на нагревание воды?

Работа, выполненная при падении с высоты h, равна потенциальной энергии, которую имела масса воды m на этой высоте:

$$A = E_п = mgh.$$

На нагревание пошло $k\%$ работы, т. е.

$$\frac{k}{100} mgh = mc\,\Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{kgh}{100c}.$$

7.6. В калориметре с массой m_1, удельная теплоемкость которого равна c_1, находится вода с массой m_2, нагретая до температуры t_1. В калориметр опускают смесь медных и алюминиевых опилок с массой m, имеющих температуру t_2. В результате температура воды повышается до θ. Определить массу медных и алюминиевых опилок.

Количество теплоты, полученное калориметром и водой,

$$Q_1 = m_1c_1(\theta - t_1) + m_2c_2(\theta - t_1).$$

Количество теплоты, отданное опилками,

$$Q_2 = m_3c_3(t_2 - \theta) + m_4c_4(t_2 - \theta),$$

где m_3, m_4, c_3, c_4 — соответственно массы и удельные теплоемкости медных и алюминиевых опилок, причем $m = m_3 + m_4$.

По закону сохранения энергии $Q_1 = Q_2$, так что

$$m_4 = \frac{(\theta - t_1)(m_1c_1 + m_2c_2) - mc_3(t_2 - \theta)}{(t_2 - \theta)(c_4 - c_3)};$$

$$m_3 = m - m_4.$$

7.7. В сосуде, из которого быстро откачивают воздух, находится небольшое количество воды с массой m при $t = 0°$ С. За счет интенсивного испарения происходит постепенное замораживание воды. Какая часть первоначальной массы воды может быть таким образом превращена в лед?

Необходимое для образования пара тепло может быть получено только за счет теплоты, освобождающейся при замерзании воды, $Q_1 = \lambda m_1$, где λ — удельная теплота плавления; m_1 — масса льда. Количество теплоты, необходимое для превращения в пар воды с массой m_2, равно $Q_2 = Lm_2$, где L — удельная теплота парообразования. Следовательно, $\lambda m_1 = Lm_2$.

Так как $m_1 + m_2 = m$, то

$$\lambda m_1 = L(m - m_1);$$
$$\frac{m_1}{m} = \frac{L}{\lambda + L}.$$

7.8. Железный шарик радиусом R, нагретый до температуры t_1, положили на лед, температура которого $t_2 = 0°$ С. На какую глубину погрузится шарик в лед? Теплопроводностью шарика и нагреванием воды пренебречь. Считать, что шарик погрузился в лед полностью (рис. 193).

Объем расплавившегося льда равен сумме объемов цилиндра ($\pi R^2 h$) и полусферы $\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right)$, т. е.

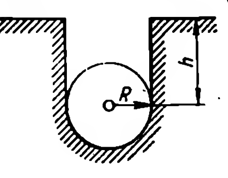


Рис. 193

$$V = \pi R^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Количество теплоты, отданное при охлаждении шара,

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho_1 R^3 c(t_1 - t_2) = \frac{4}{3}\pi\rho_1 R^3 c t_1,$$

где ρ_1 — плотность вещества шарика; c — его теплоемкость.

Количество теплоты, полученное льдом при плавлении,

$$Q_2 = m_2\lambda = \rho_2 V\lambda = \left(\pi R^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3\right)\rho_2\lambda,$$

где m_2, ρ_2 — масса и плотность льда.

По закону сохранения энергии $Q_1 = Q_2$, откуда

$$h = \frac{\frac{4}{3}\rho_1 R c t_1 - \frac{2}{3}R\rho_2\lambda}{\rho_2\lambda}.$$

7.9. В калориметре смешиваются одинаковые по весу количества воды при температуре $+t$ и льда при температуре $-t$. Определить, какая температура установится в калориметре, если нагреванием последнего пренебречь.

Количество теплоты, необходимое для нагревания льда до температуры плавления,

$$Q_1 = c_1 m(0 + t) = c_1 m t,$$

где c_1 — удельная теплоемкость льда.

Количество теплоты, которое выделится при остывании воды до 0° С,

$$Q_2 = c_2 m t,$$

где c_2 — удельная теплоемкость воды.

Известно, что $c_1 = 0{,}5c_2$, следовательно, $Q_2 > Q_1$, но $Q_2 - Q_1 = Q_3$ недостаточно для того, чтобы растопить весь лед, так как для этого потребовалось бы количество теплоты, равное $Q = \lambda m$, в то

время как $Q_3 = mt \cdot 0{,}5c_2$. Очевидно, что $\lambda > 0{,}5\, c_2 t$, т. е. $t < 2\lambda/c_2$. Если бы $\lambda = 0{,}5c_2 t$, то t должно было бы равняться 160°С.

7.10. Смесь, состоящую из воды (m_1) и льда (m_2), находящихся при $t_0 = 0°$ С, нужно нагреть до температуры Θ путем пропускания пара, температура которого $t = 100°$ С. Определить необходимое количество пара m_3.

Количество теплоты, которое выделится в результате конденсации пара и остывания образовавшейся воды до температуры Θ,

$$Q_1 = m_3 L + m_3 c\,(t - \Theta).$$

При нагревании воды, плавлении льда и последующем нагревании воды, полученной изо льда, будет поглощено количество теплоты

$$Q_2 = m_1 c\,(\Theta - t_0) + m_2\lambda + m_2 c\,(\Theta - t_0),$$

где c — удельная теплоемкость воды; λ — удельная теплота плавления льда; L — удельная теплота парообразования воды.

По закону сохранения энергии

$$m_3 L + m_3 c\,(t - \Theta) = m_1 c\,(\Theta - t_0) + m_2\lambda + m_2 c\,(\Theta - t_0),$$

откуда

$$m_3 = \frac{c\,(\Theta - t_0)\,(m_1 + m_2) + m_2\lambda}{L + c\,(t - \Theta)}.$$

7.11. В калориметре с массой m_1, имеющем удельную теплоемкость c_1, находится вода с массой m_2 при температуре t_1. В калориметр бросили мокрый снег с массой m_3. Температура в калориметре понизилась на Δt. Сколько воды было в снеге?

При охлаждении на Δt калориметром и водой, находящейся в нем, было отдано количество теплоты

$$Q_1 = m_1 c_1\,\Delta t + m_2 c_2\,\Delta t.$$

Если m — масса воды, содержащейся в мокром снеге, $(m_3 - m)$ — масса снега, то количество теплоты, получаемое мокрым снегом, имевшим первоначально температуру 0° С, при его плавлении и нагревании до температуры $(t_1 - \Delta t)$, равно

$$Q_2 = mc_2\,(t_1 - \Delta t) + (m_3 - m)\,\lambda + (m_3 - m)\,c_2\,(t_1 - \Delta t).$$

Так как $Q_1 = Q_2$, то

$$m_1 c_1\,\Delta t + m_2 c_2\,\Delta t = mc_2\,(t_1 - \Delta t) + (m_3 - m)\,\lambda + (m_3 - m)\,c_2\,(t_1 - \Delta t),$$

откуда

$$m = \frac{m_3\lambda + m_3 c_2 t_1 - (m_3 + m_2)\,c_2\,\Delta t - m_1 c_1\,\Delta t}{\lambda}.$$

7.12. В бак, содержащий воду с массой $m_1 = 10$ кг при температуре $t_1 = 20°$ С, бросили кусок железа с массой $m_2 = 2$ кг, нагретый до температуры $t_2 = 500°$ С. При этом некоторое количество воды превратилось в пар. Конечная температура, установившаяся в баке, равна $\Theta = 24°$ С. Определить массу воды, обратившейся в пар.

Количество теплоты, отданное железом при охлаждении от t_2 до Θ,

$$Q_1 = m_2 c_2\,(t_2 - \Theta).$$

Если массу воды, обратившейся в пар, обозначить через m, то количество теплоты, необходимое для нагревания этой массы до температуры $t_3 = 100°$ С и на ее испарение, будет равно

$$Q_2 = mc_1(t_3 - t_1) + mL.$$

Кроме того, оставшаяся в баке масса воды $(m_1 - m)$ нагревается до температуры Θ, следовательно,

$$Q_3 = (m_1 - m)c_1(\Theta - t_1).$$

Из закона сохранения энергии следует:

$$m_2c_2(t_2 - \Theta) = mc_1(t_3 - t_1) + mL + (m_1 - m)c_1(\Theta - t_1),$$

$$m = \frac{m_2c_2(t_2 - \Theta) - m_1c_1(\Theta - t_1)}{c_1(t_3 - t_1) + L - c_1(\Theta - t_1)} \approx 0{,}105 \text{ кг}.$$

7.13. На электроплитке с к. п. д. $\eta = 78\%$ нагревалась медная кастрюля с водой. Масса кастрюли $m_1 = 800$ г, масса воды $m_2 = 2{,}1$ кг. Какова мощность электроплитки, если процесс нагревания до кипения длился $\tau = 40$ мин и при этом 15% воды испарилось? Начальная температура воды $t_1 = 15°$ С.

Количество теплоты, необходимое для нагревания воды до кипения и испарения части этой воды,

$$Q_п = m_1c_1(t_2 - t_1) + m_2c_2(t_2 - t_1) + km_2L,$$

где m_1, c_1 — масса и удельная теплоемкость кастрюли; m_2, c_2 — масса и удельная теплоемкость воды; k — доля воды, превратившаяся в пар; t_2 — температура кипения воды; t_1 — начальная температура; L — удельная теплота парообразования воды.

Вся выделившаяся в плитке энергия

$$Q = \frac{Q_п}{\eta},$$

где η — к. п. д. электроплитки.

Искомая мощность

$$N = \frac{Q}{\tau} = \frac{m_1c_1(t_2 - t_1) + m_2c_2(t_2 - t_1) + km_2L}{\eta\tau} \approx 740 \text{ Вт}.$$

7.14. Определить, какое количество свинца, взятого при $t_0 = 0°$ С, можно расплавить за счет теплоты, полученной при сгорании $m_1 = 1$ кг нефти, если к. п. д. нагревателя $\eta = 80\%$.

Количество теплоты, необходимое для нагревания свинца с массой m до температуры плавления $t_{пл}$ и для того, чтобы перевести эту массу в жидкое состояние,

$$Q_1 = mc(t_{пл} - t_0) + m\lambda.$$

Полезное количество теплоты, идущее на нагревание при сгорании топлива,

$$Q_2 = \eta m_1 q,$$

где q — удельная теплота сгорания.

Из уравнения теплового баланса получим

$$m = \frac{rm_1q}{c(t_{пл} - t_0) + \lambda} \approx 556 \text{ кг}.$$

7.15. Температура 0° С является, как известно, одновременно и температурой таяния льда и температурой замерзания воды. Что произойдет, если мы в сосуд с водой при 0° С положим кусок льда при 0° С?

Лед тает при 0° С только в том случае, если ему сообщается количество теплоты, необходимое для переведения его в жидкое состояние. Вода же будет замерзать при 0° С, если от нее отнимать такое же количество теплоты. Поэтому, если сосуд извне не нагревается и не охлаждается, вода не будет замерзать, а лед не будет таять. Смесь воды и льда при 0° С будет находиться в термодинамическом равновесии.

7.16. В калориметр, заполненный тающим льдом, помещают кусок чугуна с массой $m = 0{,}325$ кг. Определить, какое количество льда растает к моменту установления теплового равновесия, если объем куска чугуна в момент опускания в калориметр $V = 48 \cdot 10^{-6}$ м³. При 0° С плотность чугуна $\rho_0 = 6{,}8 \cdot 10^3$ кг/м³; удельная теплоемкость его $c = 502{,}3$ Дж/(кг · К); коэффициент объемного расширения чугуна $\beta = 0{,}33 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$.

В момент погружения в лед плотность чугуна $\rho = \frac{m}{V}$ связана с плотностью ρ_0 соотношением

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta\Delta t}.$$

Отсюда изменение температуры чугуна

$$\Delta t = \frac{\rho_0 - \rho}{\beta\rho} = \frac{V\rho_0 - m}{\beta m}.$$

Количество теплоты, полученное льдом при плавлении,

$$Q = m_1\lambda.$$

Количество теплоты, отданное чугуном,

$$Q = mc\Delta t.$$

Количество растаявшего льда

$$m_1 = \frac{mc\Delta t}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}\,\frac{V\rho_0 - m}{\beta} \approx 64 \text{ г}.$$

7.17. В дьюаровском сосуде хранится $V = 2$ л жидкого азота при температуре $T_1 = 78$ К. За сутки половина этого количества испарилась. Определить удельную теплоту испарения азота, если известно, что 40 г льда при $T_0 = 273$ К в том же дьюаре растает в течение 22,5 ч. Скорость подвода тепла внутрь дьюара считать пропорциональной разности температур внутри и снаружи дьюара. Температура окружающего воздуха $T = 293$ К. Плотность жидкого азота при 78 К $\rho = 800$ кг/м³.

Для испарения азота требуется количество теплоты

$$Q_1 = m_1 L = \frac{V}{2} \rho L,$$

где V — объем жидкого азота; ρ — плотность; L — удельная теплота испарения азота.

Для этого было подведено теплоты

$$Q_1 = \alpha (T - T_1) t_1,$$

где t_1 — время испарения; $T - T_1$ — разность температур внутри и снаружи дьюара; α — коэффициент пропорциональности.

Для плавления льда понадобилось теплоты

$$Q_2 = m_2 \lambda,$$

где m_2 — масса льда; λ — его удельная теплота плавления. В данном случае должно быть подведено количество теплоты

$$Q_2 = \alpha (T - T_0) t_2.$$

Следовательно,

$$\alpha (T - T_1) t_1 = \frac{V}{2} \rho L,$$

$$\alpha (T - T_0) t_2 = m_2 \lambda.$$

Отсюда

$$\frac{(T - T_1) t_1}{(T - T_0) t_2} = \frac{V \rho L}{2 m_2 \lambda},$$

$$L = \frac{2 (T - T_1) t_1 m_2 \lambda}{(T - T_0) t_2 V \rho} = 1{,}8 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}.$$

7.18. Две свинцовые пули с массой m каждая, летящие во взаимно перпендикулярных направлениях с равными по модулю скоростями v_0, испытали абсолютно неупругий удар. На сколько градусов нагреются пули после удара и какова будет их суммарная кинетическая энергия, если в момент удара их температуры были одинаковыми?

По закону сохранения количества движения при неупругом ударе

$$m\vec{v}_{01} + m\vec{v}_{02} = 2m\vec{v}; \quad v_{01} = v_{02} = v_0;$$

$$2v = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = v_0 \sqrt{2}; \quad v = v_0 \sqrt{2}/2.$$

Таким образом, кинетическая энергия обеих пуль после удара

$$E_2 = 2m \frac{v^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2}.$$

Учитывая, что суммарная кинетическая энергия до удара

$$E_1 = m v_0^2,$$

из закона сохранения энергии $Q = \Delta E$ находим:

$$2mc\,\Delta t = \frac{m v_0^2}{2}; \quad \Delta t = \frac{v_0^2}{4c}.$$

7.19. Свинцовая пуля с массой m_1, летящая горизонтально со скоростью v_1, попадает в неподвижный стальной брусок с массой m_2, лежащий на гладком горизонтальном столе. Удар абсолютно неупругий. Какова будет температура обоих тел, если до удара температура пули была t_1, температура бруска t_2?

Согласно закону сохранения количества движения, после абсолютно неупругого удара оба тела приобретают одинаковую скорость

$$u = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}.$$

До удара кинетическая энергия

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2};$$

после удара

$$E' = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Энергия, затраченная на нагревание,

$$\Delta E = E - E' = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

С другой стороны,

$$\Delta E = m_1 c_1 \Delta t_1 + m_2 c_2 \Delta t_2.$$

Таким образом,

$$\frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = m_1 c_1 (\Theta - t_1) + m_2 c_2 (\Theta - t_2)$$

и

$$\Theta = \frac{\dfrac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} + m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

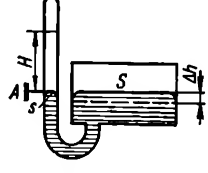


Рис. 194

7.20. Тонкая трубка сечением s, из которой откачан воздух, соединена с широким сосудом сечением S, наполненным ртутью (рис. 194). Когда открыли кран A, ртуть с массой m поднялась в трубку на высоту H, а уровень в сосуде понизился на Δh. Сколько выделилось при этом теплоты? Принять, что $S \gg s$ и $H \gg \Delta h$.

Работа, совершенная при подъеме ртути в трубке, $A = Sp\,\Delta h$, где S — площадь поверхности ртути в большом сосуде; p — атмосферное давление; Δh — понижение уровня ртути в этом сосуде.

Так как $p = \rho g H$, а объем $S\,\Delta h$, освободившийся от ртути в сосуде, равен объему sH, занятому ртутью в трубке (s — площадь сечения трубки), то

$$A = \rho g H s H = mgH.$$

Учитывая, что потенциальная энергия ртути увеличилась на

$$\Delta E = mg\frac{H}{2},$$

находим

$$Q = A - \Delta E = mgH - \frac{mgH}{2} = \frac{mgH}{2}.$$

7.21. Стержень длиной l_1 сделан из материала с коэффициентом линейного расширения α_1, а стержень длиной l_2 — из материала с коэффициентом линейного расширения α_2. Стержни спаяли и получили стержень длиной $l_1 + l_2$. Каков его коэффициент линейного расширения? Температура окружающей среды — t_1.

Для комбинированного стержня можно записать

$$(l_{01} + l_{02})(1 + \alpha t_1) = l_1 + l_2, \qquad (*)$$

где $l_1 + l_2$ — длина комбинированного стержня при температуре t_1; $l_{01} + l_{02}$ — длина того же стержня при температуре 0° С; α — искомый коэффициент линейного расширения.

Так как l_{01} и l_{02} — длины составляющих стержней при 0° С, то их можно найти из условий

$$l_{01}(1 + \alpha_1 t_1) = l_1; \quad l_{02}(1 + \alpha_2 t_1) = l_2.$$

Подставляя выражения для l_{01} и l_{02} в равенство (*) и решая его относительно коэффициента α, найдем

$$\alpha = \frac{l_1\alpha_1(1 + \alpha_2 t_1) + l_2\alpha_2(1 + \alpha_1 t_1)}{l_1(1 + \alpha_2 t_1) + l_2(1 + \alpha_1 t_1)}.$$

7.22. Шарик с коэффициентом объемного расширения β взвешивают в жидкости при температурах t_1 и t_2. Вес вытесненной жидкости равен соответственно P_1 и P_2. Определить коэффициент объемного расширения жидкости.

Пусть при 0° С объем шарика равен V_0, а плотность жидкости — ρ_0. Вес вытесненной в обоих случаях жидкости равен произведению удельного веса жидкости на объем шарика, взятых при соответствующих температурах

$$P_1 = \rho_1 g V_1; \quad P_2 = \rho_2 g V_2,$$

где

$$V_1 = V_0(1 + \beta t_1); \quad V_2 = V_0(1 + \beta t_2);$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_1 t_1}; \quad \rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_1 t_2}$$

(β_1 — коэффициент объемного расширения жидкости). Отсюда

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1 g V_1}{\rho_2 g V_2} = \frac{\rho_0(1 + \beta_1 t_2) g V_0 (1 + \beta t_1)}{\rho_0(1 + \beta_1 t_1) g V_0 (1 + \beta t_2)} = \frac{(1 + \beta_1 t_2)(1 + \beta t_1)}{(1 + \beta_1 t_1)(1 + \beta t_2)}.$$

Пренебрегая членами, содержащими произведение $\beta_1\beta_2$, вследствие их малости по сравнению с членами, содержащими β_1, β_2, получаем:

$$\frac{P_1}{P_2} \approx \frac{1 + \beta_1 t_2 + \beta t_1}{1 + \beta_1 t_1 + \beta t_2};$$

$$\beta_1 = \frac{P_2(1 + \beta t_2) - P_1(1 + \beta t_1)}{P_1 t_1 - P_2 t_2}.$$

7.23. Поверхность шара, изготовленного из материала с коэффициентом объемного расширения β, при 0° С была равна S_0.

1) Насколько увеличится поверхность шара, если его нагреть до температуры t?

При температуре 0° С поверхность шара $S_0 = 4\pi R_0^2$, откуда

$$R_0 = \sqrt{\frac{S_0}{4\pi}}.$$

Объем шара $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{S_0}{4\pi}\right)^{3/2}$.

При температуре t объем шара

$$V = V_0(1+\beta t) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{S_0}{4\pi}\right)^{3/2}(1+\beta t).$$

В то же время $V = 4\pi R^3/3$, где R — радиус шара при температуре t.

Приравнивая правые части приведенных равенств, имеем:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{S_0}{4\pi}\right)^{3/2}(1+\beta t),$$

откуда

$$R = \left(\frac{S_0}{4\pi}\right)^{1/2}(1+\beta t)^{1/3}.$$

Изменение площади поверхности шара

$$S - S_0 = 4\pi(R^2 - R_0^2) = 4\pi\left[\frac{S_0}{4\pi}(1+\beta t)^{2/3} - \frac{S_0}{4\pi}\right] =$$
$$= S_0\left[(1+\beta t)^{2/3} - 1\right].$$

2) Решить ту же задачу, если дана площадь поверхности шара S_1 при температуре t_1, а не при 0° С.

$$R_1 = \sqrt{\frac{S_1}{4\pi}};$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{S_1}{4\pi}\right)^{3/2}; \quad V_0 = \frac{V_1}{1+\beta t_1};$$

$$V = V_0(1+\beta t) = \frac{V_1(1+\beta t)}{1+\beta t_1} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi\left(\frac{S_1}{4\pi}\right)^{3/2}(1+\beta t)}{1+\beta t_1} = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$R = \frac{\left(\frac{S_1}{4\pi}\right)^{1/2}(1+\beta t)^{1/3}}{(1+\beta t_1)^{1/3}};$$

$$S - S_1 = \frac{\frac{4\pi S_1}{4\pi}(1+\beta t)^{2/3}}{(1+\beta t_1)^{2/3}} - S_1 = S_1\left[\frac{(1+\beta t)^{2/3} - (1+\beta t_1)^{2/3}}{(1+\beta t_1)^{2/3}}\right].$$

7.24. В центре диска, сделанного из материала с коэффициентом линейного расширения α, имеется отверстие, диаметр которого при температуре t_1 равен D_1. На сколько градусов следует нагреть диск, чтобы в отверстие мог пройти шарик диаметром d?

При температуре t_2 диаметр отверстия D_2 должен быть равен d, т. е.

$$D_2 = \frac{D_1 (1 + \alpha t_2)}{(1 + \alpha t_1)} = d;$$

$$D_1 (1 + \alpha t_2) = d (1 + \alpha t_1);$$

$$t_2 = \frac{d - D_1 + d\alpha t_1}{\alpha D_1};$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(d - D_1)(1 + \alpha t_1)}{\alpha D_1}.$$

7.25. Объем сосуда при температуре $t_0 = 0° $ С равен V_0; его коэффициент объемного расширения — β_1. Можно ли налить в сосуд столько жидкости, чтобы не заполненный ею объем не изменялся при изменении температуры? Сколько жидкости нужно налить? Чей коэффициент объемного расширения должен быть больше: сосуда или жидкости?

Обозначим искомый объем жидкости через v_0. Тогда свободный объем в сосуде при $t_0 = 0°$ С будет равен $V_0 - v_0$. При температуре t объем сосуда $V = V_0 (1 + \beta_1 t)$; объем жидкости $v = v_0 (1 + \beta_2 t)$, где β_2 — коэффициент объемного расширения жидкости.

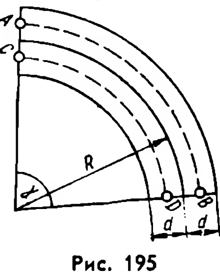


Рис. 195

По условию

$$V_0 (1 + \beta_1 t) - v_0 (1 + \beta_2 t) = V_0 - v_0.$$

Отсюда

$$v_0 = V_0 \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

Задача имеет решение только при $\beta_2 > \beta_1$.

7.26. Биметаллическая пластинка состоит из двух пластин длиной l_1 и l_2, толщиной d каждая, с коэффициентами линейного расширения α_1 и α_2 (рис. 195). Каков будет средний радиус кривизны пластинки при повышении температуры от t_1 до t_2?

Обозначим средний радиус кривизны пластинки через R. Из рисунка видно, что

$$AB = l_1 = \gamma \left(R + \frac{d}{2}\right); \qquad (1)$$

$$CD = l_2 = \gamma \left(R - \frac{d}{2}\right). \qquad (2)$$

Если начальная длина пластинки — l_0, то

$$l_1 = l_0 (1 + \alpha_1 \Delta t); \qquad (3)$$

$$l_2 = l_0 (1 + \alpha_2 \Delta t). \qquad (4)$$

Разность длин дуг AB и CD

$$\Delta l = l_1 - l_2 = \gamma R + \gamma \frac{d}{2} - \gamma R + \gamma \frac{d}{2} = \gamma d.$$

Из формул (3) и (4) находим

$$\Delta l = l_1 - l_2 = l_0 (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t.$$

Таким образом,

$$l_0 (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t = \gamma d. \qquad (5)$$

Из уравнений (1) и (3) имеем

$$\gamma = \frac{l_1}{R + \frac{d}{2}} = \frac{l_0 (1 + \alpha_1 \Delta_1)}{R + \frac{d}{2}}.$$

Подставив полученное выражение для γ в (5), получим

$$l_0 (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t = \frac{l_0 (1 + \alpha_1 \Delta t)}{R + \frac{d}{2}} d.$$

Решив это уравнение относительно R, находим

$$R = \frac{2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta t}{2 (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t} d.$$

7.27. Бак при температуре t_1 вмещает массу m_1 жидкости, а при температуре t_2 — массу m_2. Вычислить коэффициент линейного расширения материала, из которого изготовлен бак, если коэффициент объемного расширения жидкости — β_2.

Пусть объем бака при температуре 0° C — V_0, тогда при температуре t_1 его объем

$$V_1 = V_0 (1 + \beta_1 t_1);$$

при температуре t_2 его объем

$$V_2 = V_0 (1 + \beta_1 t_2),$$

где β_1 — коэффициент объемного расширения бака.

Для m_1 и m_2 могут быть записаны следующие уравнения:

$$m_1 = \rho_1 V_1; \quad m_2 = \rho_2 V_2,$$

где ρ_1, ρ_2 — плотности жидкости при температурах t_1 и t_2 соответственно.

Так как

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_2 t_1}; \quad \rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_2 t_2},$$

то

$$m_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_2 t_1} V_0 (1 + \beta_1 t_1);$$

$$m_2 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_2 t_2} V_0 (1 + \beta_1 t_2);$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(1 + \beta_2 t_2)(1 + \beta_1 t_1)}{(1 + \beta_2 t_1)(1 + \beta_1 t_2)}.$$

Пренебрегая членами, содержащими произведение $\beta_1\beta_2$, вследствие их малости по сравнению с членами, содержащими только β_1 или β_2, получим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \beta_2 t_2 + \beta_1 t_1}{1 + \beta_2 t_1 + \beta_1 t_2},$$

откуда

$$\beta_1 = \frac{m_1 (1 + \beta_2 t_1) - m_2 (1 + \beta_2 t_2)}{m_2 t_1 - m_1 t_2}.$$

Учитывая, что $\beta_1 = 3\alpha_1$, получим

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} \frac{m_1 (1 + \beta_2 t_1) - m_2 (1 + \beta_2 t_2)}{m_2 t_1 - m_1 t_2} = \frac{1}{3} \frac{(m_1 - m_2) + \beta_2 (m_1 t_1 - m_2 t_2)}{m_2 t_1 - m_1 t_2}.$$

7.28. Сколько теплоты нужно израсходовать на нагревание ртути, чтобы ее объем увеличился на 0,005 первоначального?

Пусть при температуре t_1 объем ртути был V_1, а при температуре t_2 стал $V_2 = 1{,}005V_1$. Тогда

$$V_2 = V_1 (1 + \beta\,\Delta t); \quad \Delta t = t_2 - t_1;$$
$$1{,}005V_1 = V_1 (1 + \beta\,\Delta t);$$
$$\frac{0{,}005V_1}{V_1} = \beta\Delta t;$$
$$\Delta t = \frac{0{,}005}{\beta}.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания ртути на Δt, может быть найдено по формуле $Q = mc\Delta t$. Кроме того, $m = \rho_1 V_1 = \frac{\rho_0 V_1}{1 + \beta t_1}$, откуда

$$Q_1 = \frac{\rho_0 V_1 c 0{,}005}{\beta (1 + \beta t_1)}.$$

7.29. Медная проволока, нагретая до температуры $t_1 = 150°$ С, натянута между двумя неподвижными стенками. При какой температуре, остывая, разорвется проволока (считать, что закон Гука справедлив вплоть до разрыва проволоки)?

Закон Гука для деформации растяжения:

$$\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{1}{E}\sigma,$$

где Δl — удлинение проволоки при нагревании; l_1 — ее первоначальная длина; E — модуль Юнга; σ — напряжение.

Для разрыва проволоки необходимо, чтобы $\sigma \geqslant \sigma_в$, где $\sigma_в$ — предел прочности. Таким образом,

$$\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{1}{E}\sigma_в. \qquad (*)$$

При остывании длина проволоки изменяется по закону

$$l = l_1 (1 - \alpha \Delta t),$$

где l_1 — длина проволоки при $t_1 = 150°$ C.

Отсюда

$$\Delta l = l_1 - l = \alpha \Delta t l_1;$$

$$\frac{\Delta l}{l_1} = \alpha \Delta t. \qquad (**)$$

Приравнивая правые части (*) и (**), получаем

$$\frac{1}{E} \sigma_в = \alpha \Delta t;$$

$$\Delta t = \frac{\sigma_в}{\alpha E} = 130° \text{ C}.$$

Температура, при которой разорвется проволока, равна

$$t_1 - \Delta t = 20° \text{ C}.$$

7.30. Часы снабжены металлическим маятником. При сравнении показаний этих часов с показаниями точных часов оказалось, что при 0° C они спешат на $\tau_1 = 8$ с в сутки, а при температуре $t_2 = 20°$ C отстают на $\tau_2 = 10$ с в сутки. Определить коэффициент линейного расширения материала маятника.

Пусть при температуре t_1 часы идут точно. При этом маятник совершает N колебаний в сутки, т. е.

$$N = \frac{24 \cdot 3600}{2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}},$$

где l_1 — длина маятника при температуре t_1.

При изменении температуры от 0° C до t_1 и от 0° C до t_2 длина маятника меняется по закону

$$l_1 = l_0 (1 + \alpha t_1);$$
$$l_2 = l_0 (1 + \alpha t_2).$$

Изменение периода маятника при изменении температуры от t_1 до 0° C

$$\Delta T_1 = T_1 - T_0 = 2\pi \left(\sqrt{\frac{l_1}{g}} - \sqrt{\frac{l_0}{g}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} (\sqrt{l_1} - \sqrt{l_0}).$$

Изменение периода маятника при изменении температуры от t_1 до t_2

$$\Delta T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} (\sqrt{l_2} - \sqrt{l_1}).$$

Следовательно, время, на которое часы уходят вперед при 0° C,

$$\tau_1 = N \Delta T_1 = 24 \cdot 3600 \left[1 - \sqrt{\frac{l_0}{l_1}} \right] = 24 \cdot 3600 \left[1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \alpha t_1}} \right].$$

Время, на которое часы отстают при $t_2 = 20°$ C,

$$\tau_2 = N\Delta T_2 = 24 \cdot 3600\left(\sqrt{\frac{l_2}{l_1}} - 1\right) = 24 \cdot 3600\left(\sqrt{\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1}} - 1\right).$$

Из выражений для τ_1 и τ_2 находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1+\alpha t_1} &= \frac{(24 \cdot 3600 - \tau_1)^2}{(24 \cdot 3600)^2}; \\ \frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1} &= \frac{(\tau_2 + 24 \cdot 3600)^2}{(24 \cdot 3600)^2}. \end{aligned}\right\}$$

Решив приведенную систему уравнений, получим

$$\alpha = \frac{1}{t_2}\left[\frac{(\tau_2 + 24 \cdot 3600)^2}{(24 \cdot 3600 - \tau_1)^2} - 1\right] =$$

$$= \frac{(\tau_1 + \tau_2)(\tau_2 - \tau_1 + 48 \cdot 3600)}{t_2 (24 \cdot 3600 - \tau_1)^2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-5} 1/\text{К}.$$

8. Насыщающие и ненасыщающие пары. Влажность

Насыщающий пар — пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью. Плотность и давление пара при данной температуре наибольшие в состоянии насыщения.

Ненасыщающий пар — пар, находящийся в таком состоянии, при котором процесс испарения преобладает над процессом конденсации.

Свойства паров отделенных от жидкости (при неизменной массе). При изотермическом расширении насыщающего пара или при его изохорическом нагревании пар становится ненасыщающим.

Ненасыщающие пары с достаточной степенью точности подчиняются всем законам идеальных газов.

Параметры состояния насыщающего пара приближенно описываются уравнением Клапейрона—Менделеева. Законы идеальных газов в этом случае неприменимы, так как при изменении параметров масса пара меняется.

Абсолютная влажность D — количество водяного пара (в граммах), содержащееся в 1 м³ воздуха.

Относительная влажность r — процентное отношение абсолютной влажности D к количеству водяного пара D_0, необходимому для насыщения 1 м³ воздуха при данной температуре:

$$r = \frac{D}{D_0}\, 100\%.$$

Из уравнения Клапейрона—Менделеева следует, что относительная влажность равна отношению парциального давления пара к давлению этого же пара в состоянии насыщения:

$$r = \frac{p}{p_н} \cdot 100\%.$$

Поверхностное натяжение жидкостей. На любой участок поверхностного слоя жидкости со стороны каждого из окружающих участков слоя действует сила F, стремящаяся удержать этот участок в растянутом состоянии. Эта сила направлена вдоль поверхностного слоя и называется силой поверхностного натяжения:

$$F = \sigma l,$$

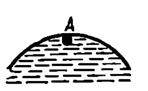
где l — периметр поверхностного слоя жидкости; σ — коэффициент поверхностного натяжения, численно равный силе, приложенной к единице длины прямолинейного края поверхностной пленки. Поверхностное натяжение уменьшается с увеличением температуры и обращается в нуль при критической температуре.

Энергия поверхностного слоя жидкости площадью S

$$E = \sigma S.$$

Работа при изменении площади пленки на ΔS

$$A = \sigma \Delta S.$$



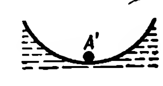


Рис. 196

Формула Лапласа. Добавочное давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, определяется формулой Лапласа

$$\Delta p = \pm \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости (знак «+» — для выпуклого мениска, знак «—» — для вогнутого мениска). Давление в точках A, A' (рис. 196) равно соответственно

$$p_A = p_0 + \Delta p; \quad p_{A'} = p_0 - \Delta p,$$

где p_0 — давление на свободную поверхность жидкости.

В том случае, когда $R_1 = R_2 = R$ (сферическая поверхность),

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Для тонкостенной полой сферы (пузыря)

$$\Delta p = 2\frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{R},$$

так как полая среда имеет две поверхности — внешнюю и внутреннюю.

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{r \rho g},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; r — радиус трубки; ρ — плотность жидкости; ϑ — краевой угол. При полном смачивании $\vartheta = 0$, при полном несмачивании $\vartheta = \pi$.

8.1. Каков вес водяного пара в объеме $V = 1$ м³ воздуха в летний день при температуре $t = 30°$ и относительной влажности $r = 75\%$?

Относительная влажность определяется по формуле $r = \frac{p}{p_н} 100\%$, где p — давление водяных паров, находящихся в воздухе; $p_н$ — давление насыщающих водяных паров при данной температуре.

Масса водяных паров может быть определена из уравнения Клапейрона—Менделеева:

$$m = \frac{pV\mu}{RT} = \frac{rp_н V\mu}{RT};$$

$$P = mg = \frac{rp_н V\mu g}{RT} = 22,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

8.2. В герметически закрытом сосуде объемом V находится кипящая вода с массой m_1 и пары воды при температуре кипения 100° С (воздуха в сосуде нет). Найти массу пара.

Так как сосуд герметичен, то пар насыщает объем и его давление p_0 равно атмосферному. Из уравнения состояния получаем

$$m_2 = \frac{p_0\left(V - \frac{m_1}{\rho}\right)\mu}{RT},$$

где $\frac{m_1}{\rho}$ — объем, занятый водой.

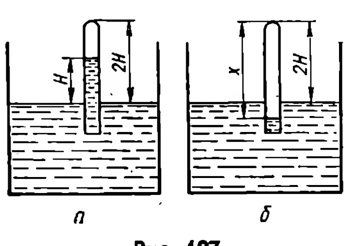


Рис. 197

8.3. Запаянную с одного конца трубку, содержащую некоторое количество воздуха, опустили в резервуар с водой. Длина надводной части трубки — $2H$, уровень воды внутри трубки отстоит на H от запаянного конца (рис. 197, *а*). Начальная температура всей системы $t_0 = 0°$ С. Найти положение уровня воды в трубке после нагревания всей системы до температуры кипения. Атмосферное давление p_0 — нормальное; давлением водяных паров при 0° С пренебречь.

При температуре кипения давление насыщающих паров $p_н = p_0$, следовательно, уровень воды в трубке будет ниже уровня воды в сосуде (рис. 197, *б*), и давление в трубке

$$p_2 = p_0 + (x - 2H)\rho g.$$

Из уравнения Клапейрона—Менделеева $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$ имеем

$$\frac{p_1 H}{T_0} = \frac{p_2 x}{T_2}, \qquad (*)$$

где $p_1 = p_0 - \rho g H$.

После подстановки выражений для p_1 и p_2 в (*) получаем:

$$\frac{(p_0-\rho gH)H}{T_0}=\frac{[p_0+(x-2H)\rho g]x}{T_2};$$

$$(p_0-\rho gH)HT_2=[p_0+(x-2H)\rho g]xT_0;$$

$$x^2T_0\rho g+(2H\rho g-p_0)T_0x-(p_0-\rho gH)HT_2=0;$$

$$x=\frac{(2H\rho g-p_0)}{2\rho g}+\sqrt{\left(\frac{2H\rho g-p_0}{2\rho g}\right)^2+\frac{(p_0-\rho gH)HT_2}{T_0\rho g}}.$$

Так как $p_0\gg 2H\rho g$, то для того, чтобы выполнялось неравенство $x>0$, берем перед корнем знак «+».

8.4. Масса одного кубического метра влажного воздуха при относительной влажности r, температуре T и нормальном давлении p_0 равна m. Определить давление $p_н$ насыщающего пара при этой температуре.

Масса влажного пара равна сумме масс сухого воздуха и пара, каждая из которых определяется из уравнения газового состояния:

$$m_1=\frac{\mu_1(p_0-rp_н)V}{RT};\quad m_2=\frac{\mu_2rp_нV}{RT},$$

$$m=m_1+m_2=\frac{\mu_1(p_0-rp_н)V}{RT}+\frac{\mu_2rp_нV}{RT},$$

где μ_1 — молекулярная масса воздуха; μ_2 — молекулярная масса пара.

Из этого уравнения

$$p_н=\frac{1}{r(\mu_1-\mu_2)}\left(\mu_1p_0-\frac{mRT}{V}\right).$$

8.5. В сосуде объемом V находится сухой воздух при нормальных условиях. Каким будет давление в сосуде, если влить в него воду с массой m и нагреть сосуд до температуры T (считать, что вся вода испарилась)?

Искомое давление $p=p_1+p_2$, где p_1, p_2 — парциальные давления воздуха и водяного пара при температуре T.

Давление воздуха может быть найдено по закону Шарля: $p_1=p_0T/T_0$, где T — конечная температура.

Давление водяного пара определим из уравнения состояния $p_2=\frac{mRT}{\mu V}$, где V — объем сосуда. Так как вся вода испарилась, то

$$p=p_0\frac{T}{T_0}+\frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}.$$

8.6. В комнате объемом V воздух имеет температуру t_1 и относительную влажность r_1. Сколько воды нужно испарить, чтобы относительная влажность в комнате достигла r_2? Известно, что при t_1 давление насыщающих паров воды равно p_1.

Из уравнения состояния можно определить массу паров, находящихся в комнате при температуре t_1 и относительной влажности r_1:

$$m_1=\frac{\mu r_1p_1V}{RT_1}.$$

При относительной влажности r_2

$$m_2 = \frac{\mu r_2 p_1 V}{RT_1}.$$

Искомая массы воды

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1}(r_2 - r_1).$$

8.7. В цилиндре объемом V над поршнем находится влажный воздух при температуре t_1. Относительная влажность его r. Каково будет давление в цилиндре, если объем при этой температуре уменьшился в n раз? Начальное давление — p_1. Давление насыщающего пара при температуре t_1 равно $p_{н1}$.

Давление пара при относительной влажности r

$$p_{п1} = r p_{н1},$$

следовательно, давление воздуха составляет

$$p_{в1} = p_1 - p_{п1}.$$

При изотермическом сжатии в n раз давление воздуха согласно закону Бойля — Мариотта

$$p_{в2} = p_{в1}\frac{V_1}{V_2} = p_{в1} n.$$

Пары воды при уменьшении объема станут насыщающими и часть воды сконденсируется. Полное давление в цилиндре после сжатия

$$p_2 = p_{в2} + p_{н1} = (p_1 - r p_{н1})\, n + p_{н1}.$$

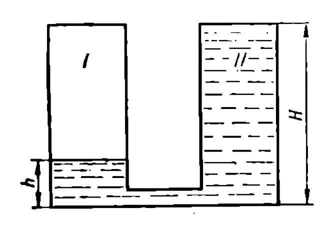


Рис. 198

В случае, если первоначальный общий объем цилиндра велик, уменьшением объема за счет сконденсировавшейся воды можно пренебречь.

8.8. Два цилиндрических сосуда одинаковой высоты H соединены тонким шлангом снизу. Сосуд I плотно закрыт крышкой. Сначала в сосуде находится сухой воздух при давлении p_1. Затем сосуд II при постоянной температуре до краев заполняют водой, при этом в сосуде I вода находится на высоте h. Определить давление насыщающих паров при температуре опыта (рис. 198).

После установления равновесия в сосуде I будут находиться воздух и насыщающий пар при давлении

$$p = p_2 + p_н,$$

где p_2 — давление сухого воздуха в сосуде I после заполнения сосуда II; $p_н$ — давление насыщающих паров.

Из закона Бойля—Мариотта можно найти

$$p_2 = p_1 \frac{H}{H - h}.$$

С другой стороны,

$$p = p_1 + \rho_в g (H - h).$$

Если давление p_1 привести к миллиметрам ртутного столба, получим

$$p = p_1 + \frac{\rho_в}{\rho_{рт}} (H - h),$$

где $\rho_в$, $\rho_{рт}$ — плотности воды и ртути соответственно; H, h — выражены в мм.

Окончательно имеем

$$p_н = p - p_2 = p_1 + \frac{\rho_в}{\rho_{рт}} (H - h) - p_1 \frac{H}{H - h} =$$

$$= \frac{\rho_в}{\rho_{рт}} (H - h) - p_1 \frac{h}{H - h}.$$

8.9. При каких условиях можно расплавить свинец в воде?

Если нагревать воду в герметически закупоренном сосуде, то, оставаясь в жидком состоянии, она может достичь критической температуры 374° С при давлении 220,68 · 10^5 Па. Температура плавления свинца 327° С.

8.10. Температура воздуха в комнате — t_1, а относительная влажность — r_1. В комнате затопили печь, температура воздуха повысилась до t_2. При этом некоторая часть воздуха вместе с содержащимся в нем паром ушла из комнаты и давление в комнате не изменилось. Определить относительную влажность воздуха при температуре t_2.

Давление насыщающих паров при t_1 равно p_1, при t_2 — равно p_2. Поскольку суммарное давление в комнате не изменилось, то

$$p_{в1} + p_{п1} = p_{в2} + p_{п2},$$

где $p_{в1}$, $p_{в2}$ — давления сухого воздуха при температурах t_1, t_2 соответственно; $p_{п1}$, $p_{п2}$ — давления пара.

Количества воздуха и пара в комнате уменьшились до одинаковой степени. Это можно записать как

$$\frac{p_{в1}}{p_{п1}} = \frac{p_{в2}}{p_{п2}}.$$

Отсюда следует, что при изменении температуры давления $p_п$ и $p_в$ остались неизменными:

$$p_{п1} = p_{п2},$$

$$r_1 p_1 = r_2 p_2,$$

$$r_2 = r_1 \frac{p_1}{p_2}.$$

8.11. На поверхность воды положили жирную (полностью несмачиваемую водой) стальную иголку. Какой наибольший диаметр иголки, при котором она еще может держаться на воде?

Для того чтобы иголка могла держаться на воде, необходимо, чтобы давление, оказываемое иголкой на площадь ее опоры, не превышало давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублении под иголкой и направленного вверх (силой Архимеда можно в данном случае пренебречь).

Давление иголки на воду

$$p_1 = \frac{P}{ld} = \frac{\rho g V}{ld} = \frac{\rho g l \frac{\pi d^2}{4}}{ld} = \frac{\rho \pi g d}{4},$$

где d, l, V — диаметр, длина и объем иголки; ρ — плотность стали.

Избыточное давление вследствие кривизны поверхности определяется по формуле Лапласа

$$p_2 = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

В случае цилиндрической поверхности $R_1 = \frac{d}{2}$; $R_2 = \infty$, таким образом,

$$p_2 = \frac{2\sigma}{d},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Для того чтобы иголка могла удержаться на поверхности, необходимо, чтобы $p_2 \geqslant p_1$, т. е.

$$\frac{2\sigma}{d} \geqslant \frac{\rho \pi g d}{4}.$$

Отсюда

$$d \leqslant \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho \pi g}}.$$

8.12. Между двумя вертикальными плоскопараллельными стеклянными пластинками, находящимися на расстоянии l друг от друга, налита жидкость (рис. 199). Найти плотность жидкости, если известно, что высота подъема жидкости между пластинками $h = 0{,}031$ м; коэффициент поверхностного натяжения жидкости $\sigma = 0{,}06$ Н/м; смачивание полное. Принять, что $l \ll h$.

При вертикальном положении пластин, опущенных в смачивающую жидкость, дополнительное давление, обусловленное кривизной поверхности жидкости, направлено вертикально вверх и может быть рассчитано по формуле Лапласа

$$p_1 = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

В рассматриваемом случае поверхность смачивающей жидкости имеет цилиндрическую форму, значит

$$R_1 = \frac{l}{2}; \quad R_2 = \infty; \quad p_1 = \frac{2\sigma}{l}.$$

Гидростатическое давление столба жидкости всегда направлено вниз и равно

$$p_2 = \rho g h.$$

При установившемся положении столба жидкости $p_1 = p_2$, или

$$\rho g h = \frac{2\sigma}{l},$$

$$\rho = \frac{2\sigma}{lgh} \approx 790 \text{ кг/м}^3.$$

8.13. Найти разность уровней ртути в двух сообщающихся капиллярах радиусами R_1, R_2. Несмачивание считать полным (рис. 200).

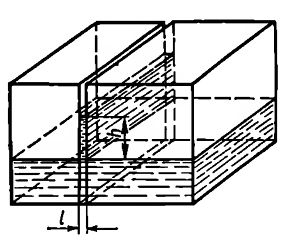


Рис. 199

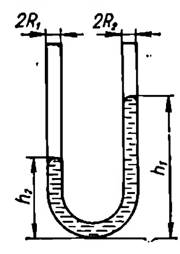


Рис. 200

Ртуть установится в сообщающихся капиллярах на уровнях, при которых давления, оказываемые жидкостью в обоих капиллярах, будут одинаковыми, т. е. $p_1 = p_2$. Каждое из этих давлений равно сумме давлений: гидростатического и избыточного, обусловленного кривизной поверхности мениска жидкости.

Гидростатическое давление

$$p' = \rho g h.$$

В случае полного несмачивания радиус кривизны мениска равен радиусу капилляра, и избыточное давление может быть определено по формуле Лапласа для сферической поверхности

$$p'' = \frac{2\sigma}{R}.$$

Таким образом,

$$\rho g h_1 + \frac{2\sigma}{R_1} = \rho g h_2 + \frac{2\sigma}{R_2}.$$

Отсюда

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{2\sigma (R_1 - R_2)}{\rho g R_1 R_2}.$$

8.14. Какую работу необходимо совершить, чтобы разбить сферическую каплю радиусом R на две одинаковые капли?

При разбивании капли работа расходуется на увеличение поверхности жидкости ΔS, так как площадь поверхности большой капли

меньше, чем сумма площадей двух получившихся капель. Изменение поверхностной энергии при этом

$$\Delta E = \sigma \Delta S = A.$$

Если $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — первоначальный объем большой капли, то объем меньших капель $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V = \frac{2}{3}\pi R^3$. С другой стороны, $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$.

Из этих уравнений

$$R_1^3 = \frac{1}{2}R^3;$$

$$R_1 = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}.$$

Поверхность большой капли $S = 4\pi R^2$. Суммарная поверхность двух малых капель $2S_1 = 2 \cdot 4\pi R_1^2 = \frac{8\pi}{\sqrt[3]{4}}R^2$.

Увеличение поверхности

$$\Delta S = 2S_1 - S = 4\pi R^2\left(\frac{2}{\sqrt[3]{4}} - 1\right)$$

и

$$A = 4\pi R^2\sigma\left(\sqrt[3]{2} - 1\right).$$

8.15. Радиус мыльного пузыря — R, поверхностное натяжение мыльной воды $\sigma = 4{,}3 \cdot 10^{-2}$ Н/м. Вычислить добавочное давление воздуха внутри пузыря и его поверхностную энергию.

Добавочное давление внутри пузыря обусловлено кривизной его поверхности. Сферическую поверхность мыльного пузыря можно рассматривать как сумму двух поверхностей — внешней и внутренней, к каждой из которых применима формула Лапласа, вследствие чего суммарное добавочное давление (если считать радиусы обеих сфер одинаковыми)

$$\Delta p = 2\frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{R}.$$

Поверхностная энергия $E = \sigma S_1$, где S_1 — сумма внутренней и внешней поверхностей, которые будем считать одинаковыми, так как мы пренебрегли разностью между их радиусами,

$$E = 2\sigma S = 8\pi\sigma R^2.$$

8.16. В дне сосуда с ртутью имеется отверстие. Каким может быть наибольший диаметр отверстия при высоте столба ртути h, чтобы ртуть из сосуда не выливалась?

Для того чтобы ртуть не выливалась, гидростатическое давление столба ртути высотой h должно быть меньше или равно давлению,

обусловленному искривленностью поверхности ртути. При полном несмачивании поверхности

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{r};$$

$$r = \frac{2\sigma}{\rho gh},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность ртути.

8.17. Какую силу нужно приложить, чтобы оторвать друг от друга без сдвига две смоченные стеклянные пластинки площадью S (рис. 201)? Толщина водяной прослойки между пластинками — d. Смачивание полное. Коэффициент поверхностного натяжения — σ.

Поверхность смачивающей жидкости между пластинами имеет форму цилиндра с радиусом кривизны $r = d/2$, где d — расстояние между пластинками. Тогда добавочное отрицательное давление

$$p = \frac{\sigma}{r} = \frac{2\sigma}{d}$$



Рис. 201

Сила достаточная для того, чтобы оторвать пластинки друг от друга,

$$F = pS = \frac{2\sigma S}{d}.$$

8.18. В открытом капилляре находится капля воды. При вертикальном положении капилляра капля может образовать столбики длиной h_1, h_2, h_3, причем $h_1 < h_3 < h_2$. Внутренний радиус капилляра — r. Найти радиусы кривизны верхнего и нижнего менисков в каждом случае. Смачивание считать полным.

При вертикальном положении капилляра верхний мениск всегда вогнутый и давление, вызванное кривизной этого мениска, всегда направлено вверх и равно $p_1 = 2\sigma/R_1$, где R_1 — радиус верхнего мениска.

При полном смачивании $R_1 = r$. Гидростатическое давление столбика воды всегда направлено вниз и равно $p_2 = \rho gh$.

1) Если при высоте h_1 столбика $p_1 > p_2$, то результирующее давление направлено вверх и заставляет нижний мениск быть вогнутым. При этом давление $p_3 = 2\sigma/R_2$ (R_2 — радиус нижнего мениска). В равновесии

$$p_1 = p_2 + p_3;$$

$$\frac{2\sigma}{r} = \rho gh + \frac{2\sigma}{R_2}; \quad R_2 = \frac{2\sigma}{\left(\frac{2\sigma}{r} - \rho gh\right)}.$$

2) Если при высоте h_2 столбика $p_1 < p_2$, то результирующее давление $p' = p_2 - p_1$ направлено вниз и нижний мениск будет выпуклым. При этом давление $p_3 = 2\sigma/R_2$ будет направлено вверх, следовательно,

$$p_1 + p_3 = p_2;$$

$$\frac{2\sigma}{r} + \frac{2\sigma}{R_2} = \rho gh;$$

$$R_2 = \frac{2\sigma}{\rho gh - \frac{2\sigma}{r}}.$$

3) Если при промежуточной высоте h_3 столбика $p_1 = p_2$, то нижний мениск будет плоским и $p_3 = 0$, т. е.

$$R_2 = \infty.$$

8.19. В вакууме в чашку с маслом, имеющим весьма низкую упругость пара и хорошо смачивающим стекло, погружена стеклянная трубка радиусом r. Найти давление в масле на высоте $h/3$ над уровнем масла в чашке, если h — высота подъема масла в капиллярной трубке (рис. 202) и коэффициент поверхностного натяжения — σ.

Так как чашка с маслом находится в вакууме, внешнее давление на свободную поверхность жидкости равно нулю.

Подъем жидкости в капилляре обусловлен искривленностью мениска жидкости. Следовательно, гидростатическое давление столба жидкости высотой h, равное $p_1 = \rho g h$, уравновешивается давлением, обусловленным искривленностью поверхности, равным

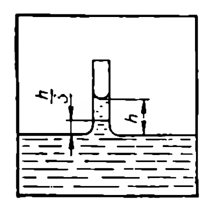


Рис. 202

$$p_2 = \frac{2\sigma}{r},$$

т. е.

$$\rho g h = \frac{2\sigma}{r}.$$

Для точки, находящейся на высоте $h/3$, давление p будет равно $p = p_1/3$, т. е.

$$p = \frac{2\sigma}{3r}.$$

8.20. Воздушный пузырек находится на расстоянии H от свободной поверхности жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ, в которой возбуждены ультразвуковые колебания. Вычислить максимальное и минимальное давления в пузырьке, если его радиус изменяется по закону $R = R_0 + A\sin\omega t$. Атмосферное давление равно p_0, испарением жидкости внутрь пузырька пренебречь.

Полное давление внутри пузырька равно сумме атмосферного и гидростатического давлений и давления, обусловленного кривизной поверхности

$$p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \rho g H + p_0.$$

Так как $R_1 = R_2 = R$, то

$$p = \frac{2\sigma}{R_0 + A\sin\omega t} + \rho g H + p_0.$$

Условие максимума: $\sin\omega t = -1$, так что

$$p_{макс} = \frac{2\sigma}{R_0 - A} + \rho g H + p_0.$$

Условие минимума: $\sin\omega t = 1$, так что

$$p_{мин} = \frac{2\sigma}{R_0 + A} + \rho g H + p_0.$$

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

9. Электростатика

Электрический заряд состоит из отдельных элементарных положительных или отрицательных зарядов, всегда связанных с каким-либо телом. Элементарный положительный заряд несут протон, однозарядный ион, позитрон; элементарный отрицательный заряд — электрон. Элементарный заряд e равен $1,6 \cdot 10^{-19}$ кулона (Кл). Кулоном называется электрический заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за 1 секунду при силе тока в 1 ампер.

Взаимодействие зарядов. Закон Кулона. Одноименные точечные* заряды отталкиваются, а разноименные — притягиваются с силой

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Здесь q_1 и q_2 — взаимодействующие заряды, Кл; r — расстояние между ними, м; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся заряды (для вакуума $\varepsilon = 1$). Сила F при этом выражается в ньютонах и направлена по прямой, соединяющей заряды.

Напряженность электрического поля E численно равна силе, действующей на единичный заряд, помещенный в поле. Таким образом, точечный заряд q_1 создает в точке, удаленной от q_1 на расстояние r, поле напряженностью

$$E = \frac{F}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Напряженность электрического поля — вектор, направленный вдоль $\vec{r}$. Напряженности, создаваемые несколькими зарядами, складываются геометрически (принцип наложения, суперпозиции, полей).

Единица измерения напряженности электрического поля — ньютон на кулон или, что то же самое, вольт на метр.

Объемная плотность заряда (заряд единицы объема тела)

$$\gamma = \frac{q}{V}.$$

Поверхностная плотность заряда (заряд единицы поверхности тела)

$$\sigma = \frac{q}{S}.$$

* Под точечными зарядами понимают заряженные тела, размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними.

Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля между двумя разноименно заряженными бесконечными плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Последние два выражения не зависят от расстояния, что характеризует однородное поле.

Напряженность поля шара с зарядом q в точке вне шара, удаленной на расстояние r от центра шара,

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

т. е. равна напряженности поля точечного заряда q, расположенного в центре шара.

Потенциал электростатического поля. Если единичный положительный заряд, находящийся в поле одноименного точечного заряда q, удаляется от него, то кулоновская сила при этом совершает работу, равную $Er = q/4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$. При увеличении расстояния r сила быстро уменьшается (как $1/r^2$) и произведенная работа возрастает все медленнее и медленнее, пока, наконец, возрастание практически прекращается (математически это произойдет при $r \to \infty$). Произведенная работа характеризует электростатическую потенциальную энергию или потенциал точки, в которой вначале находился единичный заряд. Таким образом, потенциал точки поля, находящейся на расстоянии r от источника поля, численно равен работе электростатической силы при удалении единичного положительного заряда из этой точки на бесконечность:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами (принцип наложения полей).

Разность потенциалов. Если потенциалы точек *1* и *2* равны соответственно φ_1 и φ_2, то работа по перемещению единичного заряда из точки *1* в точку *2* характеризует разность потенциалов точек *1* и *2*, или электрическое напряжение U_{12} между этими точками. Если переместить не единичный заряд, а произвольный заряд q, то совершенная при этом работа

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU_{12}.$$

Единицей измерения разности потенциалов служит вольт. При перемещении заряда в 1 кулон под действием напряжения в 1 вольт совершается работа в 1 джоуль.

Если точки *1* и *2* находятся на расстояниях r_1 и r_2 от точечного источника поля, то $\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = E_1 r_1 - E_2 r_2$. В случае однородного поля $E_1 = E_2 = E$; $r_1 - r_2 = d$ и

$$E = \frac{U_{12}}{d}.$$

Согласно этой формуле единица измерения напряженности имеет наименование вольт на метр.

Электроемкость. Если сообщить проводнику заряд q, то при этом будет произведена работа против кулоновских сил отталкивания (предыдущие порции заряда будут отталкивать последующие) и проводник приобретет потенциал φ, пропорциональный сообщенному заряду:

$$q = C\varphi = C(\varphi_2 - \varphi_1) = CU.$$

Коэффициент C называется электроемкостью проводника. Единица электроемкости называется фарадой (Ф). Фарада — емкость такого проводника, потенциал которого возрастает на 1 вольт при сообщении ему заряда в 1 кулон.

C1 C2 C3 C4 Cn

а

C1 C2 C3 C4 Cn

б

Рис. 203

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S — площадь пластины; d — расстояние между пластинами; ε — диэлектрическая проницаемость среды между пластинами.

Емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Rr}{R - r},$$

где R и r — радиусы внешней и внутренней сфер.

Емкость шара радиуса r

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r.$$

При параллельном соединении конденсаторов (рис. 203, *а*)* их емкости складываются:

$$C = C1 + C2 + \cdots + C_n.$$

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 203, *б*) складываются величины, обратные емкостям:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} + \cdots + \frac{1}{C_n}.$$

* Здесь и далее *элементы электрических схем* обозначаются прописными и строчными буквами русского, латинского и греческого алфавитов согласно приложению 1 ГОСТа 2.702—69 и цифрой — порядковым номером, который присоединяется к буквенному обозначению вслед за ним и пишется слитно с ним.

Энергия заряженного проводника емкостью C (заряженного конденсатора)

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Взаимная энергия двух точечных зарядов q_1 и q_2

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}$$

Электрический диполь. Электрическим диполем называется система из двух разноименных точечных зарядов q, равных по величине и находящихся на расстоянии l друг от друга. Диполь характеризуется векторной величиной, называемой электрическим моментом диполя,

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

причем положительным направлением вектора $\vec{p}$ считается направление от отрицательного к положительному заряду.

Электронвольт (эВ) — энергия, которую приобретает частица с зарядом, равным элементарному заряду $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, прошедшая в вакууме ускоряющую разность потенциалов, равную 1 вольту.

$$1 \text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

9.1. Два одинаковых проводящих шарика с зарядами $+q_1$ и $-q_2$ вследствие притяжения соприкоснулись и вновь разошлись на расстояние r. Определить заряд каждого шарика после соприкосновения и силу взаимодействия между ними.

Заряд каждого шарика после соприкосновения равен

$$q = \frac{q_1 + (-q_2)}{2} = \frac{q_1 - q_2}{2}.$$

По закону Кулона сила взаимодействия между шариками

$$F = \frac{1}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{(q_1 - q_2)^2}{r^2}.$$

9.2. Два шарика, радиусы и веса которых равны, подвешены так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда q они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол 2α. Найти вес шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика равно l (рис. 204) и размер шарика мал по сравнению с отклонением от положения равновесия.

Для того чтобы шарики находились в равновесии, равнодействующая F силы натяжения $F_н$ и силы тяжести P должна уравновешиваться кулоновской силой взаимодействия $F_к$.

Из силового треугольника

$$F = P \operatorname{tg} \alpha.$$

По закону Кулона

$$F_к = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2};$$

$$q_1 = q_2 = q/2; \; R = 2(s + r) = 2(l \sin\alpha + r),$$

где r — радиус шарика;

$$P \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q^2}{4(2l \sin \alpha + 2r)^2}$$

или

$$P = \frac{q^2}{64\pi\varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{tg} \alpha (l \sin \alpha + r)^2}.$$

Так как $r \ll l \sin \alpha$, то

$$P = \frac{1}{64\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q^2}{l^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}.$$

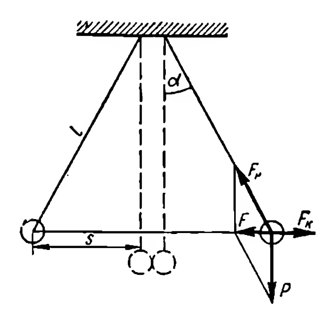


Рис. 204

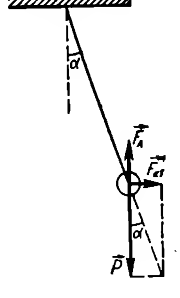


Рис. 205

9.3. Два шарика, одинаковые по радиусу и весу, подвешенные на нитях одинаковой длины, опускаются в жидкий диэлектрик, плотность которого — ρ_1 и диэлектрическая проницаемость — ε_1. Какова должна быть плотность материала шариков, чтобы углы их расхождения в воздухе и диэлектрике были одинаковы?

Из выше рассмотренной задачи следует, что вес шарика и кулоновская сила отталкивания шариков в воздухе $F_к$ связаны соотношением

$$F_к = P \operatorname{tg} \alpha.$$

На шарик, находящийся в диэлектрике, кроме силы тяжести и кулоновской силы отталкивания действует выталкивающая сила Архимеда F_A (рис. 205), так что

$$F_{к1} = (P - F_A) \operatorname{tg} \alpha.$$

Из этих двух уравнений следует, что

$$F_{к1} = \frac{P - F_A}{P} F_к = \frac{F_к}{\varepsilon_1},$$

откуда

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = 1 - \frac{F_A}{P}.$$

По закону Архимеда $F_A = \rho_1 q V$, где V — объем шарика; $P = \rho q V$. Следовательно,

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right),$$

или

$$\rho = \frac{\rho_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - 1}.$$

9.4. Имеются два положительных заряда $q_1 = ne$ и $q_2 = me$. Расстояние между зарядами — l. Как нужно расположить третий заряд q, чтобы он находился в равновесии, если заряды q_1 и q_2: 1) закреплены; 2) свободны? Чему в этом случае равен заряд q?

1) Для того чтобы заряд q был в равновесии, сила F_1, действующая на него со стороны заряда q_1, должна быть равна силе F_2, действующей на него со стороны заряда q_2 (рис. 206).

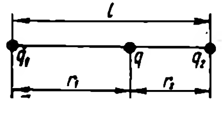


Рис. 206

По закону Кулона

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2 q}{r_2^2}.$$

Так как $r_1 = l - r_2$, то

$$\frac{q_1}{(l - r_2)^2} = \frac{q_2}{r_2^2},$$

или

$$\frac{ne}{(l - r_2)^2} = \frac{me}{r_2^2},$$

откуда

$$r_2 = \frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}.$$

Для устойчивого равновесия заряд q должен быть положительным. Если он сместится из положения равновесия ближе к заряду q_2, то сила отталкивания со стороны этого заряда возрастет, а со стороны заряда q_1 — уменьшится и заряд q возвратится в положение равновесия.

2) В этом случае заряд q должен быть отрицательным, но равновесие будет неустойчивым. Если, например, заряд q_1 сместится в сторону заряда q, то испытываемая им сила притяжения со стороны заряда q превысит силу отталкивания со стороны заряда q_2 и равновесие нарушится, причем заряды q_1 и q сомкнутся, а заряд q_2 улетит на бесконечность.

Условием равновесия системы будет равенство нулю суммы сил, действующих на каждый из зарядов:

$$F_1 = F_2;\ F_{21} = F_1;\ F_2 = F_{21},$$

где F_1 — сила взаимодействия зарядов q и q_1; F_2 — сила взаимодействия зарядов q и q_2; F_{21} — сила взаимодействия зарядов q_1 и q_2.

Из этих уравнений, с учетом того, что $r_1 + r_2 = l$, получаем значения r_1 и r_2, как в случае 1). Потом записываем:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{l^2} = \frac{qq_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}; \quad \frac{q_1}{l^2} = \frac{q}{r_2^2},$$

откуда

$$q = q_1 \frac{m}{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2}.$$

9.5. Электрон вращается по круговой орбите радиуса r вокруг ядра с зарядом Ze. Каковы скорость и период вращения электрона?

Роль центростремительной силы в данном случае играет кулоновская сила взаимодействия

$$F_к = F_ц;$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{eZe}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

где m — масса электрона.

Отсюда

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 rm}.$$

Период вращения

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{e}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 rm}{Z}}.$$

Рис. 207

9.6. Два одинаковых металлических шарика радиусом r и плотностью ρ надеты на тонкий непроводящий стержень. Верхний шарик закреплен, нижний может свободно перемещаться вдоль стержня. Шарики опущены в жидкость, диэлектрическая проницаемость которой — ε, плотность — ρ_1. У каждого миллиардного атома верхнего шарика забрали по одному электрону и перенесли на подвижный шарик. На каком расстоянии будет находиться нижний шарик от верхнего в состоянии равновесия, если стержень расположен вертикально (рис. 207)?

Если электроны с одного шарика перенесены на другой, то заряды этих шариков равны по величине и противоположны по знаку. Следовательно, между шариками будут действовать кулоновские силы притяжения. На нижний шарик действуют: сила тяжести $P = \rho gV = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g$, где ρ — плотность шарика; сила Архимеда $F_A = \rho_1 gV = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g$, где ρ_1 — плотность жидкости; кулоновская сила $F_к = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{R}$, причем $|q_1| = |q_2| = ne$, где n — число перенесенных электронов.

Для того чтобы шарик был в равновесии, необходимо, чтобы

$$F_к + F_A = P,$$

$$\frac{n^2e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} + \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g;$$

$$n = \frac{N}{Z} = \frac{m}{\mu}\frac{N_A}{Z} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho N_A}{\mu Z}.$$

Здесь N — число атомов, содержащихся в шарике с массой m и молекулярным весом μ; Z — отношение полного числа атомов к числу атомов, лишенных одного электрона; N_A — число Авогадро.

$$\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2 \rho^2 N_A^2 e^2}{\mu^2 Z^2 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g,$$

откуда

$$R = \sqrt{\frac{r^3\rho^2 N_A^2 e^2}{3\varepsilon\varepsilon_0 \mu^2 Z^2 g(\rho - \rho_1)}} = \frac{\rho N_A e r}{\mu Z}\sqrt{\frac{r}{3\varepsilon\varepsilon_0 g(\rho - \rho_1)}}.$$

9.7. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a расположены точечные заряды q, $2q$, $3q$, $4q$, $5q$, $6q$ (рис. 208). Найти силу, действующую на точечный заряд q, лежащий на пересечении диагоналей шестиугольника.

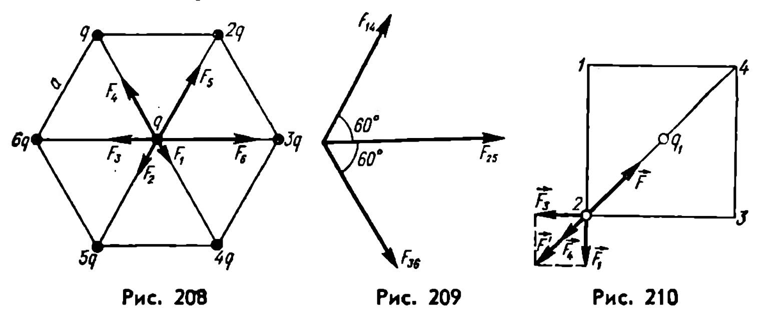


Рис. 208 Рис. 209 Рис. 210

Если все заряды одноименные, то между центральным зарядом q и остальными зарядами действуют силы отталкивания F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}; \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{2q^2}{a^2} = 2F_1;$$

$$F_3 = 3F_1; \quad F_4 = 4F_1;$$

$$F_5 = 5F_1; \quad F_6 = 6F_1.$$

Равнодействующая сил F_1 и F_4 равна $F_{14} = 3F_1$ и направлена в сторону F_4; равнодействующая сил F_2 и F_5 равна $F_{25} = 3F_1$ и направлена в сторону F_5. Наконец, равнодействующая сил F_3 и F_6 равна $F_{36} = 3F_1$ и направлена в сторону F_6. Следовательно (рис. 209),

$$F = F_{25} + F_{14}\cos 60^\circ + F_{36}\cos 60^\circ = 6F_1 = \frac{3}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2},$$

9.8. В вершинах квадрата находятся одинаковые положительные заряды q. Какой отрицательный заряд нужно поместить в центре квадрата, чтобы система была в равновесии (рис. 210)?

Для того чтобы каждый из зарядов, находящихся в вершине квадрата, был в равновесии, необходимо, чтобы равнодействующая сил, действующих на этот заряд, равнялась нулю. Обозначим через F_3 силу взаимодействия между зарядами *2* и *3*; F_1 — между зарядами *2* и *1*; F_4 — между зарядами *2* и *4*; F — между зарядом *2* и зарядом q_1 в центре квадрата. Условие равновесия заряда *2*:

$$\vec{F}+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_1=0.$$

Обозначим

$$\vec{F'}=\vec{F}_3+\vec{F}_1,$$

тогда

$$F'=\sqrt{F_3^2+F_1^2}=F_1\sqrt{2}.$$

Силы F_3 и F_1 равны по величине, так как заряды *1* и *3* находятся на одинаковом расстоянии от заряда *2* и равны между собой. Условие равновесия может быть записано в виде

$$F-F_4-F_1\sqrt{2}=0,$$

или

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\frac{qq_1}{r^2}-\frac{q^2}{(2r)^2}-\frac{q^2\sqrt{2}}{a^2}\right]=0.$$

Так как

$$2r=a\sqrt{2},$$

то

$$\frac{2q_1}{a^2}-\frac{q}{2a^2}-\frac{q\sqrt{2}}{a^2}=0;\ q_1=\frac{q(2\sqrt{2}+1)}{4}.$$

Это равновесие будет неустойчивым (см. задачу 9.4).

9.9. На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону. Каков радиус капелек, если сила электростатического отталкивания уравновешивает силу гравитационного притяжения?

Как видно из условия задачи, заряды капелек $q_1=q_2=e$. По условию

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2}=\gamma\frac{m^2}{R^2},$$

где m — масса капельки; R — расстояние между каплями.

Очевидно, что

$$m=\rho V=\frac{4}{3}\pi r^3\rho,$$

где r — радиус капли; ρ — плотность воды.

Таким образом,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2}=\gamma\frac{16\pi^2r^6\rho^2}{9R^2},$$

откуда

$$r = \sqrt[6]{\frac{9e^2}{64\pi^3\varepsilon\varepsilon_0\rho^2\gamma}}.$$

9.10. Заряды $q_1 = q$ и $q_2 = -2q$ находятся на расстоянии l друг от друга. С какой силой действуют эти заряды на третий заряд $q_3 = 3q$, если он расположен на расстоянии l от середины линии, соединяющей эти заряды (рис. 211)?

Сила, действующая на заряд q_3, равна геометрической сумме сил, с которыми заряды q_1 и q_2 действуют на него:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

По закону Кулона

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r^2} = \frac{3q^2}{5\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2};\ F_2 = \frac{6q^2}{5\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2}$$

(так как $r^2 = 5l^2/4$). Очевидно, что

$$\cos\alpha = \cos 2\gamma = \cos^2\gamma - \sin^2\gamma = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{l^2}{l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = -0{,}6;$$

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{9q^4 + 36q^4 - 36q^4\cdot 0{,}6}{25\pi^2(\varepsilon\varepsilon_0)^2 l^4};$$

$$F = \frac{3\sqrt{2.6}q^2}{5\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2}.$$

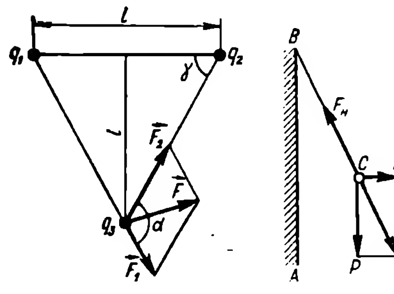


Рис. 211 Рис. 212

9.11. AB — равномерно заряженная бесконечная плоскость, C — одноименно заряженный шарик весом P. Заряд шарика равен q. Натяжение нити равно $F_н$. Найти поверхностную плотность заряда на плоскости AB (рис. 212).

На шарик C действуют сила тяжести P и сила $F_e = qE$, с которой поле напряженностью E, создаваемое заряженной плоскостью, действует на заряд q. Модуль силы натяжения нити равен модулю равнодействующей этих сил, т. е. $|F_н| = |F|$. Напряженность поля бесконечной плоскости $E = \sigma/2\varepsilon\varepsilon_0$, где σ — поверхностная плотность заряда. Из рисунка видно, что

$$F_н^2 = F_e^2 + P^2 = \frac{\sigma^2q^2}{4(\varepsilon\varepsilon_0)^2} + P^2.$$

Отсюда

$$\sigma = \sqrt{\frac{(F_н^2 - P^2)\,4\varepsilon_0^2\varepsilon^2}{q^2}} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{q}\sqrt{F_н^2 - P^2}.$$

9.12. Металлический шар радиусом r помещен в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε и плотностью ρ_2. Плотность материала, из которого изготовлен шар, равна ρ_1. Чему равен заряд шара, если в однородном электрическом поле, направленном вертикально вверх, шар оказался взвешенным в жидкости? Электрическое поле создается двумя параллельными пластинами, расстояние между которыми — d, а разность потенциалов — U.

На шар действуют: сила электрического поля F_e, направленная вверх; сила тяжести P, направленная вниз; сила Архимеда F_A, направленная вверх.

В состоянии равновесия

$$F_A + F_e = P,$$

где

$$F_A = \rho_2 V g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2 g \ (V \text{ — объем шара});$$

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_1;$$

$$F_e = qE = q\frac{U}{d};$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g\rho_2 + q\frac{U}{d} = \frac{4}{3}\pi r^3 g\rho_1,$$

откуда

$$q = \frac{4\pi r^3 g(\rho_1 - \rho_2)d}{3U}.$$

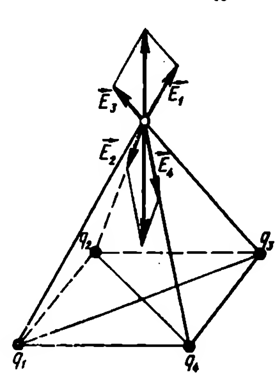


Рис. 213

9.13. В вершинах основания правильной четырехгранной пирамиды находятся заряды $q_1 = q$; $q_2 = -q$; $q_3 = q$; $q_4 = -q$. Найти напряженность в вершине пирамиды (рис. 213).

Напряженность в вершине, создаваемая зарядами q_1 и q_3, равна $\vec{E}' = \vec{E}_1 + \vec{E}_3$; напряженность, создаваемая зарядами q_2 и q_4, равна $\vec{E}'' = \vec{E}_2 + \vec{E}_4$ и направлена в сторону, противоположную $\vec{E}'$. Так как $|E_1| = |E_2| = |E_3| = |E_4|$, то результирующая напряженность в вершине равна нулю.

9.14. Между горизонтальными обкладками большого плоского конденсатора подвешен на нити маленький металлический шарик с массой m. Период колебаний шарика в отсутствие зарядов был равен T_1. После того как конденсатор и шарик были заряжены, период колебаний стал равен T_2, причем $T_2 > T_1$. С какой силой действует электрическое поле на шарик? Какова длина нити? Каков будет период колебаний шарика, если изменить знак его заряда на обратный?

Если заряд шарика равен $+e$, а напряженность поля конденсатора равна E (верхняя пластина конденсатора отрицательна), то на шарик, кроме силы тяжести, действует сила электрического поля $F_e = eE$, направленная вверх. За счет действия этой добавочной силы изменится ускорение свободного падения шарика в конденсаторе. По второму закону Ньютона

$$mg' = mg - eE = mg - F_e,$$

или

$$g' = g - \frac{F_e}{m}.$$

Период колебаний

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - \frac{F_e}{m}}},$$

в то время как

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Очевидно, что

$$l = \frac{gT_1^2}{4\pi^2}$$

и

$$T_2^2 = \frac{T_1^2 g}{\left(g - \frac{F_e}{m}\right)},$$

откуда

$$F_e = \frac{(T_2^2 - T_1^2)\,mg}{T_2^2}.$$

Если заряд шарика равен $-e$, на него действует сила $F_e = eE$, направленная вертикально вниз. Период колебаний в данном случае

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{F_e}{m}}}.$$

9.15. Бузиновый шарик с массой m, подвешенный на нити длиной l, помещен между двумя вертикальными бесконечными разноименно заряженными пластинами. Разность потенциалов на пластинах — U, расстояние между ними — d, причем $l \gg d$ (рис. 214). Шарик совершает колебания в плоскости, перпендикулярной пластинам. Чему будет равен период колебаний шарика, если ему сообщить заряд e?

На шарик будут действовать сила тяжести $P = mg$ и сила электрического поля $F_e = eE$. Равнодействующая этих сил

$$F = \sqrt{F_e^2 + P^2} = \sqrt{(mg)^2 + (eE)^2}.$$

По второму закону Ньютона ускорение, с которым движется шарик,

$$g' = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (eE)^2}}{m} = \sqrt{g^2 + \frac{e^2E^2}{m^2}}.$$

Отсюда период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \frac{e^2E^2}{m^2}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{eU}{md}\right)^2}}}.$$

9.16. Тяжелая частица с зарядом q, массой m и кинетической энергией T влетает в плоский конденсатор, между обкладками которого поддерживается постоянная разность потенциалов U. Расстояние между обкладками конденсатора — d, длина пластин конденсатора — l. На расстоянии L от конденсатора находится экран (рис. 215). Начальная скорость частицы направлена параллельно пластинам. Найти смещение частицы на экране. Как изменится ответ, если влетевшая частица — электрон?

Движение частицы в конденсаторе можно рассматривать как результат двух простых движений: равномерного движения вдоль оси X по инерции и равноускоренного движения вдоль оси Y под действием силы тяжести

Рис. 214

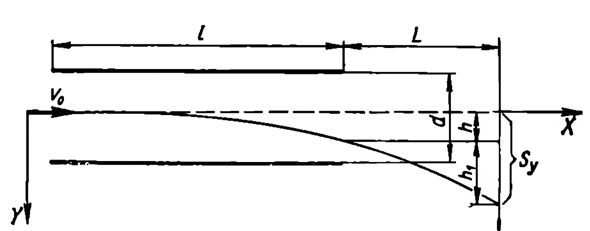


Рис. 215

и силы электрического поля. Горизонтальная составляющая скорости v_x равна v_0, вертикальная составляющая v_y равна at.

На частицу действуют вертикальные силы: сила тяжести $P = mg$ и сила электрического поля $F_e = qE = q\frac{U}{d}$. Если эти силы направлены в одну сторону, то их равнодействующая равна $F = ma = mg + qE$; если в противоположные стороны, то $F = ma = mg - qE$. В общем случае

$$ma = mg \pm qE$$

и

$$a = g \pm \frac{qU}{dm}.$$

Время пролета частицей конденсатора $t = l/v_0$. В момент вылета вертикальная составляющая скорости частицы равна

$$v'_y = at = \left(g \pm \frac{qU}{dm}\right)\frac{l}{v_0}.$$

При этом частица сместится по вертикали на

$$h = \frac{at^2}{2} = \left(g \pm \frac{qU}{dm}\right)\frac{l^2}{2v_0^2}.$$

В дальнейшем на частицу в вертикальном направлении будет действовать только сила тяжести, движение же по горизонтали останется движением по инерции. Время, необходимое для достижения экрана,

$$t_1 = \frac{L}{v_0}.$$

Смещение частицы относительно уровня, на котором она вылетела из конденсатора,

$$h_1 = v'_y t_1 + \frac{gt_1^2}{2} = \left(g \pm \frac{qU}{dm}\right)\frac{lL}{v_0^2} + \frac{gL}{2v_0^2}.$$

Общее смещение

$$S_y = h + h_1 = \left(g \pm \frac{qU}{dm}\right)\frac{l^2}{2v_0^2} + \left(g \pm \frac{qU}{dm}\right)\frac{lL}{v_0^2} + \frac{gL^2}{2v_0^2}.$$

Так как

$$T = \frac{mv_0^2}{2}; \quad v_0^2 = \frac{2T}{m},$$

то

$$S_y = \left(g \pm \frac{qU}{dm}\right)\frac{ml^2}{2\cdot 2T} + \left(g \pm \frac{qU}{dm}\right)\frac{lLm}{2T} + \frac{mgL^2}{2\cdot 2T} =$$

$$= \frac{m}{2T}\left[\left(g \pm \frac{qU}{dm}\right)\left(\frac{l^2}{2} + lL\right) + \frac{gL^2}{2}\right].$$

В случае, когда рассматривается движение электрона, выполняется условие $mg \ll qE = \frac{eU}{d}$, поэтому величиной mg можно пренебречь. При этом

$$S_y = \pm\frac{1}{2T}\left[\frac{eU}{d}\left(\frac{l^2}{2} + Ll\right)\right].$$

9.17. Электрон влетает в плоский конденсатор под углом α к плоскости пластин и вылетает под углом β, причем $\beta < \alpha$. Длина конденсатора — l, разность потенциалов между пластинами — U, расстояние между ними — d. Определить начальную скорость электрона и его энергию при вылете из конденсатора (рис. 216).

Для электрона силой тяжести можно пренебречь по сравнению с силой электрического поля. Поэтому движение электрона в конденсаторе можно рассматривать как результат равномерного движения по инерции в горизонтальном направлении и равнозамедленного движения под действием силы электрического поля — в вертикальном.

Составляющие скорости электрона в момент вылета из конденсатора:

$$v_y = v_{0y} - at; \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha;$$
$$v_x = v_0 \cos \alpha.$$

По второму закону Ньютона $ma = eE = \frac{eU}{d}$, откуда $a = eU/md$. Так как

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0 \cos \alpha},$$

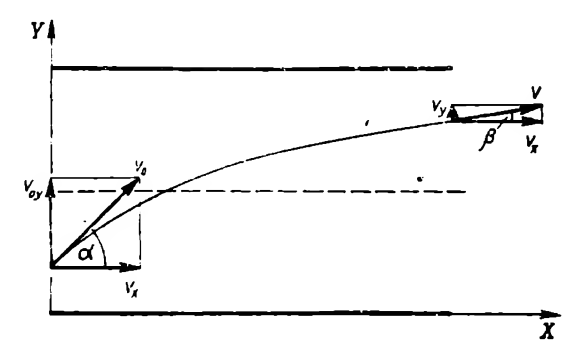


Рис. 216

то

$$v_y = v_0 \sin \alpha - \frac{eU}{md} \frac{l}{v_0 \cos \alpha}.$$

Из рисунка видно, что

$$\frac{v_{0y}}{v_x} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \beta$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_0 \sin \alpha - \frac{eU}{md} \frac{l}{v_0 \cos \alpha}}{v_0 \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{eU}{md} \frac{l}{v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{eU}{md} \frac{l}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Отсюда

$$v_0^2 = \frac{eUl}{md \cos^2 \alpha \, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}.$$

Скорость электрона при вылете из конденсатора

$$v = \sqrt{v_y^2 + v_x^2} = \sqrt{v_x^2 \operatorname{tg}^2 \beta + v_x^2} =$$

$$= v_x \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + 1} = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Энергия электрона

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \beta}.$$

9.18. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого — d, находится заряженная капелька с массой m. При отсутствии электрического поля капелька вследствие сопротивления воздуха падает с некоторой постоянной скоростью. Если к пластинам конденсатора приложено напряжение U, капелька падает вдвое медленнее. Найти заряд капельки.

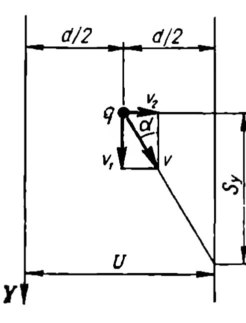


Рис. 217

В отсутствие поля сила тяжести уравновешивается силой трения, определяемой для сферического тела по формуле Стокса

$$mg = 6\pi r \eta v_1,$$

где η — коэффициент вязкости воздуха; r — радиус капли; v_1 — скорость капли.

При наличии поля

$$mg - qE = 6\pi r \eta v_2,$$

где v_2 — скорость капли.

Из обоих уравнений имеем:

$$mg - qE = \frac{mgv_2}{v_1};$$

$$q = \frac{mg\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)}{E} = \frac{mgd}{U}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right).$$

По условию задачи $v_2 = 0{,}5 v_1$, следовательно,

$$q = \frac{mgd}{2U}.$$

9.19. Между двумя вертикальными пластинами на одинаковом расстоянии $d/2$ от каждой падает пылинка с массой m и зарядом q (рис. 217). Вследствие сопротивления воздуха скорость падения пылинки постоянна и равна v_1. Через сколько времени после подачи на пластины напряжения U пылинка достигнет одной из пластин? Какое расстояние S_y по вертикали пролетит пылинка до попадания на пластину?

В отсутствие электрического поля (см. задачу 9.18)

$$mg = 6\pi r \eta v_1.$$

При включении поля на пылинку в горизонтальном направлении начинает действовать сила $E_e = qE$. Вследствие вязкости среды эта сила также уравновешивается и в горизонтальном направлении движение пылинки происходит с постоянной скоростью, т. е.

$$qE = 6\pi r\eta v_2.$$

Результирующая скорость v направлена под углом α к вертикали. Очевидно, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\dfrac{qE}{6\pi r\eta}}{\dfrac{mg}{6\pi r\eta}} = \frac{qE}{mg} = \frac{qU}{mgd}.$$

С другой стороны,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{0{,}5l}{S_y},$$

откуда

$$S_y = \frac{0{,}5mgd}{Uq};$$

$$t = \frac{S_y}{v_1} = \frac{0{,}5mgd}{Uqv_1}.$$

9.20. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный положительный заряд плотностью σ_1 и σ_2. Какова напряженность поля E: 1) между пластинами; 2) вне пластин? Построить график изменения напряженности вдоль оси, перпендикулярной пластинам, считая напряженность положительной, если ее вектор направлен слева направо.

Решить задачу для случая, когда заряд второй пластины отрицательный.

1) Поле, создаваемое каждой из бесконечных пластин (рис. 218):

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon\varepsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Согласно принципу суперпозиции полей

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

или

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

2)

$$E = \mp \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Когда заряд второй пластины отрицательный (рис. 219), поле между пластинами

$$E = \frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon\varepsilon_0};$$

поле вне пластин

$$E = \mp \frac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

9.21. Несколько маленьких капель ртути радиусом r и с зарядом q каждая сливаются в одну большую каплю. Найти потенциал последней и плотность заряда на ее поверхности, если в воде находилось n капель ртути.

По закону сохранения заряда $Q = nq$, где Q — заряд большой капли.

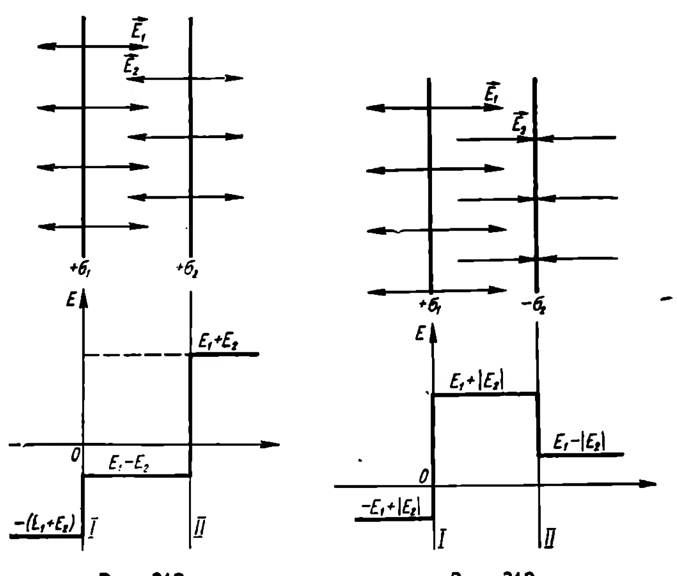


Рис. 218 Рис. 219

Радиус большой капли найдем из равенства объемов: $nv = V$, где v — объем малой капли; V — объем большой капли. Следовательно,

$$n\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3; \ R = r\sqrt[3]{n}.$$

Емкость сферы в воде

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\sqrt[3]{n},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость воды.

Зная заряд и емкость большой капли, находим ее потенциал

$$\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{nq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\sqrt[3]{n}}.$$

Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{nq}{4\pi r^2 \sqrt[3]{n^2}}.$$

9.22. Заряды $q_1 = q$ и $q_2 = -q$ находятся на расстоянии l друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля в точке, удаленной на расстояние r от первого заряда и лежащей на линии, проходящей через первый заряд перпендикулярно к прямой, соединяющей q_1 и q_2 (рис. 220).

Искомая напряженность поля

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

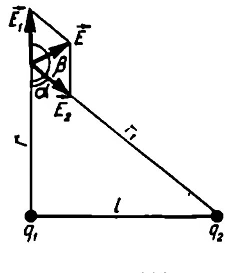




Рис. 220

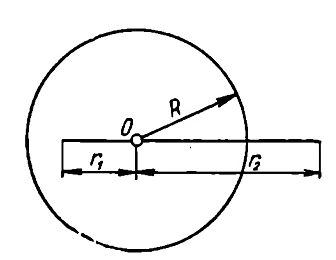


Рис. 221

Напряженности поля, создаваемые точечными зарядами q_1 и q_2, равны соответственно

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}; \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_1^2},$$

а так как $r_1^2 = l^2 + r^2$, то

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2}{(r^2 + l^2)}.$$

Квадрат модуля напряженности поля

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\beta.$$

Из рисунка следует:

$$\cos\beta = -\cos\alpha; \quad \cos\alpha = \frac{r}{r_1} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}};$$

$$E^2 = \frac{1}{(4\pi\varepsilon\varepsilon_0)^2}\left(\frac{q_1^2}{r^4} + \frac{q_2^2}{(r^2 + l^2)^2} - 2\frac{q_1\,|q_2|}{r^2(r^2 + l^2)}\,\frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}\right);$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{r^4} + \frac{1}{(r^2 + l^2)^2} - \frac{2}{r(r^2 + l^2)^{3/2}}}.$$

Для потенциала в той же точке можно записать $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где

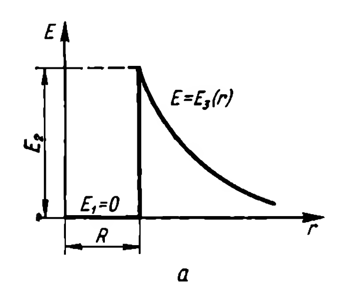
$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r};$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_1} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{l^2+r^2}}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{l^2+r^2}}\right).$$

9.23. Сплошная металлическая сфера радиусом $R = 20$ см несет равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 10^{-9}$ Кл/м². Определить напряженность и потенциал электриче-



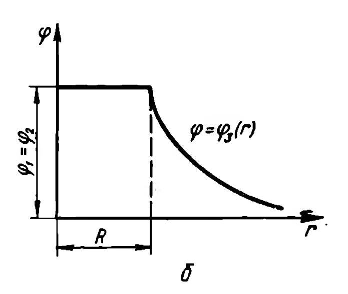


Рис. 222

ского поля в точках на расстоянии $r_1 = 16$ см от центра сферы; на поверхности сферы; на расстоянии $r_2 = 36$ см от центра сферы (рис. 221). Построить графики зависимости $E = E(r)$ и $\varphi = \varphi(r)$ (рис. 222).

Условие статического распределения зарядов требует, чтобы внутри сферы напряженность поля равнялась пулю. Из этого же условия следует, что потенциал φ_1 в любой точке внутри сферы одинаков и равен потенциалу φ_2 на поверхности сферы:

$$E_1 = 0; \ \varphi_1 = \varphi_2.$$

Известно, что заряженная сфера создает вокруг себя такое поле, какое создавал бы точечный заряд (равный заряду, находящемуся на сфере), помещенный в центр сферы.

Для $r = R$ имеем:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = 113 \text{ В/м};$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon\varepsilon_0} \approx 22{,}6 \text{ В}.$$

Для $r = r_2$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2} = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2} = 34{,}5 \text{ В/м};$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r_2} = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = 12{,}42 \text{ В}.$$

9.24. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) несут на себе заряды q_1 и $-q_2$. Найти напряженность и потенциал поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояния: 1) $r_1 < R_1$; 2) $R_1 < r_2 < R_2$; 3) $r_3 > R_2$. Построить графики зависимости $E = E(r)$ и $\varphi = \varphi(r)$.

1) Точка лежит внутри обеих сфер. Рассуждая аналогично предыдущей задаче, находим, что $E = 0$;

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы полей, создаваемых каждой сферой в отдельности. Так как они равны потенциалам на поверхности сфер, то

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}.$$

2) Точка лежит вне первой сферы и внутри второй сферы.

Известно, что равномерно заряженная сфера создает вокруг себя такое же поле, как точечный заряд, равный заряду сферы и помещенный в ее центр. Поэтому

$$E = E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r_2^2},$$

где E_1 — напряженность поля первой сферы в данной точке;

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы полей, создаваемых каждой сферой, в данной точке.

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1}; \quad \varphi_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_2}{R_2};$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_2}{R_2}.$$

3) Точка лежит вне обеих сфер, следовательно,

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_3^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_3^2};$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_3} - \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_3}.$$

На рис. 223, *а*, *б* представлены графики зависимости $E = E(r)$ и $\varphi = \varphi(r)$.

9.25. Расстояние между двумя металлическими шарами велико по сравнению с их размерами. Радиус первого шара — R_1 и он заряжен до потенциала φ_1; радиус второго — R_2 и он заряжен до потенциала φ_2. Каким будет потенциал шаров, если их соединить проволокой?

До соединения шаров

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_1} \frac{q_1}{R_1}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

где q_1 и q_2 — заряды шаров.

$$q = q_1 + q_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 \varphi_1 + 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2 \varphi_2.$$

После соединения потенциалы обоих шаров будут одинаковы:

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi; \ \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1'}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2'}{R_2},$$

где q_1' и q_2' — заряды на поверхности шаров. По закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$$

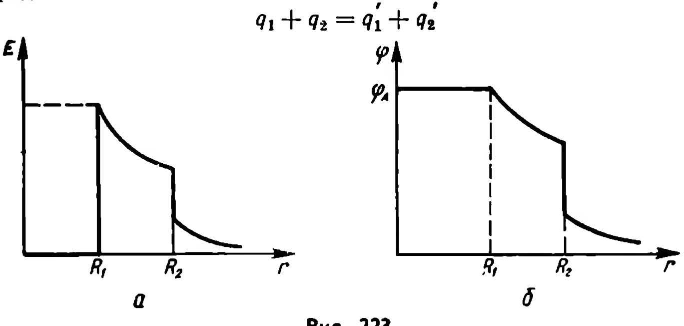


Рис. 223

или

$$4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1\varphi_1 + 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2\varphi_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\varphi R_1 + 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\varphi R_2;$$

$$R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2 = \varphi(R_1 + R_2);$$

$$\varphi = \frac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2}.$$

9.26. В однородное электрическое поле с напряженностью E внесли металлическую пластинку площадью S. Какой заряд индуцируется на каждой ее стороне (рис. 224)?

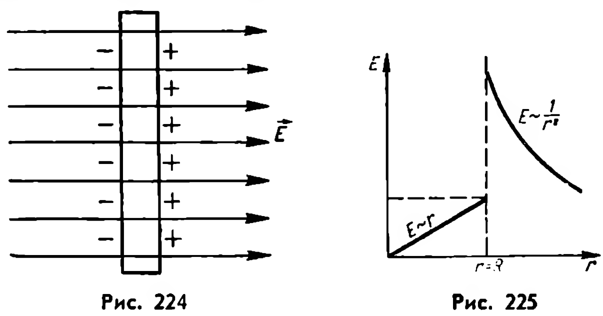


Рис. 224 Рис. 225

На одной из сторон пластинки (правой) индуцируются положительные заряды, на другой (левой) — отрицательные. Они создадут внутри пластинки поле напряженностью

$$E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где σ — поверхностная плотность зарядов.

В соответствии с принципом суперпозиции полей внутри пластинки образуется результирующее поле $E_p = E - E' = E - \sigma/\varepsilon_0$, но так как пластинка является проводником, то $E_p = 0$, следовательно,

$$E - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 0; \ \sigma = \varepsilon_0 E$$

и

$$q = \sigma S = \varepsilon_0 ES.$$

9.27. Заряд равномерно распределен по объему шара радиусом R из непроводящего материала с объемной плотностью ρ. Найти напряженности поля в точках A и B, расположенных соответственно на расстоянии: 1) $r_1 < R$ от центра шара, 2) $r_2 > R$. Построить график зависимости $E = E(r)$.

1) Электрическое поле на расстоянии $r_1 < R$ от центра сферы создается только зарядами, находящимися внутри сферы радиусом r_1, так как заряженный внешний сферический слой внутри себя поля не создает. Заряд шара радиусом r_1

$$q_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho,$$

и на своей поверхности он создает поле

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho}{r_1^2} = \frac{r_1 \rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_1};$$

2) при $r_2 > R$ электрическое поле создается полным зарядом шара

$$q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho;$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r_2^2} = \frac{R^3 \rho}{3\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}.$$

График зависимости $E = E(r)$ представлен на рис. 225. Учтено, что относительная диэлектрическая проницаемость материала шара (ε_1) больше относительной диэлектрической проницаемости окружающей шар среды (ε_2).

9.28. Найти зависимость $E = E(r)$ поля, создаваемого непроводящим сферическим слоем с однородной объемной плотностью заряда. Слой ограничен сферами радиусами R_1 и R_2 (рис. 226, *а*).

При $r < R_1$ напряженность поля $E_1 = 0$. При $R_2 > r > R_1$ напряженность поля определим следующим образом.

Аналогично задаче 9.27 найдем выражение для заряда, содержащегося в сферическом слое толщиной $r - R_1$:

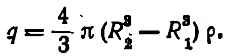
$$q = \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)\rho.$$

Напряженность поля, создаваемого таким зарядом на расстоянии r от центра сферы,

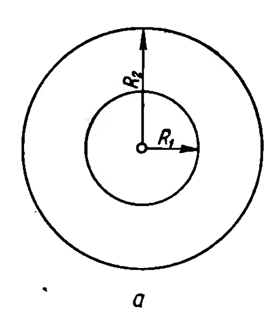
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi (r^3 - R^3)\rho}{r^2} = \frac{1}{3\varepsilon\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\rho.$$

Здесь ε — относительная диэлектрическая проницаемость сферического слоя.

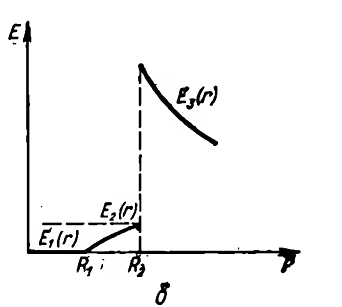
Заряд всего сферического слоя



$$q = \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)\rho.$$



а



б

Рис. 226

Напряженность поля в точках, находящихся на расстоянии $r \geqslant R_2$,

$$E_3 = \frac{\rho}{3\varepsilon'\varepsilon_0} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}.$$

Здесь ε' — относительная диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

График зависимости $E = E(r)$ представлен на рис. 226, б.

9.29. При бомбардировке α-частицей неподвижного ядра элемента, имеющего порядковый номер Z, сила отталкивания достигла значения F. На какое наименьшее расстояние приблизилась α-частица к ядру и какова была ее скорость (влиянием электронной оболочки пренебречь)?

Согласно закону Кулона $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$, где $q_1 = Ze$ — заряд ядра; $q_2 = 2e$ — заряд α-частицы,

$$r = \sqrt{\frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 F}}.$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r},$$

где m — масса α-частицы; v — ее скорость. Следовательно,

$$v^2 = \frac{4Ze^2}{m4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{\pi m\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 F}{Ze^2}} =$$

$$= \frac{e}{m}\sqrt{\frac{2ZF}{\pi\varepsilon\varepsilon_0}}; \quad v = \sqrt[4]{\frac{e^2}{m^2}\frac{2ZF}{\pi\varepsilon\varepsilon_0}}.$$

9.30. Вблизи бесконечной заряженной плоскости находится точечный заряд q. Под действием поля заряд перемещается вдоль силовой линии на расстояние l; при этом совершается работа A. Найти поверхностную плотность заряда.

Работа по перемещению заряда в однородном электрическом поле в случае, если заряд перемещается вдоль силовой линии, равна $A = qEl$.

Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости $E = \sigma/2\varepsilon\varepsilon_0$, следовательно,

$$A = \frac{q\sigma l}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 A}{ql}.$$

Рис. 227

9.31. Шарик с массой m и зарядом q перемещается из точки 1, потенциал которой равен φ, в точку 2, потенциал которой равен нулю. Чему была равна скорость шарика в точке 1, если в точке 2 она стала равной v?

Согласно закону сохранения энергии $W_2 - W_1 = A$, где W_1, W_2 — кинетические энергии шарика в точках 1 и 2; A — работа, выполняемая при перемещении заряженного шарика в электрическом поле. Так как

$$W_2 = \frac{mv^2}{2}; \quad W_1 = \frac{mv_0^2}{2}; \quad A = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = q\varphi,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{mv^2 - 2q\varphi}{m}}.$$

9.32. Определить потенциальную энергию системы четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной a (рис. 227). Заряды одинаковы по абсолютной величине. Рассмотреть случаи, когда: 1) все заряды одноименные; 2) два заряда — положительные, а два — отрицательные.

Потенциальная энергия системы зарядов равна сумме энергий взаимодействия зарядов попарно: $W = W_{1,2} + W_{1,3} + W_{1,4} + W_{2,3} + W_{2,4} + W_{3,4}$.

1) Если $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$, то $W_{1,2} = W_{2,3} = W_{3,4} = W_{1,4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$; $W_{1,3} = W_{2,4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}}$.

Следовательно,

$$W = \frac{4}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} + \frac{2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\left[4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}[4 + \sqrt{2}].$$

2) Здесь возможны два варианта расположения зарядов: а) $q_1 = q_3 = -q$. В данном случае $W_{1,2} = W_{1,4} = W_{2,3} = W_{3,4} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$; $W_{1,3} = W_{2,4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}}$;

$$W = \frac{2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}} - \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 4\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}(\sqrt{2} - 4).$$

б) $q_1 = q_2 = -q$, при этом $W_{3,4} = W_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$; $W_{1,4} = W_{2,3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$; $W_{2,4} = W_{1,3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}}$;

$$W = \frac{2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^3}{a} - \frac{2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} - \frac{2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\sqrt{2}.$$

9.33. Какую работу надо совершить, чтобы два шарика с зарядами q_1 и q_2, находящиеся на расстоянии r_1 друг от друга, сблизить до расстояния r_2?

Находясь на расстоянии r_1, шарики обладали потенциальной энергией

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_1};$$

на расстоянии r_2 — энергией

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_2}.$$

Работа, затраченная на сближение шариков,

$$A = W_2 - W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

9.34. Три электрона движутся под действием сил электростатического отталкивания. Какова будет их скорость, когда расстояние между

ними станет бесконечно большим? В начальный момент электроны находились на расстоянии r друг от друга и их скорость была равна нулю.

Согласно закону сохранения энергии можем записать для системы из трех электронов

$$W_{к1} + W_{п1} = W_{к2} + W_{п2},$$

где $W_{к1}$, $W_{к2}$ — кинетические энергии системы в состояниях 1 и 2; $W_{п1}$, $W_{п2}$ — потенциальные энергии в тех же состояниях.

Из условия задачи следует, что $W_{к1} = 0$, так как $v_1 = 0$; $W_{п2} = 0$, так как электроны находятся на бесконечности.

$$W_{п1} = 3\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{e^2}{r};$$

$$W_{к2} = 3\frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}}.$$

9.35. Расстояние между пластинами плоского конденсатора — d. От одной из пластин одновременно стали двигаться вдоль нормали к пластинам протон и α-частица. Какое расстояние пройдет α-частица за время, необходимое протону на весь путь от одной пластины до другой?

В электростатическом поле конденсатора на протон и α-частицу действуют силы $F_1 = eE$ и $F_2 = 2eE$ соответственно.

Ускорения, приобретаемые протоном и α-частицей, равны $a_1 = F_1/m_1 = eE/m_1$ и $a_2 = F_2/m_2 = 2eE/m_2$, где m_1 — масса протона; m_2 — масса α-частицы.

Для преодоления расстояния d протону необходимо время

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{2dm_1}{eE}};$$

α-частица за это время пройдет расстояние

$$l = \frac{a_2t^2}{2} = \frac{2eE}{2m_2}\frac{2dm_1}{eE} = \frac{2m_1d}{m_2} = \frac{d}{2}.$$

9.36. С наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, скатывается шарик с массой m, несущий на себе заряд $+q$. Высота наклонной плоскости — h. В вершине прямого угла находится заряд $-q$. Определить скорость, с которой шарик достигнет основания наклонной плоскости. Трением пренебречь; радиус шарика $r \ll h$, вследствие чего его можно рассматривать как точечный заряд (рис. 228).

Согласно закону сохранения энергии

$$W_B = W_C, \qquad (1)$$

где W_B и W_C — полные энергии шарика в точках B и C.

В точке B

$$W_B = W_{пB} = mgh - \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{h}, \qquad (2)$$

где $W_{пB}$ — потенциальная энергия в точке B; mgh — потенциальная энергия в поле сил тяжести; $q^2/4\pi\varepsilon\varepsilon_0 h$ — потенциальная энергия в кулоновском поле.

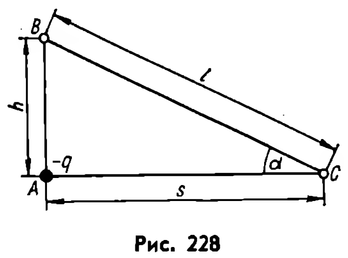


Рис. 228

В точке C

$$W_C = W_{пC} + W_{кC}, \qquad (3)$$

где $W_{пC}$, $W_{кC}$ — потенциальная и кинетическая энергии в точке C.

Кинетическая энергия шарика равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$W_{кC} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Учитывая, что момент инерции однородного шара $J = \frac{2}{5}mr^2$ и что $\omega = v/r$, получаем

$$W_{кC} = 0{,}7mv^2. \qquad (4)$$

Потенциальная энергия в поле кулоновских сил в точке C

$$W_{пC} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{s} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}. \qquad (5)$$

Из формул (1)—(5) получаем

$$mgh - \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{h} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{h} + 0{,}7mv^2;$$

$$v = \sqrt{\frac{gh}{0{,}7} + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{h}(\mathrm{tg}\,\alpha - 1)\frac{1}{0{,}7m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{7}\left[10gh + \frac{5}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{hm}(\mathrm{tg}\,\alpha - 1)\right]}.$$

9.37. Плоский воздушный конденсатор емкостью C заряжается от батареи, разность потенциалов на зажимах которой равна U. Определить разность потенциалов на обкладках конденсатора после увеличения расстояния между пластинами в n раз и работу внешних сил по раздвижению пластин, если: 1) после зарядки конденсатор отключается от источника; 2) конденсатор остается подключенным к источнику.

1) При зарядке конденсатора на пластинах его появился заряд $q = CU$. Если конденсатор отключается от источника, заряд остается

неизменным. При раздвигании пластин на расстояние, в n раз большее, емкость конденсатора становится равной $C_1 = C/n$. Разность потенциалов на пластинах после их раздвигания

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{nq}{C} = nU.$$

Согласно закону сохранения энергии $A = W_2 - W_1$, где W_2 — энергия поля конденсатора в конечном состоянии; W_1 — в начальном состоянии, причем

$$W_2 = \frac{q^2}{2C_1} = \frac{nq^2}{2C}; \; W_1 = \frac{q^2}{2C}.$$

После подстановки получаем

$$A = \frac{nq^2}{2C} - \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C}(n-1) = \frac{1}{2}CU^2(n-1).$$

2) Если конденсатор не отключается от источника, разность потенциалов на его обкладках остается постоянной, а при их раздвигании меняется емкость конденсатора и заряд его пластин.

Аналогично вышеприведенному

$$A = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}C_1U^2 - \frac{1}{2}CU^2 =$$
$$= \frac{1}{2}U^2\left(\frac{C}{n} - C\right) = \frac{1}{2}CU^2\left(\frac{1-n}{n}\right).$$

9.38. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, объем которого — V, диэлектрическая проницаемость — ε. Поверхностная плотность зарядов на пластинах конденсатора — σ. Вычислить работу, необходимую для удаления диэлектрика из конденсатора (трение диэлектрика о пластины ничтожно мало).

Согласно закону сохранения энергии $A = W_2 - W_1$, где W_1, W_2 — энергия поля конденсатора в начальном и конечном состояниях.

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}; \; C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}; \; q = \sigma S,$$

где C_1 — начальная емкость конденсатора; q — заряд пластин; S — площадь пластин.

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2}; \; C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Отсюда

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S^2 d}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 V}{\varepsilon\varepsilon_0};$$
$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 V}{\varepsilon_0},$$

так что

$$A = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 V}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

9.39. Сплошной шар радиусом r равномерно заряжен (объемная плотность заряда — γ). Определить энергию электрического поля шара вне его, если шар помещен в диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого — ε.

Известно, что $W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$. Так как $q = \gamma V = \frac{4}{3}\pi r^3\gamma$; $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$, то

$$W = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\gamma\right)^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi}{9}\frac{r^5\gamma^2}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

9.40. Шар M радиусом r_1, заряженный до потенциала φ_1, после отключения от источника напряжения соединяется тонкой проволочкой (емкостью проволочки пренебрегаем) сначала с удаленным незаряженным шаром N радиусом r_2, а после отсоединения от N — с удаленным незаряженным шаром P радиусом r_3. Найти: 1) начальную энергию шара M; 2) энергию шаров M и N после соединения и работу разряда при соединении; 3) энергию шаров M и P после соединения и работу разряда при соединении.

1) Емкость шара M

$$C_1 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1.$$

Энергия шара M до соединения

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1\varphi_1^2 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1\varphi_1^2.$$

2) Заряд шара M

$$q_1 = C_1\varphi_1 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1\varphi_1.$$

При соединении шаров M и N их потенциалы станут одинаковыми и для каждого из них мы можем записать:

$$C_1 = \frac{q_1'}{\varphi_2};\ C_2 = \frac{q_2'}{\varphi_2};\ C_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2,$$

где q_1' и q_2' — заряды, которые приобрели шары M и N после их соединения.

Отсюда, учитывая, согласно закону сохранения заряда, что $q_1 = q_1' + q_2'$, получим

$$\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2};\quad \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2};$$

$$\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} = \frac{q_1 - q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2};$$

$$q_1' = \frac{q_1 r_1 r_2}{r_2(r_1 + r_2)} = \frac{q_1 r_1}{r_1 + r_2} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2\varphi_1}{r_1 + r_2};$$

$$q_2' = \frac{q_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 r_2\varphi_1}{r_1 + r_2}.$$

Энергии шаров M и N после соединения равны:

$$W_1' = \frac{1}{2}\frac{16\pi^2\varepsilon^2\varepsilon_0^2 r_1^4\varphi_1^2}{(r_1+r_2)^2\,4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^3\varphi_1^2}{(r_1+r_2)^2};$$

$$W_2' = \frac{1}{2}\frac{16\pi^2\varepsilon^2\varepsilon_0^2 r_1^2 r_2^2\varphi_1^2}{(r_1+r_2)^2\,4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2 r_2\varphi_1^2}{(r_1+r_2)^2}.$$

Согласно закону сохранения энергии работа разряда при соединении шаров M и N

$$A_1 = W_1 - (W_1' + W_2') = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1\varphi_1^2 -$$

$$- 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1\varphi_1^2\left[\frac{r_1^2}{(r_1+r_2)^2} + \frac{r_1 r_2}{(r_1+r_2)^2}\right] = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 r_2\varphi_1^2}{r_1+r_2}.$$

3) Совершенно аналогично рассуждениям, приведенным в случае 2, можем записать

$$C_1 = \frac{q_1''}{\varphi_3};\ C_3 = \frac{q_2''}{\varphi_3};\ C_3 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_3,$$

где q_1'' и q_2'' — заряды шаров M и P после их соединения; φ_3 — потенциал шаров. Решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{q_1''}{C_1} &= \frac{q_2''}{C_3}; \\ q_1' &= q_1'' + q_2'', \end{aligned}\right\}$$

получим

$$q_1'' = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^3\varphi_1}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)};\quad q_2'' = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2 r_3\varphi_1}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}.$$

Отсюда

$$W_1'' = \frac{1}{2}\frac{16\pi^2\varepsilon^2\varepsilon_0^2 r_1^6\varphi_1^2}{(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2\,4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^5\varphi_1^2}{(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2};$$

$$W_3'' = \frac{1}{2}\frac{16\pi^2\varepsilon^2\varepsilon_0^2 r_1^4 r_3^2\varphi_1^2}{(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2\,4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_3} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^4 r_3\varphi_1^2}{(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2},$$

где W_1'' и W_3'' — энергии шаров M и P после их соединения.

Энергия разряда при соединении шаров M и P

$$A = W_1' - (W_1'' + W_3'') = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^3 r_3\varphi_1^2}{(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)}.$$

9.41. Два конденсатора емкостью C_1 и C_2 соединены последовательно и подключены к источнику э. д. с. с напряжением U. Во сколько раз изменится напряжение на конденсаторах, если конденсатор *1* опустить в диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью ε?

До опускания конденсатора в диэлектрик $U_1+U_2=U$, где U_1 и U_2 — напряжения на конденсаторах *1* и *2*. Так как

$$U_1=\frac{q}{C_1};\ U_2=\frac{q}{C_2};\ \frac{U_1}{U_2}=\frac{C_2}{C_1},$$

то

$$U_2\frac{C_2}{C_1}+U_2=U;\quad U_2=\frac{UC_1}{C_2+C_1};\ U_1=\frac{UC_2}{C_1+C_2}.$$

После опускания конденсатора *1* в диэлектрик его емкость увеличилась в ε раз: $C_1'=\varepsilon_1 C_1$; $U=U_1'+U_2'$. Произведя преобразования, аналогичные вышеприведенным, получим

$$U_1'=\frac{C_2U}{\varepsilon C_1+C_2};\ U_2'=\frac{\varepsilon C_1U}{\varepsilon C_1+C_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{U_1'}{U_1}=\frac{C_1+C_2}{\varepsilon C_1+C_2};\ \frac{U_2'}{U_2}=\frac{\varepsilon(C_1+C_2)}{\varepsilon C_1+C_2}.$$

9.42. Напряжение на пластинах плоского конденсатора, находящихся на расстоянии d друг от друга, равно U. К одной из пластин прилегают пластинка из стекла толщиной d_1 и пластинка из фарфора толщиной d_2, причем $d_1+d_2<d$. Найти напряженности поля в воздухе, стекле и фарфоре.

Напряжение на пластинах конденсатора

$$U=U_1+U_2+U_3, \tag{1}$$

где U_1 — падение напряжения на стеклянной пластинке; U_2 — на фарфоровой; U_3 — в воздушном зазоре.

Электростатическое поле между пластинами конденсатора можно считать однородным и записать

$$U_1=E_1d_1;\ U_2=E_2d_2;\ U_3=E_3d_3, \tag{2}$$

где E_1, E_2, E_3 — напряженности поля в стекле, фарфоре и воздухе соответственно.

Учитывая, что $E=\varepsilon_1E_1=\varepsilon_2E_2=\varepsilon_3E_3$, где ε_1, ε_2, ε_3 — относительные диэлектрические проницаемости сред; E — напряженность поля, создаваемого пластинами в вакууме, получаем из формул (1) и (2):

$$E=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3U}{\varepsilon_2\varepsilon_3d_1+\varepsilon_1\varepsilon_3d_2+\varepsilon_1\varepsilon_2d_3};$$

$$E_1=\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3U}{\varepsilon_2\varepsilon_3d_1+\varepsilon_1\varepsilon_3d_2+\varepsilon_1\varepsilon_2d_3};$$

$$E_2=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3U}{\varepsilon_2\varepsilon_3d_1+\varepsilon_1\varepsilon_3d_2+\varepsilon_1\varepsilon_2d_3};$$

$$E_3=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2U}{\varepsilon_2\varepsilon_3d_1+\varepsilon_1\varepsilon_3d_2+\varepsilon_1\varepsilon_2d_3}.$$

9.43. Шар радиусом r_1 заряжен до потенциала φ_1, а шар радиусом r_2 — до потенциала φ_2. Определить заряды и потенциал шаров после

того, как их соединили металлическим проводником, емкостью которого можно пренебречь. Задачу решать, используя понятие емкости (см. аналогичную задачу 9.25).

Емкости шаров: $C_1 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1$; $C_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2$.

С другой стороны, $C_1 = q_1/\varphi_1$; $C_2 = q_2/\varphi_2$. Отсюда $q_1 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1\varphi_1$; $q_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2\varphi_2$.

После соединения шаров проводником их потенциалы φ будут одинаковы и для каждого шара можно записать соответственно:

$$C_1 = \frac{q_1'}{\varphi};\quad C_2 = \frac{q_2'}{\varphi},\ \text{т. е.}\ \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2}\ \text{или}\ \frac{q_1'}{r_1} = \frac{q_2'}{r_2}.$$

Согласно закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$.

Из этих уравнений получаем

$$q_1' = \frac{(q_1 + q_2) r_1}{r_1 + r_2} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2) r_1}{r_1 + r_2};$$

$$q_2' = \frac{(q_1 + q_2) r_2}{r_1 + r_2} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2) r_2}{r_1 + r_2};$$

$$\varphi = \frac{q_1'}{C_1} = \frac{(q_1 + q_2) r_1}{(r_1 + r_2) 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} = \frac{r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2}{r_1 + r_2}.$$

9.44. Между пластинами плоского конденсатора площадью S находятся два слоя диэлектриков: стекло толщиной d_1 и эбонит толщиной d_2. Найти электроемкость конденсатора, если толщина воздушного зазора — d_3.

Полученную систему можно рассматривать как три последовательно соединенных конденсатора. Емкость каждого из них соответственно равна:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}{d_1} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1}};\quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_2}{\varepsilon_2}};\quad C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_3}{\varepsilon_3}},$$

где ε_1, ε_2, ε_3 — соответственно относительные диэлектрические проницаемости стекла, эбонита и воздуха.

При последовательном соединении конденсаторов общая емкость вычисляется по формуле

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

или

$$\frac{1}{C} = \frac{\frac{d_1}{\varepsilon_1}}{\varepsilon_0 S} + \frac{\frac{d_2}{\varepsilon_2}}{\varepsilon_0 S} + \frac{\frac{d_3}{\varepsilon_3}}{\varepsilon_0 S}.$$

Отсюда

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3}}.$$

9.45. Конденсатор состоит из трех металлических пластин площадью S каждая, разделенных двумя слоями диэлектрика толщиной d каждый.

Крайние пластины соединены между собой. Какова емкость такого конденсатора, если диэлектрическая проницаемость диэлектрика — ε?

Описанную в условии задачи систему следует рассматривать как два параллельно соединенных конденсатора, имеющих одну общую пластину. Их общая емкость

$$C = C_1 + C_2,$$

а так как геометрические размеры рассматриваемых плоских конденсаторов одинаковы и диэлектрик один и тот же, то

$$C_1 = C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d};$$

$$C = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

9.46. Дана емкость сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических сфер радиусами r_1 и r_2 (пространство между сферами заполнено маслом). Какого радиуса должен быть шар, помещенный в масло, чтобы иметь такую же емкость?

Как известно, емкость сферического конденсатора $C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$, где r_1 — радиус внутренней сферы; r_2 — радиус внешней сферы; ε — диэлектрическая проницаемость масла.

Емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, где R — радиус шара. Следовательно,

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

9.47. Найти емкость системы конденсаторов (рис. 229, *а*).

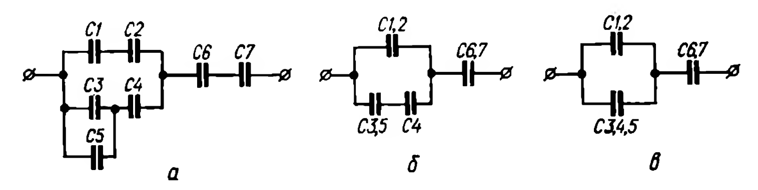


Рис. 229

Конденсаторы *C1* и *C2* соединены последовательно, значит, их общая емкость

$$C1,2 = \frac{C1C2}{C1 + C2}.$$

Аналогично для конденсаторов *C6*, *C7*

$$C6,7 = \frac{C6C7}{C6 + C7}.$$

Конденсаторы *C3* и *C5* соединены параллельно. Их общая емкость

$$C3,5 = C3 + C5.$$

Теперь схему *а* можно преобразовать в схему *б*. Легко видеть, что общая емкость конденсаторов *C3, 5* и *C4*

$$C3,5,4=\frac{C3,5\,C4}{C3,5+C4}=\frac{(C3+C5)\,C4}{C3+C5+C4}.$$

Далее, схему *б* можно привести к виду *в*. Системы конденсаторов *C1, 2* и *C3, 4, 5* соединены параллельно, следовательно, их общая емкость

$$C1,2,3,4,5=C1,2+C3,4,5=\frac{C1C2}{C1+C2}+\frac{(C3+C5)\,C4}{C3+C4+C5}.$$

Система конденсаторов *C1, 2, 3, 4, 5* соединена последовательно с *C6, 7*. Отсюда общая емкость всей системы

$$C=\frac{C6,7\,C1,2,3,4,5}{C6,7+C1,2,3,4,5}=\frac{\frac{C6C7}{C6+C7}\left(\frac{C1C2}{C1+C2}+\frac{(C3+C5)\,C4}{C3+C4+C5}\right)}{\frac{C6C7}{C6+C7}+\frac{C1C2}{C1+C2}+\frac{(C3+C5)\,C4}{C3+C4+C5}}.$$

9.48. Три конденсатора емкостью *C1, C2, C3* (рис. 230) подключены к источнику э. д. с., напряжение на зажимах которого равно *U*. Определить заряды на каждом из конденсаторов.

Разность потенциалов

$$U=U_1+U_{AB},$$

где U_1 — напряжение на пластинах конденсатора *C1*; U_{AB} — напряжение между точками *A* и *B*.

Заряд на *C1* будет такой же, как на системе *C2* и *C3* (система конденсаторов *C2, C3* соединена последовательно с *C1*), и может быть найден из равенства $C=q/U$, где *C* — емкость системы трех конденсаторов:

$$C=\frac{C2,3\,C1}{C2,3+C1}=\frac{(C2+C3)\,C1}{C1+C2+C3};$$

$$q_1=q=CU=\frac{(C2+C3)\,C1U}{C1+C2+C3}.$$

Рис. 230

Для конденсаторов *C2* и *C3* мы можем соответственно записать

$$q_2=C2U_{AB};\quad q_3=C3U_{AB}.$$

Так как

$$U_{AB}=U-U_1;\quad U_1=\frac{q}{C1},$$

то

$$U_{AB}=U-\frac{q}{C1}=U-\frac{(C2+C3)\,U}{C1+C2+C3}=\frac{C1U}{C1+C2+C3}.$$

Отсюда

$$q_2=\frac{C1C2U}{C1+C2+C3};\quad q_3=\frac{C1C3U}{C1+C2+C3}.$$

9.49. Пластины плоского воздушного конденсатора несут заряды $+q$ и $-q$, причем расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами. Как изменится сила взаимодействия пластин, если расстояние между ними увеличить в три раза?

Сила, действующая на одну из пластин, равна $F = qE$, где E — напряженность поля, создаваемого другой пластиной. Учитывая, что $E = \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon = q/2\varepsilon_0\varepsilon S$, получаем $F = q^2/2\varepsilon\varepsilon_0 S$. Как видно из формулы, F не зависит от расстояния между пластинами. Следовательно, сила остается прежней.

9.50. Конденсаторы $C1$ и $C2$, заряженные до напряжений U_1 и U_2 соответственно, соединены параллельно: 1) одноименно заряженными обкладками; 2) разноименно заряженными обкладками. Найти напряжение между обкладками в обоих случаях.

Конденсаторы соединены параллельно, следовательно $C = C_1 + C_2$. В случае 1) искомое напряжение $U = q/C$; $q = q_1 + q_2$, где q_1 и q_2 — заряды конденсаторов до соединения, которые могут быть определены как

$$q_1 = C_1U_1; \quad q_2 = C_2U_2.$$

Таким образом, получаем

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}.$$

В случае 2) заряд

$$q = q_1 - q_2 = C_1U_1 - C_2U_2,$$

так что

$$U = \frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2}.$$

9.51. Два плоских конденсатора емкостью C_1 и C_2 соединили последовательно, подключили к источнику, напряжение на клеммах которого U, и зарядили. Найти напряжение на пластинах конденсаторов после отключения от источника, если их пересоединить параллельно. Чему будет равна работа при перезарядке конденсаторов?

При последовательном включении конденсаторов их общая емкость

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Заряды конденсаторов одинаковы и равны

$$q_1 = q_2 = q = CU = \frac{C_1C_2U}{C_1 + C_2}.$$

Напряжение на каждом из них

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{C_2U}{C_1 + C_2}; \quad U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1U}{C_1 + C_2}.$$

При параллельном соединении емкость конденсаторов

$$C' = C_1 + C_2.$$

Заряд системы конденсаторов

$$q' = 2q.$$

Напряжение на пластинах обоих конденсаторов

$$U' = \frac{q'}{C'} = \frac{2q}{C_1 + C_2} = \frac{2C_1C_2U}{(C_1 + C_2)^2}.$$

Работа при перезарядке, согласно закону сохранения энергии,

$$A = W - W',$$

где W и W' — энергии системы конденсаторов до и после перезарядки.

Энергия системы конденсаторов до перезарядки

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2U^2}{(C_1 + C_2)^2}(C_1 + C_2) = \\ = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2U^2}{C_1 + C_2},$$

где W_1 и W_2 — энергии первого и второго конденсаторов до перезарядки.

Энергия системы конденсаторов после перезарядки

$$W' = \frac{1}{2}C'(U')^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\frac{4C_1^2C_2^2U^2}{(C_1 + C_2)^4} = \frac{2C_1^2C_2^2U^2}{(C_1 + C_2)^3}.$$

Работа при перезарядке

$$A = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2U^2}{C_1 + C_2} - \frac{2C_1^2C_2^2U^2}{(C_1 + C_2)^3} = \frac{C_1C_2U^2(C_1 - C_2)^2}{2(C_1 + C_2)^3}.$$

9.52. Пластины плоского конденсатора раздвигаются первый раз, будучи все время подключенными к источнику напряжения, а второй раз — отключенными сразу после зарядки. В каком случае затрачиваемая на раздвигание пластин работа больше?

В первом случае при раздвигании пластин разность потенциалов остается постоянной, а емкость (следовательно, и заряд на пластинах) уменьшается. Сила взаимодействия между пластинами (см. задачу 9.49)

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Поэтому при уменьшении заряда пластин сила взаимодействия также уменьшается.

Во втором случае заряд на пластинах остается неизменным, так что сила взаимодействия пластин не меняется. Поэтому при одинаковом перемещении пластин работа во втором случае будет больше.

9.53. Двенадцать одинаковых конденсаторов емкостью C каждый собраны в батарею в виде восьмигранника (рис. 231). Какова емкость между точками A и B этой батареи?

Батарея симметрична, следовательно, потенциалы точек C, D, E и F равны. Поэтому конденсаторы, включенные между этими точками, не заряжены и их можно не учитывать. Можно считать, что батарея состоит из четырех параллельных ветвей, в каждую из которых

включено последовательно по два конденсатора. Таким образом, емкость одной ветви $C_1 = C/2$ и общая емкость батареи

$$C_б = 4C_1 = 2C.$$

9.54. Определить напряжение между точками A и B (рис. 232), если напряжение между точками C и D равно U.

Падение напряжения между точками C и D связано с падением напряжения на конденсаторах $C1 - C4$ следующим образом:

$$U = U_1 + U_2 = U_3 + U_4.$$

Заряды на конденсаторах $C1$ и $C2$ одинаковы: $q_1 = q_2 = C1U_1 = C2U_2$.

Аналогично для конденсаторов $C3$ и $C4$: $q_3 = q_4 = C3U_3 = C4U_4$.

Решая полученную систему уравнений, находим

$$U_1 = \frac{UC2}{C1 + C2}; \quad U_2 = \frac{UC1}{C1 + C2};$$

$$U_3 = \frac{UC4}{C3 + C4}; \quad U_4 = \frac{UC3}{C3 + C4}.$$

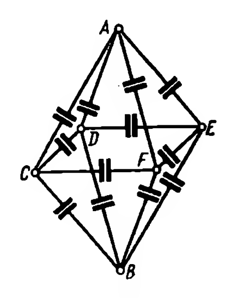


Рис. 231

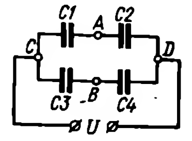


Рис. 232

Очевидно, что напряжение между точками A и B

$$U_{AB} = U_4 - U_2 = U_1 - U_3 = U\frac{C2C3 - C1C4}{(C1 + C2)(C3 + C4)}.$$

9.55. На дне сосуда с жидким диэлектриком с проницаемостью ε закреплена пластина конденсатора, имеющая форму круга радиусом r. Вторая такая же пластина толщиной h плавает над первой пластиной. На какую глубину погрузится верхняя пластина, если пластины зарядить разноименными зарядами с поверхностной плотностью σ? Плотность материала пластины — ρ, диэлектрика — ρ_0.

После подачи зарядов на пластины на верхнюю пластину будут действовать сила тяжести P, сила электростатического притяжения пластины F_e и в противоположную им сторону — сила Архимеда F_A.

Сила тяжести

$$P = mg = \rho gSh = \pi r^2 \rho gh,$$

где S — площадь пластины.

Сила электростатического притяжения пластин

$$F_e = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{(\sigma S)^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{\pi r^2 \sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Сила Архимеда

$$F_A = \rho_0 g V = \rho_0 g S \Delta h = \rho_0 g \pi r^2 \Delta h,$$

где V — объем части пластины, погруженной в жидкость; Δh — глубина погружения пластины. В состоянии равновесия

$$P + F_e = F_A,$$

или

$$\pi r^2 \rho g h + \frac{\pi r^2 \sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \rho_0 g \pi r^2 \Delta h.$$

Отсюда

$$\Delta h = \frac{\rho}{\rho_0} h + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 \rho_0 g}.$$

10. Постоянный ток

Электродвижущая сила (э. д. с.). Для поддержания тока в проводнике на имеющиеся в нем свободные заряды должно действовать электрическое поле, создаваемое неэлектрическими сторонними силами. Это поле поддерживает на концах проводника некоторую разность потенциалов. К числу источников сторонних сил относятся химические (элементы, аккумуляторы), электромагнитные (обычные электромашинные генераторы), тепловые (термоэмиссионные генераторы), световые (фотоэлементы) и др. Все они преобразуют различные формы энергии в электрическую.

При перемещении электрических зарядов производится работа. Электродвижущая сила $\mathcal{E}$ измеряется работой сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда внутри источника тока.

Единицей электродвижущей силы служит вольт (В).

Сила тока I измеряется величиной заряда q, проходящего в единицу времени через поперечное сечение проводника:

$$I = \frac{q}{t}; \quad q = It.$$

Сила тока — скалярная величина. Единица силы тока — ампер (А). При силе тока, равной 1 А, через поперечное сечение проводника за 1 секунду проходит заряд, равный 1 кулону.

Плотность тока j численно равна заряду, проходящему за 1 секунду через единицу поверхности, перпендикулярной к линиям тока:

$$j = \frac{I}{S} = n_0 e v,$$

где S — площадь поверхности (сечения); n_0 — число свободных электронов в единице объема; e — заряд электрона; v — скорость электронов вдоль линии тока. Плотность тока — вектор. Единица плотности тока — ампер на квадратный метр (А/м²).

Постоянным током называется такой ток, плотность которого в каждой точке проводника не изменяется со временем.

Направление постоянного тока. Принято считать, что направление тока совпадает с направлением движения положительных зарядов, которое, в свою очередь, совпадает с направлением электрического поля. Если ток создается отрицательными зарядами, то они перемещаются навстречу направлению поля и их движение эквивалентно перемещению положительных зарядов вдоль направления поля. В металлах подвижными носителями зарядов являются электроны, несущие отрицательные заряды.

Электрическое сопротивление проводника

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводника, Ом · см; l — длина проводника, м; S — площадь поперечного сечения проводника, м^2.

Единица сопротивления называется ом. 1 Ом — сопротивление такого проводника, в котором при напряжении на его концах 1 вольт течет ток силой 1 ампер (1 Ом = 1В/1А).

Величина, обратная сопротивлению, называется электропроводностью и обозначается g. Единица электропроводности называется сименс (См).

Закон Ома. Сила тока в проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника:

$$I = \frac{U}{R} = gU.$$

Закон Ома для участка цепи сопротивлением R: разность потенциалов (падение напряжения) U на участке цепи сопротивлением R равняется

$$U = IR.$$

Закон Ома для цепи, содержащей источник э. д. с.:

$$\mathcal{E} = I(R + r) = IR + Ir = U + Ir \text{ или } I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}.$$

Здесь R — полное сопротивление внешней цепи: r — внутреннее сопротивление источника. Величина $IR = U$ называется падением напряжения на внешней цепи или напряжением на зажимах источника, замкнутого на внешнюю цепь.

При последовательном соединении резисторов их сопротивления складываются:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$$

При параллельном соединении резисторов складываются обратные величины их сопротивлений, т. е. их электропроводности:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \text{ или } G = g_1 + g_2 + \cdots + g_n.$$

В этом случае токи в отдельных ветвях обратно пропорциональны сопротивлениям ветвей:

$$I_1 : I_2 : \cdots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \cdots : \frac{1}{R_n}.$$

Зависимость удельного сопротивления проводника от температуры:

$$\rho_t = \rho_0 [1 + \alpha (t - t_0)],$$

где ρ_t — удельное сопротивление при температуре t; ρ_0 — удельное сопротивление при температуре t_0; α — температурный коэффициент сопротивления.

Правила Кирхгофа. 1. Для всякой точки разветвления (узла) электрической цепи сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов, направленных от узла:

$$\sum I_{вх} = \sum I_{вых} \text{ или } \sum I = 0.$$

2. Для всякого замкнутого контура алгебраическая сумма всех э. д. с. контура равна алгебраической сумме падений напряжений на отдельных сопротивлениях контура:

$$\sum \mathscr{E} = \sum IR.$$

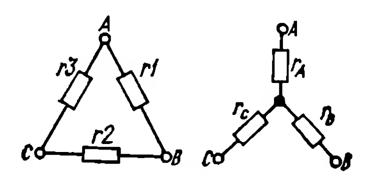


Рис. 233

Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду и наоборот (рис. 233):

$$\Delta \to Y: \quad r_A = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3};$$

$$r_B = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3};$$

$$r_C = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

$$Y \to \Delta: \quad r_1 = r_A + r_B + \frac{r_A r_B}{r_C}; \quad r_2 = r_B + r_C + \frac{r_B r_C}{r_A};$$

$$r_3 = r_C + r_A + \frac{r_C r_A}{r_B}.$$

При последовательном соединении n источников с одинаковыми э. д. с., равными $\mathscr{E}_0$, и одинаковыми внутренними сопротивлениями r_0

$$\mathscr{E} = n\mathscr{E}_0; \quad r = nr_0.$$

При параллельном соединении тех же источников

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0; \quad r = r_0/n.$$

Закон Джоуля — Ленца. Работа электрического тока

$$A = I^2Rt.$$

Мощность электрического тока

$$P = \mathscr{E}I = (U + Ir) I = I^2 (R + r),$$

где $I^2R = UI$ — полезная мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении R. Эта мощность достигает максимума при $R = r$:

$$P_{макс} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$

Коэффициент полезного действия цепи

$$\eta = \frac{P_{внеш}}{P_{полн}} = \frac{R}{R + r}.$$

Закон Фарадея. При прохождении электрического тока через электролит масса m вещества, выделившегося на одном из электродов, пропорциональна заряду q, прошедшему через электролит:

$$m = kq = \frac{A}{nF} q = \frac{A}{nF} It.$$

Здесь F — число Фарадея; A — атомная масса выделившегося вещества; n — его валентность в данном электролите. Величина A/n называется химическим эквивалентом вещества, а величина $k = A/nF$ — его электрохимическим эквивалентом.

10.1. Сопротивление катушки из медной проволоки — R, вес проволоки — P. Определить длину и площадь поперечного сечения проволоки.

Сопротивление проводника $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление; l — длина; S — площадь поперечного сечения проволоки.

Вес $P = dV = dSl$, где d — удельный вес; V — объем. Отсюда

$$l = \sqrt{\frac{RP}{d\rho}}; \quad S = \sqrt{\frac{\rho P}{dR}}.$$

10.2. Сопротивление проволоки $R_1 = 81$ Ом. Ее разрезали на несколько равных частей и соединили эти части параллельно, вследствие чего сопротивление стало равно $R_2 = 1$ Ом. На сколько частей разрезали проволоку?

Если представить неразрезанную проволоку как n последовательно соединенных сопротивлений, то

$$R_1 = nr,$$

где r — сопротивление одного отрезка.

При параллельном соединении

$$R_2 = \frac{r}{n}.$$

Решив совместно оба уравнения, получим:

$$n = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = 9.$$

10.3. Ток в проводнике за равные промежутки времени t сначала равномерно возрастает от 0 до I_1, затем уменьшается до $0{,}5I_1$, затем остается постоянным и, наконец, уменьшается до нуля (рис. 234). Какой заряд прошел по проводнику за время, равное $4t$?

Построим график изменения тока во времени. Очевидно, что заряд, прошедший по проводнику, численно равен площади заштрихованной фигуры, т. е.

$$q = \frac{1}{2} tI_1 + \frac{I_1 + 0,5I_1}{2} t + 0,5I_1 t + \frac{1}{2} \cdot 0,5I_1 t = 2I_1 t.$$

10.4. Медный проводник сечением S движется со скоростью v_0, направленной перпендикулярно площади S. Какой заряд пройдет по проводнику при резком его торможении, если концы проводника замкнуты?

При прохождении тока по проводнику сопротивлением R совершается работа

$$A = I^2Rt.$$

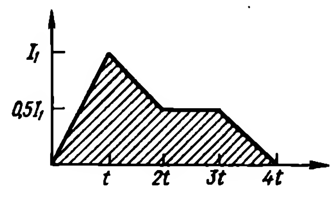


Рис. 234

Сила тока в данном случае не будет постоянна в течение всего времени торможения. Предполагая, что она уменьшается равномерно до нуля, для среднего количества электричества, прошедшего по проводнику, можем написать:

$$q = \frac{1}{2} It; \quad It = 2q.$$

Работа

$$A = I2qR = 2q\,IR.$$

С другой стороны, эта работа может быть выражена как

$$A = -N\Delta W_к = -N\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = N\frac{mv_0^2}{2},$$

где N — общее число свободных электронов в проводнике; $\Delta W_к$ — изменение кинетической энергии электрона, когда в процессе торможения скорость меняется от v_0 до 0.

Так как $I = jS$, где j — плотность тока; S — площадь поперечного сечения провода и $j = en_0v_0$, где e — заряд электрона; n_0 — число свободных электронов в единице объема, то

$$I = en_0v_0S,$$

и первое выражение для A примет вид:

$$A = 2en_0v_0SqR.$$

Из условия $n_0lS = N$ имеем

$$A = \frac{2eRqv_0}{l} N,$$

где l — длина проводника.

Приравнивая оба выражения для работы, найдем, что

$$N\frac{2eRqv_0}{l} = N\frac{mv_0^2}{2},$$

откуда

$$q = \frac{mv_0 l}{4eR} = \frac{mv_0 l}{4e\rho \frac{l}{S}} = \frac{mv_0 S}{4e\rho}.$$

10.5. Две проволоки — нихромовая и стальная — имеют одинаковые массы. Длина стальной проволоки в 20 раз больше длины нихромовой. Во сколько раз отличаются их сопротивления (удельное сопротивление нихрома в 10 раз больше удельного сопротивления стали, плотность больше в 1,07 раза)?

Сопротивление нихромовой проволоки

$$R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S_1}; \tag{1}$$

сопротивление стальной проволоки

$$R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S_2}, \tag{2}$$

где ρ_1, ρ_2 — удельные сопротивления нихрома и стали; l_1, l_2 и S_1, S_2 — длины и сечения проволок.

Массы проволок равны между собой, т. е.

$$m_1 = m_2 \quad \text{или} \quad d_1 l_1 S_1 = d_2 l_2 S_2, \tag{3}$$

где d_1, d_2 — плотности нихрома и стали.

Из (3) получаем:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{d_1 l_1}{d_2 l_2}. \tag{4}$$

Из (1), (2) и (4) имеем:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1 l_1 S_2}{\rho_2 l_2 S_1} = \frac{\rho_1 l_1^2 d_1}{\rho_2 l_2^2 d_2}.$$

Учитывая, что $l_2 = 20 l_1$; $d_1/d_2 = 1{,}07$; $\rho_1/\rho_2 = 10$, находим

$$\frac{R_1}{R_2} = 0{,}02675.$$

10.6. По медному проводнику сечением $S = 0{,}17$ мм² течет ток $I = 0{,}025$ А. Определить, какая сила действует на отдельные электроны со стороны электрического поля.

Запишем закон Ома для участка цепи: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение; $R = \rho \frac{l}{S}$ — сопротивление участка. Здесь ρ — удельное сопротивление, l — длина, S — площадь поперечного сечения проводника.

Из этих уравнений $I = US/\rho l = ES/\rho$, так как для однородного проводника $E = U/l$.

Сила, действующая на электрон,

$$F = eE = e\frac{I\rho}{S} = 3 \cdot 10^{-22} \text{ Н}.$$

10.7. Определить, какой ток создает электрон, вращающийся вокруг ядра в атоме водорода, если радиус его орбиты принять равным $5,3 \cdot 10^{-9}$ см.

Сила тока может быть представлена как $I = \frac{q}{t} = \frac{eN}{t} = en = e\frac{v}{2\pi r}$, где e — заряд электрона; N — число оборотов электрона за время t; n — число оборотов в единицу времени; v — скорость электрона при движении по орбите; r — радиус орбиты.

При движении электрона по круговой орбите роль центростремительной силы играет кулоновская сила взаимодействия электрона с ядром:

$$F_ц = F_к$$

или

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где m — масса электрона.
Отсюда

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 rm}}.$$

Введя это выражение в формулу для I, найдем

$$I = \frac{e^2}{2\pi r\sqrt{4\pi\varepsilon_0 rm}} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

10.8. По железному проводнику сечением $S = 0,64$ мм² течет ток $I = 24$ А. Определить среднюю скорость направленного движения электронов, считая, что число свободных электронов n_0 в единице объема равно числу атомов n_0' в единице объема проводника (рис. 235).

Рис. 235

Средняя скорость упорядоченного движения электронов

$$v = \frac{l}{t}, \quad (1)$$

где t — время, за которое все свободные электроны, находящиеся в отрезке проводника длиной l, пройдут через выходное сечение и перенесут заряд $q = Ne$, создавая при этом ток

$$I = \frac{q}{t} = \frac{Ne}{t}, \quad (2)$$

где e — заряд электрона; N — число свободных электронов в отрезке длиной l,

$$N = n_0 V = n_0 lS, \quad (3)$$

где V — объем проводника; S — площадь его сечения.

По условию задачи

$$n_0 = n_0' = \frac{N}{V} = \frac{\frac{m}{\mu} N_A}{V} = \frac{\rho}{\mu} N_A, \quad (4)$$

где ρ — плотность железа; μ — молекулярная масса; N_A — число Авогадро.

Из уравнений (2), (3), (4)

$$I = \frac{N_A \rho l S e}{\mu t},$$

откуда

$$l = \frac{I \mu t}{N_A \rho S e}.$$

Подставив полученное выражение в (1), найдем

$$v = \frac{I \mu t}{N_A \rho S e t} = \frac{I \mu}{N_A \rho S e} = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}.$$

10.9. Через двухэлектродную лампу с плоскими электродами идет ток I. Напряжение на лампе — U. С какой силой действуют на анод лампы попадающие на него электроны, если они покидают катод со скоростью v_0?

За некоторый промежуток времени t на анод попадет $N = \frac{It}{e}$ электронов. Каждый из них передает аноду количество движения $K = mv$, где v — скорость электрона при подлете его к аноду.

Из закона сохранения энергии $A = W_2 - W_1$, где $A = eU$ — работа сил электрического поля; $W_2 = mv^2/2$ — кинетическая энергия электрона при подлете его к аноду; $W_1 = mv_0^2/2$ — кинетическая энергия электрона при вылете из катода, получаем:

$$eU = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2};$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU + mv_0^2}{m}}.$$

Подставив выражение для v в формулу для количества движения, найдем

$$K = \sqrt{(2eU + mv_0^2)\, m}.$$

Количество движения, передаваемое аноду N электронами,

$$NK = \frac{It}{e} \sqrt{(2eU + mv_0^2)\, m}.$$

С другой стороны, изменение количества движения равно импульсу силы:

$$NK = Ft,$$

следовательно,

$$\frac{It}{e}\sqrt{(2eU+mv_0^2)\,m}=Ft$$

и

$$F=\frac{I}{e}\sqrt{(2eU+mv_0^2)\,m}.$$

10.10. Сопротивление 100-ваттной электролампы, работающей при напряжении 220 В, в накаленном состоянии в $n = 15$ раз больше, чем при температуре $t_1 = 10°$ С. Найти сопротивление при этой температуре и температурный коэффициент сопротивления α, если в накаленном состоянии температура нити $t_2 = 2500°$ С.

Если сопротивление лампы при 0° С принять равным R_0, при 10° С — R_1, при 2500° С — R_2, то

$$R_1 = R_0(1+\alpha t_1);$$
$$R_2 = R_0(1+\alpha t_2);$$
$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1}=n.$$

Отсюда

$$\alpha=\frac{n-1}{t_2-nt_1}\approx 6\cdot 10^{-3}\,{}^{\circ}\text{C}.$$

Зная мощность лампы N, можно найти ее сопротивление R_2 в накаленном состоянии и R_1 при температуре t_1:

$$R_2=\frac{U^2}{P}=484\ \text{Ом};\ R_1=\frac{R_2}{n}=\frac{U^2}{Pn}=32{,}3\ \text{Ом}.$$

10.11. Медный и графитовый стержни одинаковой толщины соединены последовательно. При каком соотношении их длин сопротивление этой системы не будет зависеть от температуры?

Общее сопротивление стержней при температуре t

$$R_t = R_{01}(1+\alpha_1 t)+R_{02}(1+\alpha_2 t)=(R_{01}+R_{02})+$$
$$+(R_{01}\alpha_1 t+R_{02}\alpha_2 t),$$

где $R_{01}=\rho_1 l_1/S$ и $R_{02}=\rho_2 l_2/S$ — сопротивления стержней при 0° С.

Из приведенного уравнения видно, что R_t не будет зависеть от температуры при

$$R_{01}\alpha_1+R_{02}\alpha_2=0,$$

или

$$\frac{\rho_1 l_1\alpha_1}{S}+\frac{\rho_2 l_2\alpha_2}{S}=0,$$

откуда

$$l_1=-\frac{\rho_2\alpha_2 l_2}{\rho_1\alpha_1}\approx 43{,}6 l_2.$$

10.12. При температуре 0° С сопротивление одного проводника в n раз меньше сопротивления второго и в m раз меньше сопротивления третьего. Температурные коэффициенты сопротивления проводников

соответственно равны α_1, α_2 и α_3. Чему равен температурный коэффициент сопротивления проводника, состоящего из этих трех последовательно соединенных проводников?

Пусть при 0° С сопротивления проводников — R_{01}, R_{02} и R_{03}. При температуре t их сопротивления соответственно равны R_{t1}, R_{t2}, R_{t3}, причем

$$R_{t1} = R_{01}(1 + \alpha_1 t);$$
$$R_{t2} = R_{02}(1 + \alpha_2 t);$$
$$R_{t3} = R_{03}(1 + \alpha_3 t).$$

При последовательном соединении проводников их сопротивление при 0° С

$$R_0 = R_{01} + R_{02} + R_{03};$$

при температуре t

$$R_t = R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} = (R_{01} + R_{02} + R_{03}) + + (R_{01}\alpha_1 + R_{02}\alpha_2 + R_{03}\alpha_3)\,t. \quad (1)$$

В общем случае можно записать:

$$R_t = R_0(1 + \alpha t), \quad (2)$$

где α — температурный коэффициент сопротивления последовательно соединенной системы проводников. Сравнивая уравнения (1) и (2), получаем:

$$\alpha = \frac{R_{01}\alpha_1 + R_{02}\alpha_2 + R_{03}\alpha_3}{R_{01} + R_{02} + R_{03}} = \frac{\alpha_1 + n\alpha_2 + m\alpha_3}{1 + n + m}.$$

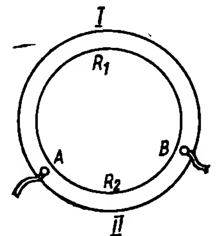


Рис. 236

10.13. Кольцо сделано из проволоки длиной l, площадью сечения S, сопротивлением R_0. Где следует присоединить провода, подводящие ток, чтобы сопротивление уменьшилось в n раз (рис. 236)?

Сопротивление кольца $R_0 = \rho l/S$, где ρ — удельное сопротивление материала проволоки. При подключении подводящих проводов к точкам A и B кольца получаем случай параллельного соединения двух сопротивлений: R_1 и R_2. Обозначив длину участка I через x, находим, что сопротивление этого участка

$$R_1 = \rho\frac{x}{S};$$

сопротивление участка II

$$R_2 = \rho\frac{l - x}{S}.$$

Общее сопротивление

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho x(l - x)}{lS}.$$

По условию задачи

$$\frac{R_0}{R}=n; \quad n=\frac{l^2}{x(l-x)};$$

$$x^2-lx+\frac{l^2}{n}=0; \quad x_{1,2}=\frac{l}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{n-4}{n}}\right).$$

Очевидно, что $n \geqslant 4$.

10.14. Какова плотность тока в проводнике длиной l при температуре t, если напряжение на концах проводника равно U?

Закон Ома для участка цепи:

$$I=\frac{U}{R_t}=\frac{U}{\rho_t\frac{l}{S}}=\frac{US}{\rho_t l},$$

где S — площадь сечения проводника; ρ_t — удельное сопротивление при температуре t. В свою очередь,

$$\rho_t=\rho_0(1+\alpha t),$$

где ρ_0 — удельное сопротивление при 0° С; α — температурный коэффициент сопротивления.

Плотность тока

$$j=\frac{I}{S}=\frac{U}{\rho_t l}=\frac{U}{\rho_0 l(1+\alpha t)}.$$

10.15. Насколько изменится при переходе от зимы к лету сопротивление телеграфной линии, если она проложена железным проводом сечением S? Температура меняется от $-t$ до $+t$. Длина провода при 0° С равна l. Как изменится результат, если учесть линейное расширение провода при нагревании?

Без учета линейного расширения провода:

при температуре	0° С	сопротивление	линии	$R_0=\rho_0 l/S$;	
»	$-t$	»	»	$R_1=\rho_0 l(1-\alpha t)/S$;	(1)
»	$+t$	»	»	$R_2=\rho_0 l(1+\alpha t)/S$	(2)

(ρ_0 — удельное сопротивление железа; α — температурный коэффициент сопротивления железа).

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$\Delta R=R_2-R_1=2\alpha\rho_0 lt/S.$$

Если учесть зависимость линейных размеров проводника от температуры, уравнения (1) и (2) примут вид:

$$R_1=\rho_0\frac{l_1}{S}(1-\alpha t); \quad R_2=\rho_0\frac{l_2}{S}(1+\alpha t),$$

причем $l_1=l_0(1-\beta t)$; $l_2=l_0(1+\beta t)$, где l_0 — длина провода при 0° С; β — коэффициент линейного расширения.

В данном случае

$$\Delta R' = \frac{\rho_0}{S}[l_0(1+\beta t)(1+\alpha t) - l_0(1-\beta t)(1-\alpha t)] = \\ = \frac{2\rho_0 l_0 t}{S}(\alpha+\beta).$$

10.16. Вычислить сопротивление контура (рис. 237).

Резисторы $R10$ и $R11$ соединены параллельно, следовательно, их общее сопротивление

$$R10,11 = \frac{R10R11}{R10+R11} = \frac{8}{3}r.$$

Оба эти сопротивления могут быть заменены эквивалентным сопротивлением $R10, 11$, которое, в свою очередь, соединено последовательно с резистором $R6$. Их общее сопротивление

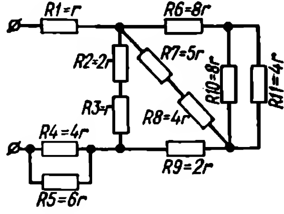


Рис. 237

$$R6,10,11 = R6 + R10,11 = \frac{32}{3}r.$$

Резисторы $R7$ и $R8$ соединены последовательно, их общее сопротивление

$$R7,8 = R7 + R8 = 9r.$$

В свою очередь, эквивалентное сопротивление $R7,8$ соединено параллельно с $R6,10,11$, и их общее сопротивление

$$R6,7,8,10,11 = \frac{R7,8R6,10,11}{R7,8+R6,10,11} = \frac{288}{59}r.$$

Полученное эквивалентное сопротивление $R6,7,8,10,11$ соединено последовательно с $R9$; отсюда

$$R6,7,8,9,10,11 = R6,7,8,10,11 + R9 = \frac{406}{59}r.$$

Резисторы $R2$ и $R3$ соединены последовательно, значит,

$$R2,3 = R2 + R3 = 3r.$$

В свою очередь, эквивалентное сопротивление $R2,3$ соединено параллельно с $R6,7,8,9,10,11$, так что

$$R2,3,6,7,8,9,10,11 = \frac{R2,3R6,7,8,9,10,11}{R2,3+R6,7,8,9,10,11} \approx 2,09r.$$

Резисторы $R4$ и $R5$ соединены параллельно, поэтому

$$R4,5 = \frac{R4R5}{R4+R5} = 2,40r.$$

И, наконец, резистор $R1$ и эквивалентные сопротивления $R4,5$ и $R2,3,6,7,8,9,10,11$ соединены последовательно.

Сопротивление контура

$$R = 2,09r + 2,40r + r = 5,49r.$$

10.17. Контур составлен из резисторов так, как показано на рис. 238, *а*. Вычислить его сопротивление, если источник напряжения подключен к точкам: 1) *A* и *B*; 2) *C* и *D*; 3) *E* и *F*.

1) Источник напряжения подключен к точкам *A* и *B*. В этой схеме резисторы *R1* и *R2*, *R3* и *R4* попарно соединены последовательно, каждую пару можно заменить эквивалентными сопротивлениями

$$R1,2 = R1 + R2 = 1,5r; \quad R3,4 = R3 + R4 = 1,5r.$$

Эти эквивалентные сопротивления включены параллельно, так как сопротивление участка *CD* равно нулю, поэтому точки *C* и *D* можно считать совмещенными. Эквивалентное сопротивление

$$R1,2,3,4 = \frac{R1,2R3,4}{R1,2 + R3,4} = 0,75r.$$

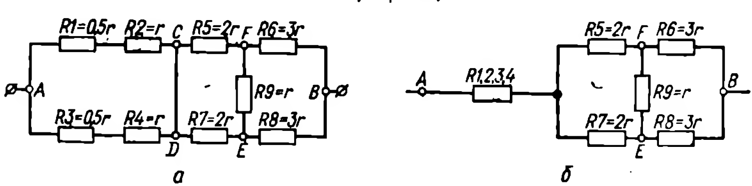


Рис. 238

Теперь схема может быть представлена, как на рис. 238, *б*. В ней, на первый взгляд, нет ни параллельных, ни последовательных соединений. Нетрудно, однако, заметить, что сопротивления включены симметрично, ось симметрии проходит через точки *A* и *B*. Поэтому для нахождения общего сопротивления нужно найти точки, имеющие одинаковый потенциал, и, разъединив (или соединив) их, свести схему к типу, подобному рассмотренному в предыдущей задаче.

Пусть ток подходит к узлу *B*. Здесь он разветвляется на две равные части, так как условия его прохождения в обеих ветвях идентичны. Потенциалы в точках *E* и *F* будут одинаковы, так как падения напряжения на резисторах *R6*, *R8* одинаковы, а потенциал проводников в точке *B* один и тот же. Напряжение между точками *F* и *E* равно нулю, следовательно, ток по сопротивлению *R9* течь не будет. Поэтому, не нарушая работы схемы, точки *E* и *F* можно разъединить, выбросив *R9*. После этого упрощения резисторы *R5*, *R6* и *R7*, *R8* окажутся попарно соединенными последовательно и их можно заменить эквивалентными сопротивлениями

$$R5,6 = R5 + R6 = 5r; \quad R7,8 = R7 + R8 = 5r.$$

Эквивалентные сопротивления *R5,6* и *R7,8* соединены параллельно, отсюда

$$R5,6,7,8 = \frac{R5,6R7,8}{R5,6 + R7,8} = 2,5r.$$

Эквивалентное сопротивление *R1,2,3,4* соединено последовательно с *R5,6,7,8*, так что сопротивление контура

$$R = R1,2,3,4 + R5,6,7,8 = 3,25r.$$

2) Источник подключен к точкам C и D. В этом случае сопротивление контура равно нулю, так как весь ток пойдет по участку с нулевым сопротивлением, т. е. источник будет замкнут накоротко.

3) Источник подключен к точкам E и F. Резисторы $R6$ и $R8$ оказываются включенными последовательно и их можно заменить эквивалентным сопротивлением

$$R6{,}8 = R6 + R8 = 6r,$$

которое включено параллельно резистору $R9$; их общее эквивалентное сопротивление

$$R6{,}8{,}9 = \frac{R6{,}8R9}{R6{,}8 + R9} = \frac{6}{7}r.$$

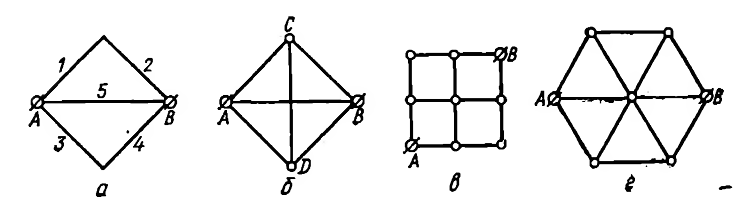


Рис. 239

Так как потенциалы точек C и D и в этом случае одинаковы, то через резисторы $R1$, $R2$, $R3$, $R4$ ток течь не будет, и их можно выбросить, не нарушая работы схемы. Таким образом, $R5$ и $R7$ оказываются включенными последовательно и могут быть заменены эквивалентным сопротивлением

$$R5{,}7 = R5 + R7 = 4r,$$

которое включено параллельно $R6{,}8{,}9$. Следовательно, сопротивление контура

$$R = \frac{R5{,}7R6{,}8{,}9}{R5{,}7 + R6{,}8{,}9} = \frac{12}{17}r.$$

10.18. Определить общее сопротивление контуров, составленных из резисторов одинакового сопротивления r. Точки подключения к электрической цепи — A и B (рис. 239, *а*,*б*,*в*,*г*).

а) Контур можно рассматривать как параллельное соединение трех резисторов *1—2*, *3—4* и *5*. Так как сопротивления этих ветвей равны соответственно $2r$, $2r$ и r, то общее сопротивление контура

$$R = \frac{r}{2}.$$

б) В данном случае точки C и D имеют одинаковый потенциал, следовательно, в ветви CD тока нет, и схема преобразуется к виду рис. 239,*а*.

в) Эта схема может быть преобразована к виду рис. 240, *а*, откуда

$$R = \frac{3}{2} r.$$

г) Схема преобразуется к виду рис. 240, *б* и $R = 0{,}8r$.

10.19. Вычислить сопротивления резисторов $R1$ и $R2$ в схеме (рис. 241), если при подключении источника с напряжением $U = 220$ В падения напряжений на этих резисторах равны $U_1 = 20$ В и $U_2 = 30$ В соответственно. $R3 = 10$ Ом, $R4 = 15$ Ом.

Исходя из схемы, можно записать

$$U = U_3 + U_2; \quad U = U_1 + U_4,$$

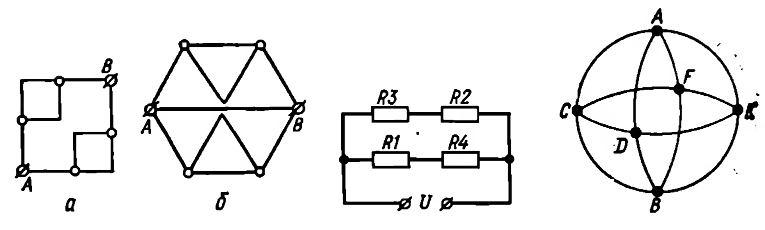


Рис. 240 Рис. 241 Рис. 242

причем

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{R3}{R2}; \quad \frac{U_1}{U_4} = \frac{R1}{R4}.$$

Решая эти уравнения попарно, получаем

$$\frac{U - U_2}{U_2} = \frac{R3}{R2}; \quad R2 = \frac{U_2}{U - U_2} R3 = 1{,}58 \text{ Ом},$$

$$\frac{U_1}{U - U_1} = \frac{R1}{R4}; \quad R1 = \frac{U_1}{U - U_1} R4 = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

10.20. Три одинаковых медных кольца радиусом r соединены, как показано на рис. 242. Определить сопротивление полученного контура, если диаметр проволоки — d, удельное сопротивление — ρ, а ток подводится к точкам A и B.

Из соображений симметрии ясно, что точки C, F, E, D имеют один и тот же потенциал. Следовательно, в кольце $CDEF$ тока нет и его можно исключить, не нарушая работы схемы. Таким образом, схема сводится к четырем полукольцам, соединенным параллельно. Так как сопротивления полуколец одинаковы, общее сопротивление контура

$$R = \frac{R_1}{4},$$

где $R_1 = \rho l/S$ — сопротивление полукольца; l — длина полукольца, равная πr.

Итак,

$$R = \rho \frac{\pi r}{4S} = \frac{\rho r}{d^2}.$$

10.21. Зашунтированный амперметр измеряет токи силой до $I = 10$ А. Какую наибольшую силу тока может измерить этот амперметр без шунта, если сопротивление амперметра $R_а = 0{,}02$ Ом, сопротивление шунта $R_ш = 0{,}005$ Ом (рис. 243)?

Как известно, шунт включается параллельно амперметру. По правилам параллельного включения сопротивлений падения напряжений на шунте и на амперметре равны

$$U_ш = U_а \text{ или } I_ш R_ш = I_а R_а. \quad (1)$$

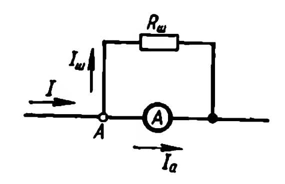


Рис. 243

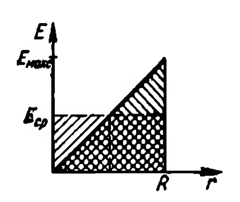


Рис. 244

Первое правило Кирхгофа для узла A:

$$I = I_ш + I_а. \quad (2)$$

Из (1) имеем

$$I_ш = I_а \frac{R_а}{R_ш}.$$

Подставив полученное выражение в (2), получим

$$I = I_а \left(1 + \frac{R_а}{R_ш}\right); \quad I_а = \frac{I R_ш}{R_а + R_ш} = 2 \text{ А}.$$

10.22. Металлический диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска, с угловой скоростью ω. Радиус диска — R. Какая разность потенциалов должна возникнуть между центром и краем диска?

Свободные электроны смещаются к краю диска под действием силы инерции. Поэтому край диска зарядится отрицательно, а центр — положительно Смещение зарядов создает электрическое поле, благодаря чему возникает центростремительная сила, уравновешивающая силу инерции.

$$m\omega^2 r = Ee; \quad E = \frac{m\omega^2 r}{e},$$

где e — заряд электрона; E — напряженность поля в данной точке.

Как видно из формулы, модуль напряженности поля линейно зависит от радиуса диска (рис. 244) и изменяется от $E_0 = 0$ в центре до $E_{макс} = m\omega^2 R/e$ на краю диска. Среднее значение

$$E_{ср} = \frac{E_0 + E_{макс}}{2} = \frac{1}{2}\frac{m\omega^2 R}{e}.$$

Искомая разность потенциалов равна работе, которую нужно совершить при переносе единичного заряда от края диска к его центру. Графически она равна площади треугольника либо площади равновеликого прямоугольника:

$$U = E_{ср} R = \frac{1}{2}\frac{m\omega^2 R^2}{e}.$$

10.23. Цена деления прибора $c = 15 \cdot 10^{-6}$ А/дел. Шкала прибора имеет $n = 200$ делений, внутреннее сопротивление $R_п = 100$ Ом. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжения $U = 200$ В или амперметр для измерения тока $I = 4$ А?

Предельный ток, который может быть измерен прибором, $I_п = cn$. Допустимое падение напряжения на приборе

$$U_п = R_п I_п = R_п cn.$$

Для того чтобы прибор мог быть использован как вольтметр на напряжение U, последовательно с ним должно быть включено добавочное сопротивление $R_д$, падение напряжения на котором $U_д = U - U_п = U - R_п cn$. Это добавочное сопротивление можно определить, пользуясь законом Ома для участка цепи:

$$R_д = \frac{U_д}{I_п} = \frac{U - R_п cn}{cn} \approx 66{,}6 \text{ кОм}.$$

Для того чтобы прибор можно было использовать как амперметр для измерения тока I, параллельно прибору следует включить шунт, через который должен идти ток $I_ш = I - I_п$.

Так как падение напряжения на шунте такое же, как на приборе, то, пользуясь законом Ома для участка цепи, можно найти сопротивление шунта

$$R_ш = \frac{U_ш}{I_ш} = \frac{U_п}{I - I_п} = \frac{R_п cn}{I - cn} \approx 0{,}07 \text{ Ом}.$$

10.24. В схеме, приведенной на рис. 245, $R2 = 15$ Ом, $R3 = 20$ Ом, $I_2 = 0{,}3$ А. Амперметр показывает $I = 1$ А. Найти сопротивление $R1$.

Резисторы $R1$, $R2$ и $R3$ соединены параллельно, значит, падения напряжений на них равны:

$$U = U_1 = U_2 = U_3, \text{ или } I_1 R1 = I_2 R2 = I_3 R3.$$

Согласно первому правилу Кирхгофа для узла C

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Зная падение напряжения на резисторе $R3$, можно определить значение тока, текущего через него:

$$I_3 = \frac{U_3}{R3} = \frac{I_2R2}{R3} = 0{,}225 \text{ A}.$$

Теперь находим I_1:

$$I_1 = I - I_2 - I_3 = 0{,}475 \text{ A}.$$

Следовательно,

$$R1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{I_2R2}{I_1} \approx 9{,}47 \text{ Ом}.$$

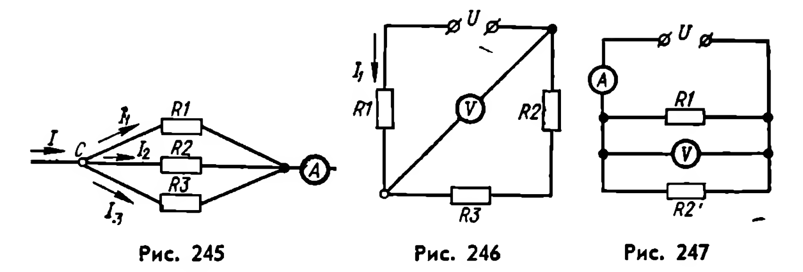


Рис. 245 Рис. 246 Рис. 247

10.25. В схеме, изображенной на рис. 246, напряжение на зажимах батареи $U = 100$ В, $R1 = 100$ Ом, $R2 = 200$ Ом, $R3 = 300$ Ом. Какое напряжение показывает вольтметр, если его сопротивление $R_в = 2000$ Ом?

Сопротивление всего контура

$$R = R1 + \frac{R_в(R2 + R3)}{R_в + R2 + R3}.$$

С другой стороны, для последовательно соединенных $R1$ и контура, содержащего $R_в$, $R2$, $R3$, можно записать

$$U = U_1 + U_в,$$

где U_1 и $U_в$ — падения напряжений на резисторе $R1$ и на вольтметре. Применив закон Ома ко всему рассматриваемому контуру, определим ток, текущий через $R1$:

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{U}{R1 + \dfrac{R_в(R2 + R3)}{R_в + R2 + R3}}.$$

Из закона Ома для участка цепи, содержащего $R1$, находим

$$U_1 = I_1R1 = \frac{UR1}{R_1 + \dfrac{R_в(R2 + R3)}{R_в + R2 + R3}}.$$

Следовательно,

$$U_{\text{в}} = U - \frac{UR1}{R1 + \frac{R_{\text{в}}(R2+R3)}{R_{\text{в}}+R2+R3}} = U\left[1 - \frac{R1}{R1 + \frac{R_{\text{в}}(R2+R3)}{R_{\text{в}}+R2+R3}}\right] = 80 \text{ В}.$$

10.26. Найти показания амперметра и вольтметра в схеме, приведенной на рис. 247. Сопротивление вольтметра $R_{\text{в}} = 1000$ Ом, $R1 = 400$ Ом, $R2 = 600$ Ом. Напряжение $U = 110$ В. Сопротивлением амперметра пренебречь.

Общее сопротивление схемы

$$R = \frac{R1R2R_{\text{в}}}{R1R2 + R1R_{\text{в}} + R2R_{\text{в}}}.$$

Значение тока, протекающего через амперметр,

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U(R1R2 + R1R_{\text{в}} + R2R_{\text{в}})}{R1R2R_{\text{в}}} = 0{,}57 \text{ А}.$$

Так как резисторы $R1$, $R2$ и вольтметр соединены параллельно и подключены к зажимам источника, то

$$U_{\text{в}} = U = 110 \text{ В}.$$

10.27. Решить предыдущую задачу для схемы, показанной на рис. 248.

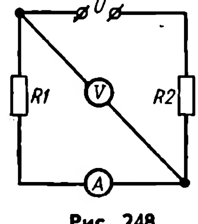


Рис. 248

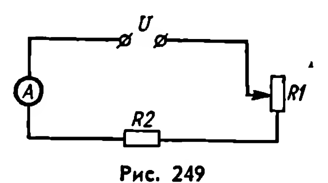


Рис. 249

В данном случае общее сопротивление схемы

$$R = R2 + \frac{R1R_{\text{в}}}{R1 + R_{\text{в}}}.$$

Через $R2$ протекает ток

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R2 + \frac{R1R_{\text{в}}}{R1 + R_{\text{в}}}}.$$

Вольтметр покажет

$$U_{\text{в}} = U - U_2 = U - IR2 = U - \frac{R2U}{R2 + \frac{R1R_{\text{в}}}{R1 + R_{\text{в}}}} = 35{,}6 \text{ В}.$$

Падение напряжения на вольтметре равно падению напряжения на $R1$, так как они соединены параллельно. Применив закон Ома к участку, содержащему $R1$, получим значение тока, текущего через амперметр:

$$I_1 = \frac{U_1}{R1} = \frac{U_в}{R1} = \frac{U}{R1}\left(1 - \frac{R2}{R2 + \frac{R1R_в}{R1 + R_в}}\right) = \frac{UR_в}{R2(R1 + R_в) + R1R_в} = 0{,}089\ \text{А}.$$

10.28. На схеме (рис. 249) напряжение на зажимах источника равно U. При выведенном реостате $R1$ значение тока, показываемое амперметром,— I_1, при полностью введенном реостате по цепи течет ток I_2. Определить сопротивление $R2$ и сопротивление реостата $R1$, а также падение напряжения на полностью введенном реостате. Сопротивлением амперметра пренебречь.

При выведенном реостате сопротивление цепи $R = R2$ и согласно закону Ома

$$I_1 = \frac{U}{R2}.$$

При полностью введенном реостате сопротивление цепи равно $R1 + R2$ и амперметр показывает ток

$$I_2 = \frac{U}{R1 + R2}.$$

Из этих уравнений находим

$$R2 = \frac{U}{I_1};$$

$$R1 = \frac{U - I_2R2}{I_2} = \frac{U}{I_2} - R2 = \frac{U}{I_2} - \frac{U}{I_1} = U\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right).$$

Падение напряжения на полностью введенном реостате

$$U_1 = I_2R1 = U - U\frac{I_2}{I_1} = U\left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right).$$

10.29. Имеется лампочка мощностью P, рассчитанная на напряжение U_1. Какое добавочное сопротивление надо включить последовательно с лампочкой, чтобы она давала нормальный накал при напряжении в сети $U_2 > U_1$? Сколько метров нихромовой проволоки сечением S надо взять, чтобы получить такое сопротивление?

Для того чтобы лампочку можно было включить в сеть с напряжением U_2, падение напряжения на добавочном сопротивлении должно быть равно

$$U_д = U_2 - U_1.$$

Согласно закону Ома $U_д = IR_д$. Ток через добавочное сопротивление равен току через лампочку:

$$I = \frac{P}{U_1}.$$

Таким образом,

$$U_д = \frac{PR_д}{U_1},$$

откуда

$$R_д = \frac{U_1 U_д}{P} = \frac{U_1 (U_2 - U_1)}{P}.$$

Так как $R_д = \rho l/S$, где ρ — удельное сопротивление нихрома; S и l — сечение и длина проводника, получаем

$$l = \frac{U_1 U_д S}{P\rho} = \frac{U_1 (U_2 - U_1) S}{P\rho}.$$

10.30. Определить общее сопротивление цепи (рис. 250) и напряжение между точками A и B, если ток, измеренный амперметром, равен I.

В данной схеме последовательно соединены резисторы $R1$ и $R2$; $R6$ и $R7$; соответствующие эквивалентные сопротивления равны

$$R1{,}2 = R1 + R2; \quad R6{,}7 = R6 + R7.$$

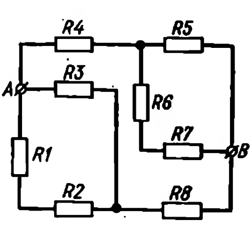


Рис. 250

В свою очередь, $R1{,}2$ включено параллельно $R3$, $R6{,}7$ — параллельно $R5$, следовательно,

$$R1{,}2{,}3 = \frac{R3\,(R1 + R2)}{R1 + R2 + R3};$$

$$R5{,}6{,}7 = \frac{R5\,(R6 + R7)}{R5 + R6 + R7}.$$

Эти эквивалентные сопротивления соединены последовательно: $R1{,}2{,}3$ с $R8$, а $R5{,}6{,}7$ с $R4$. Поэтому

$$R1{,}2{,}3{,}8 = R8 + \frac{R3\,(R1 + R2)}{R1 + R2 + R3}; \quad R4{,}5{,}6{,}7 = R4 + \frac{R5\,(R6 + R7)}{R5 + R6 + R7}.$$

И, наконец, эквивалентные сопротивления $R1{,}2{,}3{,}8$ и $R4{,}5{,}6{,}7$ включены параллельно. Таким образом, общее сопротивление контура

$$R = \frac{\left[R8 + \frac{R3\,(R1 + R2)}{R1 + R2 + R3}\right]\left[R4 + \frac{R5\,(R6 + R7)}{R5 + R6 + R7}\right]}{R8 + R4 + \frac{R3\,(R1 + R2)}{R1 + R2 + R3} + \frac{R5\,(R6 + R7)}{R5 + R6 + R7}}.$$

Используя закон Ома, находим напряжение между точками A и B

$$U = IR.$$

10.31. Эквивалентное сопротивление трех параллельно соединенных резисторов равно 30 Ом. Сопротивления резисторов относятся как 1 : 3 : 5. Определить каждое из сопротивлений.

Для случая параллельного соединения сопротивлений эквивалентное сопротивление может быть найдено по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3},$$

где R_1, R_2, R_3 — значения этих сопротивлений.

По условию задачи $R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 3 : 5$. Очевидно, что

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{3R_1} + \frac{1}{5R_1}; \quad R_1 = \frac{23R}{15} = 46 \text{ Ом};$$
$$R_2 = 138 \text{ Ом}; \quad R_3 = 230 \text{ Ом}.$$

10.32. В цепи (рис. 251) $R1 = 2$ Ом, $R2 = 4$ Ом, $R3 = 6$ Ом. Найти сопротивление $R4$, зная, что на участке CD нет тока.

Если на участке нет тока, то сопротивление $R5$ можно исключить из схемы, не нарушая ее работы. В преобразованной таким образом схеме остаются две параллельно включенные ветви, одна из которых содержит последовательно включенные сопротивления $R1$ и $R2$, другая — сопротивления $R3$ и $R4$. В случае параллельного соединения

$$I_1(R1 + R2) = I_2(R3 + R4).$$

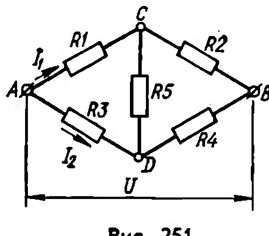


Рис. 251

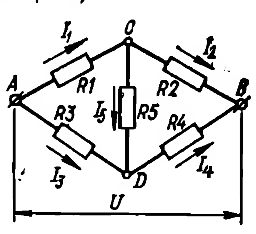


Рис. 252

Так как точки C и D имеют одинаковый потенциал, то падения напряжения на $R2$ и $R4$ равны, т. е.

$$I_1R2 = I_2R4.$$

Из этих уравнений находим

$$\frac{R2}{R1 + R2} = \frac{R4}{R3 + R4},$$

откуда

$$R4 = \frac{R2R3}{R1} = 12 \text{ Ом}.$$

10.33. В цепи (рис. 252) $R1 = 4$ Ом, $R2 = 10$ Ом, $R3 = 40$ Ом, $R4 = 20$ Ом, $U = 60$ В. Известно, что через $R2$ течет ток $I_2 = 4$ А. Найти $R5$.

Согласно закону Ома для участка цепи:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_A - \varphi_C &= I_1R1; \\ \varphi_C - \varphi_B &= I_2R2; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_A - \varphi_D &= I_3R3; \\ \varphi_D - \varphi_B &= I_4R4, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где φ_A, φ_B, φ_C, φ_D — потенциалы точек A, B, C, D.

Из уравнений (1), почленно складывая их, получаем:

$$\varphi_A - \varphi_B = I_1R1 + I_2R2 \text{ или } U = I_1R1 + I_2R2,$$

откуда находим

$$I_1 = \frac{U - I_2R2}{R1} = 5 \text{ А}.$$

Для узла C: $I_2 + I_5 = I_1$; $I_5 = 1$ А.
Для узла D: $I_4 = I_2 + I_5$.
Из уравнений (2): $\varphi_A - \varphi_B = I_3R3 + I_4R4$, т. е. $U = I_3R3 + I_4R4$.

Из уравнений (1) и (2): $\varphi_C - \varphi_D = I_2R2 - I_4R4$. С другой стороны, согласно закону Ома $\varphi_C - \varphi_D = R5I_5$. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$U = I_3R3 + I_4R4;$$
$$I_5R5 = I_2R2 - I_4R4;$$
$$I_3 + I_5 = I_4.$$

Решая систему относительно $R5$, получаем

$$R5 = \frac{I_2R2 - \dfrac{R4\,(U + I_5R3)}{R3 + R4}}{I_5} \approx 6{,}7 \text{ Ом}.$$

10.34. Реостат длиной l включен как потенциометр в сеть с напряжением U. Сопротивление реостата — R_0. Между концом потенциометра и подвижным контактом включен вольтметр, показывающий снимаемое с потенциометра напряжение. Как будет зависеть показание вольтметра от положения движка на реостате, если сопротивление вольтметра — R_B (рис. 253)?

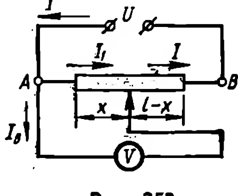


Рис. 253

Падение напряжения на участке AB

$$U = U_x + U_{l-x}, \qquad (1)$$

где U_x — падение напряжения на части потенциометра длиной x; U_{l-x} — на остальной части потенциометра. Если по участку потенциометра длиной x течет ток I_1, а по участку $(l-x)$ течет ток I, то для U_x и U_{l-x} справедливы соотношения

$$U_x = I_1R_x; \; U_{l-x} = IR_{l-x}.$$

Вследствие того, что реостат намотан из однородного проводника, сопротивления его участков относятся как их длины:

$$\frac{R_x}{R_{l-x}} = \frac{x}{l-x}$$

или

$$R_x = R_0\frac{x}{l};$$

$$R_{l-x} = R_0\frac{l-x}{l}.$$

Как видно из схемы, показание вольтметра

$$U_{\text{в}} = U_x. \qquad (2)$$

Из (1) следует:

$$U_в = U - U_{l-x} = U - IR_{l-x}. \quad (3)$$

Используя закон Ома, можно найти

$$I = \frac{U}{R},$$

где R — общее сопротивление контура,

$$R = R_{l-x} + \frac{R_x R_в}{R_x + R_в} = R_0 \frac{l-x}{l} + \frac{R_0 \frac{x}{l} R_в}{R_0 \frac{x}{l} + R_в} =$$

$$= \frac{R_0^2 lx + R_0 R_в l^2 - R_0^2 x^2}{l (R_0 x + l R_в)}. \quad (4)$$

Из (2), (3), (4) получаем

$$U_в = U - \frac{U R_0 \frac{l-x}{l} \cdot l (R_0 x + l R_в)}{R_0^2 lx + R_0 R_в l^2 - R_0^2 x^2} = U \frac{R_в lx}{R_0 lx + R_в l^2 - R_0 x^2}.$$

10.35. На концах провода из материала с удельным сопротивлением ρ, длиной l и диаметром d за время t напряжение равномерно возрастает от U_1 до U_2. Какое количество электричества протекает при этом через провод?

Если напряжение равномерно возрастает, то и сила тока будет равномерно возрастать от $I_1 = U_1/R$ до $I_2 = U_2/R$, где $R = \rho l/S$ — сопротивление проводника; $S = \pi d^2/4$ — площадь его сечения. Средняя сила тока

$$I_{ср} = \frac{I_1 + I_2}{2}.$$

Рис. 254

Графически изменение силы тока во времени можно представить, как показано на рис. 254. Из рисунка ясно, что количество электричества

$$q = I_{ср} t = \frac{I_1 + I_2}{2} t =$$

$$= \frac{1}{\rho \frac{8l}{\pi d^2}} (U_2 + U_1) t = \frac{\pi d^2 (U_2 + U_1) t}{8 \rho l}.$$

10.36. Через аккумулятор с э. д. с. $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом течет ток $I = 5$ А. Найти напряжение на зажимах источника.

Как известно, э. д. с. равна сумме падений напряжений на внешнем и внутреннем участках замкнутой электрической цепи:

$$\mathcal{E} = Ir + IR,$$

где R — сопротивление внешней цепи.

Напряжение на зажимах источника

$$U = IR = \mathscr{E} - Ir = 5 \text{ В}.$$

10.37. Два вольтметра, соединенных последовательно, подключены к источнику тока и показывают 8 и 4 В. Если подключить к источнику только второй вольтметр, он покажет 10 В. Чему равна э. д. с. источника?

Для случая, когда подключены оба вольтметра, можно записать уравнение

$$\mathscr{E} = Ir + U_1 + U_2, \quad (1)$$

где Ir — падение напряжения внутри источника; U_1, U_2 — падения напряжений на первом и втором вольтметрах соответственно.

Если подключен только второй вольтметр, то

$$\mathscr{E} = I_1 r + U_2', \quad (2)$$

где $I_1 r$ — падение напряжения внутри источника; U_2' — показание вольтметра во втором случае.

Согласно закону Ома для участка цепи

$$U_2 = IR_2; \quad U_2' = I_1 R_2, \quad (3)$$

где R_2 — сопротивление вольтметра.

Из (3) имеем:

$$R_2 = \frac{U_2}{I}; \; I_1 = \frac{U_2'}{R_2} = \frac{U_2' I}{U_2}. \quad (4)$$

Из (1) получаем

$$Ir = \mathscr{E} - (U_1 + U_2). \quad (5)$$

Подставив (4) в (2), находим

$$\mathscr{E} = \frac{U_2'}{U_2} Ir + U_2'. \quad (6)$$

Из (5) и (6)

$$\mathscr{E} = \frac{U_2'}{U_2} [\mathscr{E} - (U_1 + U_2)] + U_2',$$

откуда

$$\mathscr{E} = \frac{U_2' U_1}{U_2' - U_2} \approx 13{,}3 \text{ В}.$$

10.38. При замыкании элемента на сопротивление R_1 в цепи идет ток I_1; при замыкании на сопротивление R_2 идет ток I_2. Чему равен ток короткого замыкания?

Запишем закон Ома для замкнутой цепи в первом и втором случаях:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + r}, \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_2 + r},$$

где $\mathscr{E}$ — э. д. с. элемента; r — его внутреннее сопротивление. Решив эти два уравнения, получим:

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}; \quad \mathscr{E} = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_2 - I_1}.$$

Ток короткого замыкания

$$I_{макс} = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_1 R_1 - I_2 R_2}.$$

10.39. N-одинаковых аккумуляторов соединены последовательно, причем k из них включены навстречу другим. Э. д. с. каждого элемента равна $\mathcal{E}_1$, внутреннее сопротивление — r_1. Какой ток установится в цепи, если батарею замкнуть на сопротивление R?

Запишем закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где $\mathcal{E}$ — э. д. с.; r — внутреннее сопротивление батареи.

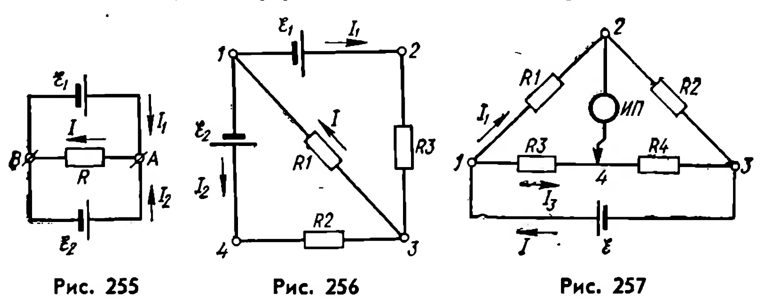


Рис. 255 Рис. 256 Рис. 257

Так как элементы соединены последовательно, внутреннее сопротивление батареи $r = Nr_1$.

Э. д. с. батареи равна алгебраической сумме э. д. с. элементов:

$$\mathcal{E} = (N - k)\,\mathcal{E}_1 - k\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 (N - 2k).$$

Следовательно, ток в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 (N - 2k)}{R + Nr_1}.$$

10.40. В схему (рис. 255) включены два элемента с э. д. с. $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом. Чему равно сопротивление R, если $I_1 = 1$А? Найти значения I и I_2.

Используем правила Кирхгофа:
для контура $B\mathcal{E}_1AB$: $I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1$; для контура $B\mathcal{E}_2AB$: $I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2$; для узла A: $I_1 + I_2 = I$. Решив полученную систему уравнений, находим

$$R = \frac{r_2 (\mathcal{E}_1 - I_1 r_1)}{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) + I_1 (r_2 + r_1)} = \frac{2}{3}\text{ Ом};$$

$$I = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) + I_1 (r_2 + r_1)}{r_2} = 1{,}5\text{ А};$$

$$I_2 = I - I_1 = 0{,}5\text{ А}.$$

10.41. В схеме (рис. 256) $\mathscr{E}_1 = 2$ В, $\mathscr{E}_2 = 2{,}4$ В, $R1 = 50$ Ом, $R2 = 10$ Ом и $R3 = 15$ Ом. Найти силу тока для каждого участка цепи. Сопротивлением источников пренебречь.

Запишем правила Кирхгофа для контуров:

$$1-2-3-1: \quad \mathscr{E}_1 = I_1 R3 + IR1;$$
$$1-3-4-1: \quad \mathscr{E}_2 = I_2 R2 + IR1.$$

Для узла 1: $I = I_1 + I_2$.

Решив полученную систему из трех уравнений с тремя неизвестными, находим:

$$I = \frac{\mathscr{E}_2 R3 + \mathscr{E}_1 R2}{R2R3 + R1R3 + R1R2} = 0{,}04 \text{ А};$$
$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1 - IR1}{R3} = 0;$$
$$I_2 = I - I_1 = I = 0{,}04 \text{ А}.$$

10.42. Найти силы токов в отдельных ветвях мостика Уитстона (рис. 257) при условии, что мостик сбалансирован, т. е. сила тока, текущего через гальванометр ИП, равна нулю. Э. д. с. батареи $\mathscr{E} = 6$ В, $R1 = 45$ Ом, $R2 = 75$ Ом, $R3 = 300$ Ом. Внутреннее сопротивление батареи — 3 Ом.

Так как на участке *2—4* сила тока равна нулю, то потенциалы точек *2* и *4* одинаковы, так что

$$U_1 = U_3; \quad U_2 = U_4, \tag{1}$$

где U_1, U_2, U_3, U_4 — падения напряжения на резисторах $R1$, $R2$, $R3$, $R4$ соответственно. Равенства (1) могут быть записаны в виде:

$$I_1 R1 = I_3 R3; \quad I_1 R2 = I_3 R4, \tag{2}$$

Из (2) находим

$$R4 = R2 \frac{R3}{R1} = 500 \text{ Ом}.$$

Сопротивление внешней цепи

$$R = \frac{(R1 + R2)(R3 + R4)}{R1 + R2 + R4 + R3} \approx 104{,}35 \text{ Ом}.$$

Из закона Ома для полной цепи получаем

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r} = \frac{\mathscr{E}}{\dfrac{(R1 + R2)(R3 + R4)}{R1 + R2 + R3 + R4} + r} \approx 0{,}056 \text{ А}.$$

Для узла *1* первое правило Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_3. \tag{3}$$

Из (2) имеем

$$I_1 = I_3 \frac{R3}{R1}. \tag{4}$$

Решив совместно (3) и (4), получим

$$I_3 = \frac{IR1}{R3 + R1} \approx 0{,}007\text{A};$$

$$I_1 = I - I_3 \approx 0{,}049\text{A}.$$

10.43. Определить силы токов на всех участках мостика Уитстона, если $R1 = 1$ Ом, $R2 = 2$ Ом, $R3 = 3$ Ом, $R4 = 6$ Ом, $R_д = 2$ Ом, $\mathscr{E} = 2$В, внутреннее сопротивление батареи $r = 1$ Ом (рис. 258).

Применим правила Кирхгофа для данной разветвленной цепи, наметив прежде всего направление токов.

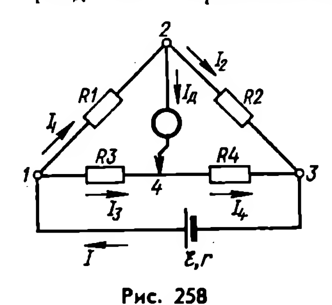


Рис. 258

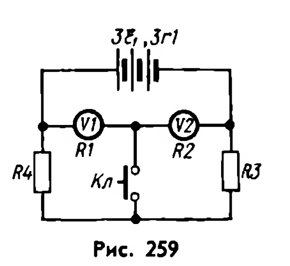


Рис. 259

Для узлов:

$$1 \quad I = I_1 + I_3;$$
$$2 \quad I_1 = I_д + I_2;$$
$$4 \quad I_4 = I_3 + I_д;$$

Для контуров:

$$1—2—4—1 \qquad I_1R1 + I_дR_д - I_3R3 = 0;$$
$$2—3—4—2 \qquad I_2R2 - I_4R4 - I_дR_д = 0;$$
$$1—2—3—\mathscr{E}—1 \quad I_1R1 + I_2R2 + I_r = \mathscr{E}.$$

Таким образом, получаем систему шести уравнений с шестью неизвестными, решив которые в числах, находим

$$I_1 = 1{,}2\text{A}; \quad I_4 = 0{,}4\text{A};$$
$$I_2 = 1{,}2\text{A}; \quad I = 1{,}6\text{A};$$
$$I_3 = 0{,}4\text{A}; \quad I_д = 0.$$

10.44. На схеме (рис. 259) сопротивления вольтметров $V1$ и $V2$ равны: $R1 = 2500$ Ом, $R2 = 1500$ Ом; сопротивления $R3 = 1500$ Ом, $R4 = 2500$ Ом. Найти показания вольтметров при замкнутом и разомкнутом ключе Кл, если источник э. д. с. состоит из $n = 3$ блоков с $\mathscr{E}_1 = 150$ В и внутренним сопротивлением $r1 = 1{,}5$ Ом каждый.

При разомкнутом ключе внешнее сопротивление цепи

$$R = \frac{(R1 + R2)(R3 + R4)}{R1 + R2 + R3 + R4}.$$

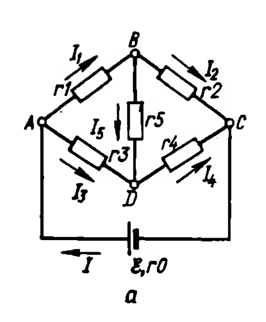
Внутреннее сопротивление системы последовательно включенных блоков $r = nr1$. Э. д. с. источника $\mathscr{E} = n\mathscr{E}_1$. Из закона Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r} = \frac{n\mathscr{E}_1}{\frac{(R1 + R2)(R3 + R4)}{R1 + R2 + R3 + R4} + nr1} \approx 0{,}224 \text{ А}.$$

Учитывая, что $U_1 + U_2 = n(\mathscr{E}_1 - Ir1)$; $U_1/U_2 = R1/R2$, находим:

$$U_1 = \frac{n(\mathscr{E}_1 - Ir1)}{1 + \frac{R2}{R1}} \approx 280{,}6 \text{ В};$$

$$U_2 = U_1 \frac{R2}{R1} \approx 168{,}4 \text{ В}.$$



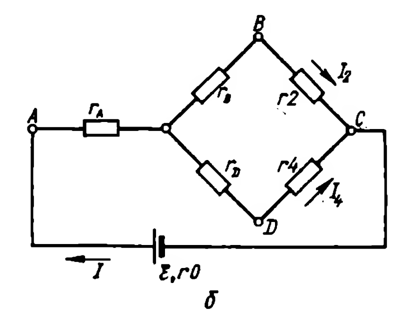


Рис. 260

При замкнутом ключе внешнее сопротивление цепи

$$R = \frac{R1R4}{R1 + R4} + \frac{R2R3}{R2 + R3},$$

так как сопротивление $R1$ включено параллельно $R4$, а сопротивление $R2$ — параллельно $R3$. Значит,

$$I = \frac{n\mathscr{E}_1}{\frac{R1R4}{R1 + R4} + \frac{R2R3}{R2 + R3} + nr1} \approx 0{,}36 \text{ А};$$

$$U_1 = I\frac{R1R4}{R1 + R4} \approx 280 \text{ В};$$

$$U_2 = I\frac{R2R3}{R2 + R3} \approx 168{,}6 \text{ В}.$$

10.45. В схеме неуравновешенного моста (рис. 260, *а*) определить все токи, если $\mathscr{E} = 1{,}5$ В, $r0 = 0{,}1$ Ом, $r1 = 1$ Ом, $r2 = 1{,}6$ Ом, $r3 = r5 = 2$ Ом, $r4 = 1{,}2$ Ом.

Преобразуем треугольник в эквивалентную звезду (рис. 260, *б*)

$$r_A = \frac{r1r3}{r1 + r3 + r5} = 0{,}4 \text{ Ом};$$

$$r_B = \frac{r1r5}{r1 + r3 + r5} = 0{,}4 \text{ Ом};$$

$$r_D = \frac{r3r5}{r1 + r3 + r5} = 0{,}8 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи

$$r_э = r0 + r_A + \frac{(r_B + r2)(r_D + r4)}{r_B + r2 + r_D + r4} = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

Ток источника

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r_э} = 1\text{А}.$$

Так как

$$r_B + r2 = r_D + r4 = 2 \text{ Ом},$$

то

$$I_2 = I_4 = I/2 = 0{,}5 \text{ А}.$$

Для определения силы тока I_5 предположим, что точка *C* заземлена и ее потенциал $\varphi_C = 0$. Потенциалы точек *B* и *D* выше потенциала точки *C* на значения падений напряжений $r2I_2$ и $r4I_4$:

$$\varphi_B = \varphi_C + r2I_2 = 0{,}8 \text{ В};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + r4I_4 = 0{,}6 \text{ В}.$$

Так как $\varphi_B > \varphi_D$, то на участке *BD* (рис. 260, *а*) ток I_5 направлен от точки *B* к точке *D* и равен

$$I_5 = \frac{\varphi_B - \varphi_D}{r5} = 0{,}1 \text{ А}.$$

Наконец, по правилу Кирхгофа

$$I_1 = I_2 + I_5 = 0{,}6 \text{ А}; \; I_3 = I_4 - I_5 = 0{,}4 \text{ А}.$$

10.46. Определить токи в проводах трехпроводной линии (рис. 261, *а*), если $U_{AB} = U_{BC} = 220$ В, $r0 = 0{,}5$ Ом, $r1 = r2 = r7 = 1$ Ом, $r3 = r4 = 4$ Ом, $r5 = 8$ Ом, $r6 = r8 = 2$ Ом.

Из рисунка видно, что сопротивления *r6*, *r7* и *r8* образуют звезду, *r3*, *r4* и *r5* — треугольник. Преобразуем звезду в эквивалентный треугольник (рис. 261, *б*):

$$r9 = r6 + r7 + \frac{r6r7}{r8} = 4 \text{ Ом};$$

$$r10 = r7 + r8 + \frac{r7r8}{r6} = 4 \text{ Ом};$$

$$r11 = r8 + r6 + \frac{r8r6}{r7} = 8 \text{ Ом}.$$

Параллельно включенные сопротивления $r9$ и $r3$, $r10$ и $r4$, $r11$ и $r5$ заменим эквивалентными (рис. 261, *в*):

$$\frac{1}{r_{ab}} = \frac{1}{r9} + \frac{1}{r3}; \quad \frac{1}{r_{bc}} = \frac{1}{r10} + \frac{1}{r4}; \quad \frac{1}{r_{ca}} = \frac{1}{r11} + \frac{1}{r5},$$

откуда $r_{ab} = r_{bc} = 2$ Ом; $r_{ca} = 4$ Ом.

Преобразуем полученный треугольник в эквивалентную звезду (рис. 261, *г*):

$$r_{an} = \frac{r_{ab}r_{ca}}{r_{ab} + r_{bc} + r_{ca}} = 1 \text{ Ом}; \quad r_{bn} = \frac{r_{bc}r_{ab}}{r_{ab} + r_{bc} + r_{ca}} = 0{,}5 \text{ Ом};$$

$$r_{cn} = \frac{r_{ca}r_{bc}}{r_{ab} + r_{bc} + r_{ca}} = 1 \text{ Ом}.$$

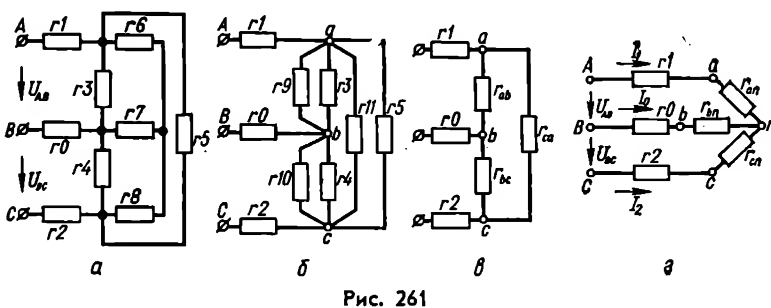


Рис. 261

Сопротивления окончательной схемы (рис. 261, *г*):

$$r_{An} = r1 + r_{an} = 2 \text{ Ом};$$

$$r_{Bn} = r0 + r_{bn} = 1 \text{ Ом};$$

$$r_{Cn} = r2 + r_{cn} = 2 \text{ Ом}.$$

По первому правилу Кирхгофа для узла n:

$$I_1 + I_0 + I_2 = 0.$$

По второму правилу Кирхгофа для контуров $AanbBA$ и $BbncCB$:

$$U_{AB} + I_0 r_{Bn} - I_1 r_{An} = 0; \quad U_{BC} + I_2 r_{Cn} - I_0 r_{Bn} = 0.$$

Решив систему уравнений, найдем

$$I_1 = 110 \text{ А}; \quad I_0 = 0; \quad I_2 = -110 \text{ А}.$$

Отрицательная величина тока I_2 означает, что действительное направление этого тока противоположно принятому на рис. 261, *г*.

10.47. Найти разность потенциалов между точками A и B в цепи, изображенной на рис. 262. Э. д. с. источника равна $\mathscr{E}$ (внутренним сопротивлением источника пренебречь). Каков был бы заряд конденсатора емкостью C, включенного между точками A и B?

Примем потенциал точки O за нуль и найдем потенциал точки A. Конденсаторы $C1$ и $C2$ соединены последовательно, так что $U_1 + U_2 = \mathscr{E}$; $q_1 = q_2 = q$. Здесь U_1 и U_2 — падения напряжения на конденсаторах $C1$ и $C2$ соответственно; q_1, q_2 — заряды на конденсаторах.

Учитывая, что для первого и второго конденсаторов

$$q = C1U_1 = C2U_2,$$

находим

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}C2}{C1 + C2}.$$

Вследствие того что $U_1 = \varphi_A - \varphi_0$, имеем

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{E}C2}{C1 + C2}.$$

Теперь найдем потенциал точки B. Для второй ветви схемы

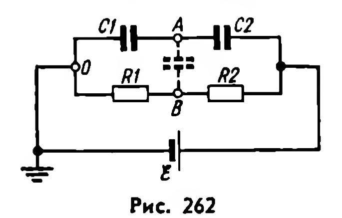


Рис. 262

$$U_2' + U_1' = \mathcal{E}; \quad \frac{U_1'}{U_2'} = \frac{R1}{R2}.$$

Следовательно,

$$U_1' = \frac{\mathcal{E}R1}{R1 + R2};$$

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{E}R1}{R1 + R2}.$$

Зная φ_A и φ_B, находим разность потенциалов

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathcal{E}C2}{C1 + C2} - \frac{\mathcal{E}R1}{R1 + R2} = \frac{\mathcal{E}(C2R2 - C1R1)}{(C1 + C2)(R1 + R2)}.$$

Заряд конденсатора, включенного между точками A и B, равен:

$$q = C(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{C\mathcal{E}(C2R2 - C1R1)}{(C1 + C2)(R1 + R2)}.$$

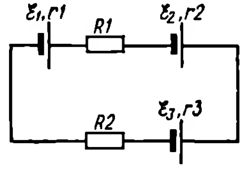


Рис. 263

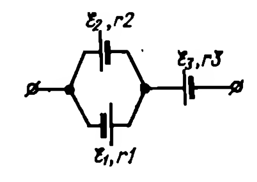


Рис. 264

10.48. В цепь (рис. 263) включены три источника э. д. с.: $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $r1 = 1$ Ом; $\mathcal{E}_2 = 20$ В, $r2 = 2$ Ом; $\mathcal{E}_3 = 15$ В, $r3 = 1{,}5$ Ом и резисторы $R1 = 4{,}5$ Ом и $R2 = 16$ Ом. Определить э. д. с. эквивалентного источника, действующего в цепи, его внутреннее сопротивление и ток в цепи.

Все три источника э. д. с. включены последовательно, так что э. д. с. эквивалентного источника равна алгебраической сумме э. д. с. отдельных источников:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = 15 \text{ В}.$$

В случае последовательного включения внутреннее сопротивление эквивалентного источника

$$r = r1 + r2 + r3 = 4{,}5 \text{ Ом}.$$

Ток в цепи определяется по закону Ома:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R1 + R2 + r} \doteq 0{,}6 \text{ А}.$$

10.49. Вычислить внутреннее сопротивление и э. д. с. батареи (рис. 264), если $\mathscr{E}_1 = 10$ В, $\mathscr{E}_2 = 20$ В, $\mathscr{E}_3 = 30$ В, $r1 = r2 = r3 = 2$ Ом.

Источники тока с э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ включены параллельно, следовательно, их общее внутреннее сопротивление

$$r1,2 = \frac{r1 r2}{r1 + r2} = 1 \text{ Ом}.$$

Внутреннее сопротивление всей батареи

$$r = r1,2 + r3 = 3 \text{ Ом}.$$

Значение результирующей э. д. с. $\mathscr{E}_{1,2}$ находим из выражения

$$\frac{\mathscr{E}_{1,2}}{r1,2} = -\frac{\mathscr{E}_1}{r1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r2},$$

откуда

$$\mathscr{E}_{1,2} = 5 \text{ В}.$$

Рис. 265

Э. д. с. всей батареи

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{1,2} + \mathscr{E}_3 = 35 \text{ В}.$$

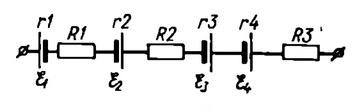


Рис. 266

10.50. Каково напряжение между любыми точками цепи, изображенной на рис. 265, *а* (э. д. с. каждого элемента — $\mathscr{E}_1$, внутреннее сопротивление — $r1$, сопротивлением подводящих проводов пренебречь)? Каков будет ответ, если элементы будут обращены друг к другу одноименными полюсами (рис. 265, *б*)?

По закону Ома ток в цепи

$$I = \frac{n\mathscr{E}_1}{nr1} = \frac{\mathscr{E}_1}{r1}.$$

Если в схеме *а* участок между выбранными точками содержит m элементов, то искомое напряжение

$$U = m\mathscr{E}_1 - mr1I = m\mathscr{E}_1 - m\mathscr{E}_1 = 0.$$

Для схемы *б* напряжение на участке, содержащем нечетное число элементов, будет равно э. д. с. одного элемента, а на участке, содержащем четное число элементов, напряжение будет равно нулю.

10.51. В батарее (рис. 266) $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $r1 = 2$ Ом, $\mathcal{E}_2 = 15$ В, $r2 = 1$ Ом; $\mathcal{E}_3 = 20$ В, $r3 = 3$ Ом; $\mathcal{E}_4 = 16$ В, $r4 = 1$ Ом; $R1 = 10$ Ом, $R2 = 8$ Ом, $R3 =$ Ом. Определить э. д. с. и внутреннее сопротивление батареи.

Э. д. с. батареи $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_1 = 41$ В.

Внутреннее сопротивление батареи $r = r1 + R1 + r2 + R2 + r3 + r4 + R3 = 20$ Ом.

10.52. Две лампы сопротивлениями R_1 и R_2 включены в сеть параллельно, $R_1 = 2R_2$. Какая из ламп поглощает большую мощность и во сколько раз?

Мощность, поглощаемая первой лампой, $P_1 = \dfrac{U^2}{R_1} = \dfrac{U^2}{2R_2}$, а второй лампой — $P_2 = \dfrac{U^2}{R_2}$. Отсюда:

$$P_2 = 2P_1.$$

10.53. Э. д. с. батарейки карманного фонаря $\mathcal{E} = 4{,}5$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 3$ Ом. Сколько таких батареек нужно соединить последовательно, чтобы питать лампу, рассчитанную на напряжение $U = 220$ В и мощность $P = 60$ Вт?

Лампа рассчитана на ток $I = P/U$ и ее сопротивление $R = U^2/P$. Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}n}{R + nr},$$

где $\mathcal{E}$ — э. д. с. батарейки; r — ее внутреннее сопротивление; n — число батареек. Отсюда

$$n = \frac{IR}{\mathcal{E} - Ir} = \frac{U}{\mathcal{E} - \dfrac{Pr}{U}} = 59.$$

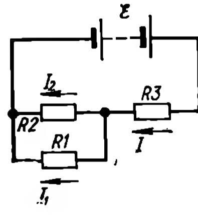


Рис. 267

10.54. На схеме (рис. 267) э. д. с. батареи элементов $\mathcal{E} = 120$ В, $R1 = 25$ Ом, $R2 = 100$ Ом, $R3 = 150$ Ом. Найти мощность, выделяющуюся на резисторе $R1$ (сопротивлением батареи пренебречь).

Значение тока через батарею найдем из закона Ома $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$, где R — общее сопротивление цепи. Его значение

$$R = R3 + \frac{R1R2}{R1 + R2} = \frac{R1R3 + R2R3 + R1R2}{R1 + R2}.$$

Резисторы $R1$ и $R2$ соединены параллельно, т. е.

$$\frac{R2}{R1} = \frac{I_1}{I_2}.$$

С другой стороны,

$$I = I_1 + I_2.$$

Отсюда получаем

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}R2}{R1R2 + R1R3 + R2R3}$$

и

$$P = I_1^2 R1 = \frac{\mathcal{E}^2 (R2)^2 R1}{(R1R2 + R2R3 + R1R3)^2} \approx 8 \text{ Вт}.$$

10.55. Две лампочки, рассчитанные на напряжение U и номинальные мощности P_1 и P_2, включены последовательно в сеть с тем же напряжением. Какие мощности будут потреблять лампочки?

Сопротивления лампочек равны соответственно

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1}; \quad R_2 = \frac{U^2}{P_2}.$$

При последовательном включении сила тока, протекающего через лампочки, одна и та же, а потребляемые лампочками мощности равны:

$$P_1' = I^2R_1; \quad P_2' = I^2R_2.$$

Согласно закону Ома

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2};$$

$$P_1' = \frac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2} = \frac{P_1P_2^2}{(P_1+P_2)^2};$$

$$P_2' = \frac{U^2R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{P_2P_1^2}{(P_1+P_2)^2}.$$

10.56. При замыкании на сопротивление R источник э. д. с. $\mathcal{E}$ дает ток I. Ток короткого замыкания источника — $I_{\text{макс}}$. Какую наибольшую полезную мощность может дать источник?

При замыкании на сопротивление R сила тока в цепи определяется как

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где $\mathcal{E}$ — э. д. с. источника; r — его внутреннее сопротивление.

Ток короткого замыкания

$$I_{\text{макс}} = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Для нахождения $\mathcal{E}$ вычислим $I_{\text{макс}}I = \mathcal{E}^2/(R + r)\,r$ и $I_{\text{макс}} - I = \mathcal{E}R/(R + r)\,r$ и разделим эти выражения одно на другое. При этом получим

$$\frac{II_{\text{макс}}}{I_{\text{макс}} - I} = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

откуда

$$\mathcal{E} = \frac{II_{\text{макс}}R}{I_{\text{макс}} - I}.$$

Пусть на внешнем сопротивлении R выделяется полезная мощность

$$P = I^2 R = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}. \qquad (*)$$

Отсюда

$$\mathscr{E}^2 R = P(R+r)^2$$

или

$$PR^2 + (2Pr - \mathscr{E}^2) R + Pr^2 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения находим

$$R = \frac{\mathscr{E}^2 - 2Pr \pm \mathscr{E}\sqrt{\mathscr{E}^2 - 4Pr}}{2P}.$$

Мы видим, что сопротивление R существует и обеспечивает требуемую мощность P при условии $\mathscr{E}^2 - 4Pr \geqslant 0$, или $P \leqslant \mathscr{E}^2/4r$. Очевидно, что $P_{макс} = \mathscr{E}^2/4r$. Сравнивая это выражение с (*) находим, что для того, чтобы $P = P_{макс}$, необходимо выполнение условия $\mathscr{E}^2 R/(R+r)^2 = \mathscr{E}^2/4r$, откуда $R = r$. При этом условии

$$P_{макс} = \frac{\mathscr{E}^2}{4R} = \frac{I^2 I_{макс}^2 R}{4(I_{макс} - I)^2}.$$

10.57. При поочередном замыкании аккумулятора на резисторы R_1 и R_2 в последних выделились равные количества теплоты. Найти внутреннее сопротивление аккумулятора.

Согласно закону Джоуля — Ленца

$$Q_1 = I_1^2 R_1 t = \frac{\mathscr{E}^2 R_1 t}{(R_1 + r)^2};$$

$$Q_2 = I_2^2 R_2 t = \frac{\mathscr{E}^2 R_2 t}{(R_2 + r)^2}.$$

Так как $Q_1 = Q_2$, то

$$\frac{\mathscr{E}^2 R_1 t}{(R_1+r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2 R_2 t}{(R_2+r)^2}; \quad \frac{R_1}{(R_1+r)^2} = \frac{R_2}{(R_2+r)^2}.$$

Отсюда

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

10.58. Электрическая плитка включена в цепь генератора с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r. Амперметр, включенный последовательно с плиткой, показывает силу тока I. Чему равен к. п. д. плитки, если воду с массой m на ней можно вскипятить за время τ? Начальная температура воды — t_0.

По закону Джоуля — Ленца количество теплоты, выделившееся в проводнике, $Q = I^2 R\tau$. Сила тока определяется по закону Ома: $I = \mathscr{E}/(R+r)$, откуда $R = (\mathscr{E} - Ir)/I$. Следовательно, $Q = I(\mathscr{E} - Ir)\tau$.

Теплота, затраченная на нагревание воды,

$$Q_п = mc(t - t_0),$$

где m — масса воды; c — удельная теплоемкость воды; t и t_0 — конечная и начальная температура воды.

Коэффициент полезного действия плитки

$$\eta = \frac{Q_{п}}{Q} = \frac{mc(t - t_0)}{I(\mathcal{E} - Ir)\tau}.$$

10.59. В цепь, состоящую из медного провода площадью поперечного сечения S_1, включен свинцовый предохранитель площадью поперечного сечения S_2. На какое повышение температуры проводов рассчитан этот предохранитель? Считать, что при коротком замыкании вследствие кратковременности процесса все выделяющееся тепло идет на нагревание цепи. Начальная температура — t_0.

Количество теплоты, затраченное на нагревание медного провода,

$$Q_1 = m_1 c_1 \Delta t = \delta_1 l_1 S_1 c_1 \Delta t,$$

где m_1 — масса меди; c_1 — ее удельная теплоемкость; l_1 — длина медного проводника; δ_1 — плотность меди; $\Delta t = t - t_0$; t — температура, до которой нагреется медный проводник.

Количество теплоты, идущее на нагревание и плавление свинцового предохранителя,

$$Q_2 = m_2 c_2 (t_{пл} - t_0) + m_2 \lambda = \delta_2 l_2 S_2 [c_2 (t_{пл} - t_0) + \lambda],$$

где m_2 — масса свинца; c_2 — его удельная теплоемкость; l_2 — длина предохранителя; δ_2 — плотность; λ — удельная теплота плавления; $t_{пл}$ — температура плавления свинца.

Так как провод и предохранитель включены в цепь последовательно, то сила тока, протекающего по ним, одна и та же, поэтому отношение теплот, выделяющихся в медном проводнике и свинцовом предохранителе,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{I^2 R_1 \tau}{I^2 R_2 \tau} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1 \dfrac{l_1}{S_1}}{\rho_2 \dfrac{l_2}{S_2}},$$

где τ — время протекания тока; ρ_1 и ρ_2 — удельные сопротивления меди и свинца соответственно.

С другой стороны,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\delta_1 l_1 S_1 c_1 \Delta t}{\delta_2 l_2 S_2 [c_2 (t_{пл} - t_0) + \lambda]},$$

так что

$$\frac{\delta_1 l_1 S_1 c_1 \Delta t}{\delta_2 l_2 S_2 [c_2 (t_{пл} - t_0) + \lambda]} = \frac{\rho_1 l_1 S_2}{\rho_2 l_2 S_1}$$

и

$$\Delta t = \frac{\rho_1 \delta_2 S_2^2 [c_2 (t_{пл} - t_0) + \lambda]}{\rho_2 \delta_1 S_1^2 c_1}.$$

10.60. Нагреватель электрического чайника имеет две обмотки. При включении одной из них вода закипает через промежуток вре-

мени τ_1, при включении другой — через τ_2. Через сколько времени закипит вода, если включить обе обмотки: последовательно; параллельно?

Пусть Q — количество теплоты, необходимое для нагревания воды до кипения. Если включена первая обмотка,

$$Q = \frac{U^2}{R_1}\tau_1,$$

где U — напряжение сети; R_1 — сопротивление первой обмотки.

Если включена вторая обмотка,

$$Q = \frac{U^2}{R_2}\tau_2,$$

где R_2 — сопротивление второй обмотки.

При последовательном соединении обмоток их общее сопротивление $R = R_1 + R_2$ и

$$Q = \frac{U^2}{R_1 + R_2}\tau_3,$$

где τ_3 — время, необходимое для нагревания при последовательном включении обмоток.

При параллельном соединении общее сопротивление обмоток $R' = R_1R_2/(R_1 + R_2)$ и

$$Q = \frac{U^2(R_1 + R_2)}{R_1R_2}\tau_4,$$

где τ_4 — время, необходимое для нагревания при параллельном включении обмоток.

Из первых двух уравнений получаем

$$R_1 = \frac{U^2\tau_1}{Q}; \quad R_2 = \frac{U^2\tau_2}{Q}.$$

Подставляя эти выражения в формулы, содержащие τ_3 и τ_4, находим

$$\tau_3 = \tau_1 + \tau_2; \quad \tau_4 = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$

10.61. Чему равно сопротивление линии от генератора с напряжением U, если при коротком замыкании предохранители из свинцовой проволоки сечением S и длиной l плавятся за время τ (начальная температура — t_0)?

Количество теплоты, необходимое, чтобы предохранитель расплавился,

$$Q_1 = mc(t_{пл} - t_0) + m\lambda = \delta lS\,[c(t_{пл} - t_0) + \lambda],$$

где m — масса свинца; c — его удельная теплоемкость; λ — удельная теплота плавления свинца; $t_{пл}$ — температура плавления свинца; δ — плотность свинца.

Количество теплоты, выделяющееся в предохранителе при протекании по нему тока,

$$Q_2 = \frac{U_1^2}{R_1}\tau,$$

где U_1 — падение напряжения на предохранителе; $R_1 = \rho l/S$ — сопротивление предохранителя (ρ — удельное сопротивление свинца).

Если считать, что все тепло, выделившееся в проводнике, идет на его нагревание и плавление, то $Q_1 = Q_2$, т. е.

$$\delta l S\,[c\,(t_{пл} - t_0) + \lambda] = \frac{U_1^2 S}{\rho l}\,\tau,$$

откуда

$$U_1 = \sqrt{\frac{\delta l^2 \rho\,[c\,(t_{пл} - t_0) + \lambda]}{\tau}}.$$

При последовательном соединении $U_1/U_2 = R_1/R_2$, где U_2 — падение напряжения на подводящих проводах; R_2 — их сопротивление. Отсюда

$$R_2 = \frac{U_2 R_1}{U_1} = \frac{(U - U_1)\,R_1}{U_1} = \left(\frac{U}{U_1} - 1\right) R_1 =$$

$$= \left[U \sqrt{\frac{\tau}{\delta l^2 \rho\,[c\,(t_{пл} - t_0) + \lambda]}} - 1\right] \rho \frac{l}{S}.$$

10.62. За какое время при электролизе водного раствора хлорной меди $CuCl_2$ на катоде выделится 4,74 г меди (сила тока — 2 А)?

Согласно закону Фарадея

$$m = \frac{1}{F}\,\frac{A}{n}\,It,$$

где m — масса вещества, выделившегося на катоде; F — число Фарадея; A — атомная масса; n — валентность вещества; I — сила тока; t — время протекания тока. Отсюда

$$t = \frac{mFn}{IA} = 7200 \text{ с} = 2 \text{ ч}.$$

10.63. Две электролитические ванны с растворами $FeCl_3$ и $CuSO_4$ соединены последовательно. Сколько меди выделится за время, в течение которого выделилось железо с массой m_1?

Если электролитические ванны соединены последовательно, то через них текут одинаковые токи, и количества электричества, прошедшие через каждую из ванн, будут равны.

Следовательно,

$$m_1 = \frac{1}{F}\,\frac{A_1}{n_1} q;$$

$$m_2 = \frac{1}{F}\,\frac{A_2}{n_2} q$$

и

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1 n_2}{A_2 n_1},$$

т. е.

$$m_2 = m_1 \frac{A_2 n_1}{A_1 n_2},$$

где m_2 — масса меди; A_2, n_2 — атомная масса и валентность меди; A_1 и n_1 — атомная масса и валентность железа. Подставив численные значения, имеем

$$m_2 = m_1 \frac{64 \cdot 3}{56 \cdot 2} \approx 1{,}71 m_1.$$

10.64. При какой плотности тока в растворе FeCl толщина выделяющегося железа растет со скоростью v?

Масса выделяющегося железа

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{n} It = \delta l S,$$

где δ — плотность железа; l — толщина слоя; S — площадь электрода.

Из приведенного уравнения

$$j = \frac{I}{S} = \frac{\frac{l}{t}\delta F n}{A} = \frac{v\delta F n}{A}.$$

10.65. Через раствор медного купороса пропускают ток, изменяющийся по линейному закону $I = (10 - 0{,}02t)$ А. Сколько меди выделится на катоде через 200 с после того, как ток начнет изменяться?

В момент времени $t_0 = 0$ $I_0 = 10$ А;

в момент времени $t_1 = 200$ с $I = 6$ А.

Так как сила тока меняется линейно, то за время t_1 ее среднее значение $I_{ср} = (I_0 + I)/2$ и количество протекшего электричества $q = (I_0 + I)\, t_1/2 = 1600$ Кл.

Рис. 268

Соответствующий график приведен на рис. 268. Количество электричества изображается площадью заштрихованной фигуры, представляющей собой трапецию:

$$q = \frac{I_0 + I}{2} t_1 = 1600 \text{ Кл}.$$

Масса меди, выделившейся на катоде, $m = kq$, где k — электрохимический эквивалент меди. Отсюда

$$m = 0{,}5k\,(I_0 + I)\, t_1 = 0{,}528 \text{ г}.$$

10.66. Амперметр, включенный последовательно с электролитической ванной с раствором $AgNO_3$, показывает силу тока $I_a = 0{,}90$ А. Верны ли показания амперметра, если за 10 мин прохождения тока выделилось 0,632 г серебра?

Для того чтобы за время t выделилась масса m вещества, необходима сила тока

$$I = \frac{m}{kt} = \frac{mFn}{At} = 0{,}94 \text{ А},$$

где F — число Фарадея; A — атомная масса серебра; n — его валентность.

Следовательно, показания амперметра на $\Delta I = I - I_a = 0{,}04$ А меньше действительной силы тока.

10.67. При электролизе раствора $AgNO_3$ в течение $t = 0{,}5$ ч выделилось $m = 4{,}8$ г серебра. Определить э. д. с. поляризации $\mathcal{E}_{пол}$, если напряжение на зажимах ванны $U = 4{,}6$ В, а сопротивление ванны $R = 1{,}6$ Ом.

Согласно закону Фарадея $I = m/kt$. Известно, что э. д. с. поляризации направлена против основной э. д. с. Поэтому в данном случае закон Ома может быть представлен в виде

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_{пол}}{R}.$$

Таким образом,

$$\frac{m}{kt} = \frac{U - \mathcal{E}_{пол}}{R}$$

и

$$\mathcal{E}_{пол} = \frac{ktU - mR}{kt} = U - \frac{m}{kt} R = 0{,}77 \text{ В}.$$

10.68. К. п. д. аккумулятора, замкнутого на некоторое сопротивление, — η_1. Каким будет к. п. д. η_2, если вместо этого аккумулятора соединить два аккумулятора параллельно?

Полезная мощность, выделяемая при работе аккумулятора, $P_п = I^2R$, где R — внешнее сопротивление.

Полная мощность $P = \mathcal{E}I = I^2(R + r)$, где r — внутреннее сопротивление аккумулятора. Согласно условию

$$\eta_1 = \frac{I^2R}{I^2(R + r)} = \frac{R}{R + r},$$

откуда $R = r\eta_1/(1 - \eta_1)$.

Общая э. д. с. двух параллельно соединенных одинаковых аккумуляторов равна э. д. с. каждого из них, а внутреннее сопротивление $r' = r/2$. Таким образом,

$$\eta_2 = \frac{R}{R + 0{,}5r} = \frac{\eta_1}{0{,}5(\eta_1 + 1)}.$$

10.69. Первый аккумулятор имеет к. п. д. η_1, второй, замкнутый на такое же сопротивление, — η_2. Каким будет к. п. д., если замкнуть на это сопротивление оба аккумулятора, соединенные последовательно?

Из равенств (см. задачу 10.68)

$$\frac{R}{R + r_1} = \eta_1; \quad \frac{R}{R + r_2} = \eta_2,$$

где R — внешнее сопротивление; r_1, r_2 — внутренние сопротивления первого и второго аккумуляторов соответственно, получаем

$$r_1 = \frac{R(1 - \eta_1)}{\eta_1}; \quad r_2 = \frac{R(1 - \eta_2)}{\eta_2},$$

откуда

$$\eta = \frac{R}{R + r_1 + r_2} = \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}.$$

11. Электромагнетизм и переменный ток

Закон Био — Савара — Лапласа. Всякий электрический ток создает магнитное поле. Интенсивность магнитного поля в данной точке характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Величина и направление этого вектора определяются законом Био — Савара — Лапласа (рис. 269):

$$\Delta B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi r^2} I \Delta l \sin\alpha.$$

Здесь ΔB — магнитная индукция в точке A, создаваемая током I, протекающим через элемент провода длиной Δl; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ом · с

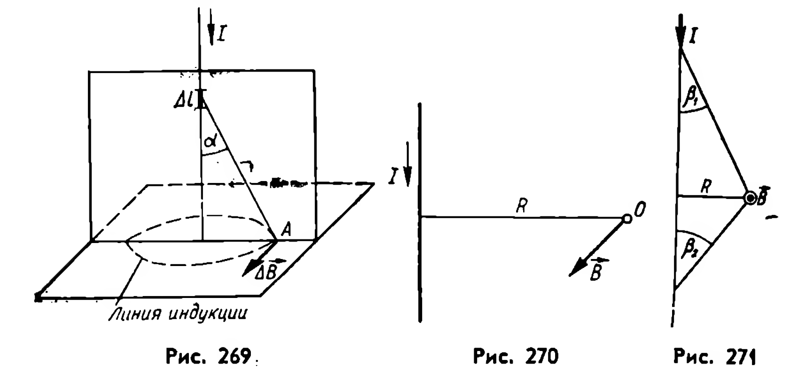


Рис. 269 Рис. 270 Рис. 271

или Г/м (см. ниже) — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды; r — радиус-вектор, соединяющий элемент Δl с точкой A, в которой вычисляется индукция; α — угол между направлением тока в элементе и радиус-вектором r.

Вектор $\Delta\vec{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат элемент Δl и радиус-вектор $\vec{r}$. Его направление определяется по правилу буравчика (если последний ввинчивать в направлении тока).

Единица магнитной индукции — 1 В · с/м² = 1 Вб/м² = 1 Т. Так как тесла — крупная единица, иногда пользуются единицей гаусс (Гс), 1 Гс = 10^{-4} Т = 10^{-4} Вб/м².

Если индукция в данной точке поля создается несколькими токами, то результирующая индукция $\vec{B}$ равна геометрической сумме индукций, создаваемых каждым током в отдельности (принцип наложения полей).

Магнитная индукция бесконечного прямого тока (рис. 270)

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R},$$

где R — расстояние от проводника до точки, в которой определяется индукция.

Магнитная индукция, создаваемая током I, текущим в прямолинейном проводнике конечной длины (рис. 271),

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} (\cos\beta_1 + \cos\beta_2).$$

Магнитная индукция в центре кольцевого тока

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R},$$

где R — радиус кольца.

Магнитная индукция на оси длинного прямого соленоида вдали от его концов (при условии $l \gg R$, где l — длина намотки; R — радиус витка),

$$B = \mu\mu_0 In,$$

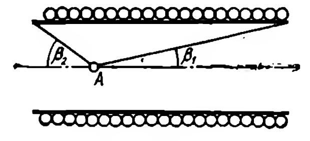


Рис. 272

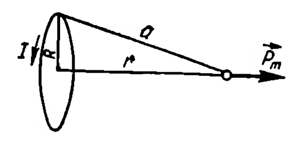


Рис. 273

где n — число витков на единицу длины намотки. Произведение In иногда называется числом ампервитков на единицу длины намотки или намагничивающей силой.

Магнитная индукция на средней линии внутри замкнутого (например, кольцевого) соленоида с равномерной намоткой

$$B = \mu\mu_0 In.$$

Магнитная индукция на оси прямого соленоида вблизи его концов (рис. 272) равна приближенно

$$B = \frac{\mu\mu_0 In}{2} (\cos\beta_1 + \cos\beta_2).$$

Магнитная индукция кольцевого тока в точке на оси кольца (рис. 273)

$$B = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2a^3} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi (R^2 + r^2)^{3/2}} p_m,$$

где S — площадь, обтекаемая током; $p_m = IS$ — магнитный момент контура с током, вектор, направление которого определяется по правилу буравчика.

Если приближенно считать, что орбиты электронов в атоме представляют собой кольцевые токи, то их можно характеризовать векторами орбитальных магнитных моментов. Сам электрон, кроме того, обладает собственным магнитным моментом. Геометрическая сумма всех орбитальных и собственных магнитных моментов образует магнитный момент электронной оболочки атома. В свою очередь, векторная

сумма этого момента и магнитного момента ядра дает магнитный момент атома.

Индукция поля движущейся заряженной частицы с зарядом q:

$$B = \frac{\mu\mu_0 qv \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где v — скорость частицы; r — расстояние от частицы до точки, где определяется индукция; α — угол между направлением скорости и прямой, проведенной от частицы в данную точку поля.

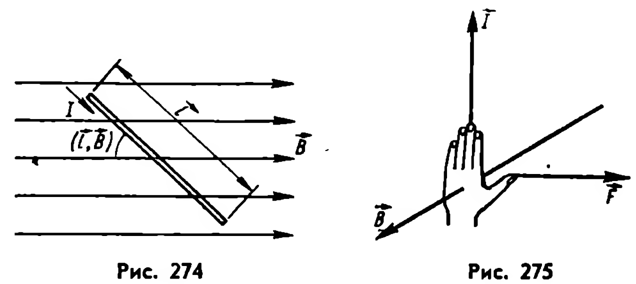


Рис. 274 Рис. 275

Магнитный поток. Поток Φ вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через площадку S равен произведению составляющей этого вектора B_n, нормальной к площадке, на величину площадки:

$$\Phi = B_n S = BS \cos(\vec{B}, \vec{n}),$$

где вектор $\vec{n}$ — нормаль к площадке. Очевидно, что $\Phi = \Phi_{\text{макс}} = BS$, когда вектор индукции $\vec{B}$ перпендикулярен к площадке.

Единицей магнитного потока является вольт-секунда, или вебер (Вб). Применяется также более мелкая единица — максвелл, равная 10^{-8} Вб.

Закон Ампера. Всякое магнитное поле оказывает воздействие на ток. Сила, с которой магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ воздействует на прямой проводник длиной l, в котором течет ток I, равна (рис. 274)

$$\vec{F} = I\left[\vec{l} \times \vec{B}\right] \text{ или } F = IlB\sin\left(\vec{l}, \vec{B}\right).$$

Очевидно, что $F = F_{\text{макс}}$, когда проводник l перпендикулярен к $\vec{B}$.

Направление силы $\vec{F}$ определяется по правилу левой руки: если расположить левую руку так, чтобы вектор магнитной индукции $\vec{B}$ входил в ладонь (рис. 275), а четыре вытянутых пальца совпадали с направлением тока, то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на проводник.

Сила Лоренца. Сила, действующая на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$,

$$\vec{F} = q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right] \text{ или } F = qvB\sin\left(\vec{v}, \vec{B}\right).$$

Взаимодействие между параллельными проводами с токами. Сила взаимодействия между двумя параллельными проводниками длиной l с токами I_1 и I_2, расстояние между которыми равно a ($l \gg a$),

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}$$

и направлена перпендикулярно проводникам.

Сила, действующая на единицу длины провода в вакууме,

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{a}.$$

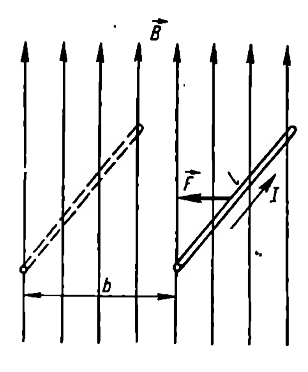


Рис. 276

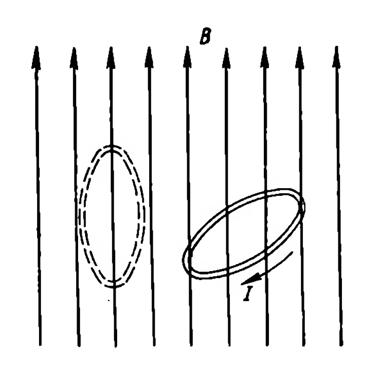


Рис. 277

Вращающий момент. На плоский контур площадью S, обтекаемый током I и помещенный в магнитное поле с индукцией B так, что угол между нормалью к плоскости контура и направлением вектора $\vec{B}$ равен α, действует момент силы

$$M = ISB \sin\alpha = p_m B \sin\alpha,$$

стремящийся повернуть контур так, чтобы его плоскость была перпендикулярна к $\vec{B}$.

Работа электромагнитных сил. На прямолинейный провод длиной l с током I, расположенный в магнитном поле с индукцией B, направленной перпендикулярно к l, действует электромагнитная сила $F = IlB$ (рис. 276). Если этот провод переместится на расстояние b в направлении силы, то совершенная при этом работа A будет равна произведению силы тока на пересеченный магнитный поток:

$$A = Fb = IlBb = IBS = I\Phi.$$

Работа, совершаемая при перемещении контура с током в магнитном поле (рис. 277),

$$A = \pm I(\Phi_2 - \Phi_1) = \pm I\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ — разность потоков сквозь контур в конце и в начале движения соответственно.

Если контур движется под действием сил поля, то приращение $\Delta\Phi$ всегда положительно, т. е. силы поля стремятся увеличить поток через контур. Если же приращение отрицательно, то это может произойти только под действием внешних сил.

Закон электромагнитной индукции Фарадея. При любом изменении магнитного потока, пронизывающего контур, в последнем возникает электродвижущая сила индукции

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Значение э. д. с., возникающей на концах проводника длиной l, движущегося в магнитном поле с индукцией B со скоростью v,

$$\mathscr{E} = Blv \sin\alpha,$$

где α — угол между направлениями векторов $\vec{B}$ и $\vec{v}$. Э. д. с. индукции достигает наибольшей величины, когда $\vec{v}$ перпендикулярна к $\vec{B}$.

Направление э. д. с. индукции определяется в данном случае по правилу правой руки: если расположить правую руку так, чтобы вектор магнитной индукции $\vec{B}$ входил в ладонь (рис. 278), а отогнутый большой палец направить вдоль вектора скорости, то четыре вытянутых пальца укажут направление э. д. с., а если концы проводника замкнуть,— то и тока.

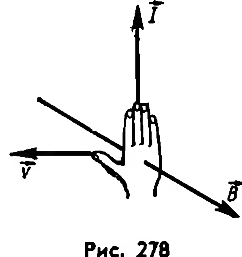


Рис. 278

Э. д. с. индукции, возникающая не в отдельном проводе, а в замкнутом контуре, например витке, вращающемся в магнитном поле, также определяется по вышеприведенной формуле: $\mathscr{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$. Если вращается катушка из N витков, то $\mathscr{E} = -N\Delta\Phi/\Delta t$. Э. д. с. индукции возникает не только в движущемся контуре, но и в неподвижном витке, пронизываемом изменяющимся магнитным потоком (например, в обмотке трансформатора переменного тока).

Э. д. с. самоиндукции. Индуктивность. Если магнитный поток создается переменным током, текущим в самом рассматриваемом контуре (т. е. пронизывает свой же контур), в нем создается э. д. с. самоиндукции. Магнитный поток Φ, пронизывающий контур, пропорционален току I в контуре:

$$\Phi = LI; \quad \mathscr{E}_c = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где L — коэффициент самоиндукции, или индуктивность контура. Единица индуктивности называется генри (Г). Это индуктивность такого контура, в котором при изменении силы тока со скоростью 1 А/с возникает э. д. с. самоиндукции, равная 1 В.

Закон Ленца. Индукционный ток имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызвавшего этот ток. Поэтому при возрастании тока в контуре э. д. с. самоиндукции отрицательна, т. е. направлена навстречу току контура. При уменьшении тока в контуре э. д. с. самоиндукции положительна, т. е. имеет то же направление, что и

ток контура. Таким образом, индуктивность тормозит процессы возрастания и спадания тока (что приводит к отставанию тока от напряжения при наличии в контуре индуктивности).

Значение индуктивности L контура зависит от формы и размеров последнего, а также от свойств окружающей среды. Индуктивность длинного соленоида длиной l с сечением витка S приближенно равна

$$L \approx \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l},$$

где N — число витков соленоида.

Взаимоиндукция. Если две катушки расположены близко друг к другу, то часть магнитного потока первой из катушек $\Phi_{1,2}$ пронизывает витки второй, и наоборот, часть магнитного потока второй катушки $\Phi_{2,1}$ пронизывает витки первой. Так как магнитные потоки пропорциональны токам, то $\Phi_{1,2} = L_{1,2} I_1$; $\Phi_{2,1} = L_{2,1} I_2$, причем $L_{1,2} = L_{2,1} = M$. Величина M называется коэффициентом взаимной индукции и измеряется в генри (Г).

Коэффициент взаимоиндукции двух однослойных катушек одинаковой длины l, намотанных одна поверх другой и насаженных на замкнутый ферромагнитный сердечник (или равномерно намотанных на тороидальный сердечник), равен

$$M = \mu\mu_0 n_1 n_2 S l,$$

где n_1, n_2 — число витков на единицу длины каждой катушки; S — среднее сечение витка.

Энергия магнитного поля контура

$$W = \frac{I\Phi}{2} = \frac{LI^2}{2}.$$

Энергия двух контуров при наличии взаимоиндукции

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2.$$

Подъемная сила электромагнита (максимальная)

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \approx 4 \cdot 10^5 B^2 S,$$

где B — в Т; S — в м^2 (S — суммарное сечение всех полюсов электромагнита).

Переменный ток. При равномерном вращении контура в однородном магнитном поле с угловой скоростью ω на его концах создается переменная э. д. с.

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{макс}} \sin \omega t,$$

где

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Здесь ν — частота; T — период вращения.

Если к концам контура присоединить нагрузку, то под действием переменного напряжения $u = U_{\text{макс}} \sin \omega t$ на ее зажимах через нагрузку потечет переменный ток той же частоты ν.

При чисто активной (омической) нагрузке $Z = R$ ток через нагрузку

$$i = I_{\text{макс}} \sin \omega t.$$

При чисто индуктивной нагрузке $Z = X_L = \omega L$ ток через нагрузку

$$i = I_{\text{макс}} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

т. е. отстает от напряжения на $\pi/2$.

При чисто емкостной нагрузке $Z = X_C = 1/\omega C$ ток через нагрузку

$$i = I_{\text{макс}} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

т. е. опережает напряжение на $\pi/2$.

При смешанной нагрузке полное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

В этом случае ток через нагрузку может либо отставать, либо опережать по фазе напряжение на величину $\varphi < \pi/2$, зависящую от соотношения между индуктивной и емкостной нагрузками. Для вычисления φ можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R},$$

где

$$X = \sum X_L - \sum X_C; \quad R = \sum R_i.$$

Мощность переменного тока. Активная мощность (способная превращаться в тепло) в случае смешанной нагрузки

$$P = IU \cos \varphi,$$

где U и I — действующие (эффективные) значения напряжения и тока, равные соответственно $U_{\text{макс}}/\sqrt{2}$ и $I_{\text{макс}}/\sqrt{2}$; φ — сдвиг фазы между током и напряжением.

11.1. По двум бесконечно длинным параллельным проводникам, расстояние между которыми — l, в одном направлении текут токи I_1 и I_2. Определить индукцию магнитного поля в точке A, лежащей на продолжении прямой, соединяющей проводники, и отстоящей на расстоянии s от второго проводника (рис. 279). Считать, что оба проводника расположены в вакууме.

Индукция магнитного поля в точке A

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ — векторы индукции магнитного поля первого и второго проводников. Вследствие того, что $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены в одну сторону, векторная сумма может быть заменена арифметической суммой

$$B = B_1 + B_2.$$

По закону Био — Савара — Лапласа напряженность магнитного поля, создаваемого текущим по бесконечному прямолинейному проводнику током I,

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

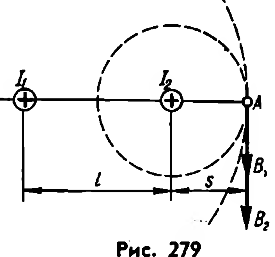


Рис. 279

где μ — магнитная проницаемость среды; μ_0 — магнитная постоянная; r — расстояние до проводника (для вакуума $\mu = 1$). В точке A индукция поля, создаваемого током I_1,

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi(l+s)},$$

током I_2,

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi s}.$$

Полная индукция

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{I_1}{l+s} + \frac{I_2}{s}\right].$$

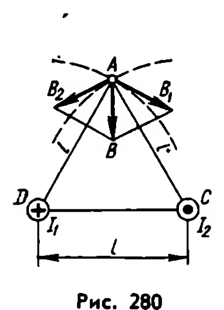


Рис. 280

Рис. 281

11.2. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии l друг от друга. По проводникам текут токи $I_1 = I_2 = I$ в противоположных направлениях. Найти модуль и направление индукции магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии l от каждого проводника (рис. 280).

Индукция магнитного поля в точке A

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ — векторы индукции магнитных полей, создаваемых токами I_1 и I_2. Модуль индукции B можно найти по формуле

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$.

Так как вектор индукции $\vec{B}$ направлен по касательной к магнитной силовой линии (являющейся в данном случае окружностью с центром на оси проводника), то $\vec{B}_1 \perp AD$, $\vec{B}_2 \perp AC$. Треугольник ADC — равносторонний, следовательно, $\alpha = 120°$ и

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - B_1B_2.$$

Индукция магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током определяется по формуле (принимая $\mu = 1$)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2},$$

где r — расстояние от проводника. По условию задачи $r_1 = r_2 = l$, $I_1 = I_2 = I$, следовательно,

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}$$

и

$$B^2 = B_1^2;$$

$$B = B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}.$$

11.3. Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг к другу и находятся в одной плоскости. Найти индукцию магнитного поля в точках A и K (рис. 281), если $OC = OD = AO_1 = O_1K = l_1$; $AC = KD = l_2$; по проводникам текут токи I_1 и I_2; $\mu = 1$.

В точке K:

$$B_K = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi l_1} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi l_2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{l_1} - \frac{I_2}{l_2}\right).$$

В точке A:

$$B_A = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{l_1} + \frac{I_2}{l_2}\right).$$

11.4. Ток силой I, протекая по проволочному кольцу из медной проволоки сечением S, создает в центре кольца индукцию магнитного поля, равную B. Какова разность потенциалов между концами проволоки, образующей кольцо?

По закону Ома для участка цепи $U = IR$, где $R = \rho \frac{l}{S}$ — сопротивление проводника. Отсюда

$$U = I\rho \frac{l}{S},$$

где l — длина окружности кольца. Радиус этой окружности $r = \frac{l}{2\pi}$.

Согласно закону Био — Савара — Лапласа индукция поля в центре кругового тока

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu\mu_0 I 2\pi}{2l} = \frac{\mu\mu_0 \pi I}{l},$$

откуда

$$l = \frac{\mu\mu_0 \pi I}{B}.$$

Подставив значение l в формулу для U, найдем

$$U = \frac{\mu\mu_0 \pi I^2 \rho}{BS}.$$

11.5. По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника, течет ток I. Стороны прямоугольника равны a и b. Какова индукция магнитного поля в точке пересечения диагоналей прямоугольника (рис. 282)?

Индукция магнитного поля в центре прямоугольника равна сумме индукций, создаваемых в этой точке каждым прямолинейным током:

$$B_O = 2B_1 + 2B_2,$$

где B_1 и B_2 — индукции, создаваемые токами проводников длиной a и b.

Индукция поля, создаваемая током в отрезке проводника конечной длины,

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2),$$

где r — расстояние от проводника.

Из условия задачи следует, что концы проводника расположены симметрично относительно точки, в которой определяется магнитная индукция, следовательно,

$$\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 = \cos\varphi; \quad B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \cos\varphi.$$

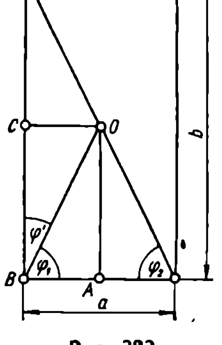


Рис. 282

Итак,

$$B_1 = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} \frac{I}{b/2} \cos\varphi_1;$$

$$B_2 = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} \frac{I}{a/2} \cos\varphi'.$$

Из треугольников ABO и BOC:

$$\cos\varphi_1 = \frac{AB}{BO} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\cos\varphi' = \frac{BC}{BO} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Таким образом,

$$B_O = \frac{2\mu\mu_0}{\pi}\left[\frac{Ia}{b\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{Ib}{a\sqrt{a^2+b^2}}\right] = \frac{2\mu\mu_0 I\sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab}.$$

11.6. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока, проводнику придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась индукция в центре контура (рис. 283)?

Магнитная индукция в центре кругового тока

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2}\frac{I}{R},$$

где R — радиус кольца.

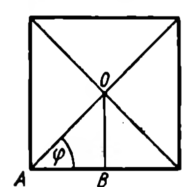


Рис. 283

Так как длина окружности кольца равна $2\pi R$, то сторона квадрата

$$a = \frac{\pi R}{2}.$$

Магнитная индукция в центре квадрата равна сумме индукций, создаваемых каждой стороной,

$$B_2 = 4B_O,$$

где B_O — индукция поля, создаваемого в точке O током в отрезке проводника, равном длине стороны квадрата. Вследствие симметрии

$$B_O = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a/2}2\cos 45° = \frac{\mu\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi^2 R};$$

$$B_2 = 4B_O = \frac{4\mu\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi^2 R};$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4\mu\mu_0 I\sqrt{2}\cdot 2R}{\pi^2 R I\mu\mu_0} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} = 1,14.$$

11.7. Длинный прямой соленоид намотан из проволоки диаметром $d = 0,5$ мм так, что витки плотно прилегают друг к другу. Какова индукция магнитного поля внутри соленоида при силе тока $I = 5$ А?

Индукция магнитного поля соленоида на его оси

$$B = \mu\mu_0 nI,$$

где n — число витков на единицу длины соленоида, $n = 1/d$. Следовательно,

$$B = \mu\mu_0\frac{I}{d} = 12,56\cdot 10^{-3}\ \text{Т}.$$

11.8. На проволочный виток радиусом $r = 10$ см, помещенный между полюсами магнита, действует максимальный механический момент $M = 13\cdot 10^{-6}$ Н · м. Сила тока в витке $I = 4$А. Определить индукцию $\vec{B}$ поля между полюсами магнита.

Механический момент, действующий на виток с током в магнитном поле,

$$M = p_м B\sin\alpha,$$

где $p_м = IS$ — магнитный момент витка с током (I — сила тока; S — площадь витка); B — индукция магнитного поля; α — угол между направлением индукции магнитного поля и нормали к плоскости витка.

Если учесть, что механический момент максимален при $\alpha = \pi/2$, то $M_{макс} = IBS$.

Отсюда, учитывая, что $S = \pi r^2$, находим

$$B = \frac{M_{макс}}{\pi r^2 I} = 1{,}04 \cdot 10^{-4} \text{ Т}.$$

11.9. По длинному вертикальному проводнику сверху вниз течет ток $I = 10$ А. На каком расстоянии от проводника индукция поля, получающегося от сложения земного магнитного поля и поля тока, направлена вертикально вверх (горизонтальная составляющая магнитного поля Земли $B_{Земли} = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$ Т)?

Результирующее поле будет направлено вертикально вверх, если поле тока скомпенсирует горизонтальную составляющую магнитного поля Земли. Так как

$$B_{тока} = B_{Земли} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r},$$

где r — расстояние до точки, в которой определяется индукция, то

$$r = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi B_{Земли}} = 0{,}1 \text{ м}.$$

11.10. На расстоянии $r = 10^{-9}$м от траектории прямолинейно движущегося электрона максимальное значение магнитной индукции $B_{макс} = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ Т. Определить скорость электрона.

Индукцию магнитного поля движущегося заряда Δq можно найти из закона Био — Савара — Лапласа:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l \sin\alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu\mu_0 \frac{\Delta q}{\Delta t} \Delta l \sin\alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu\mu_0 \Delta q v \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где Δq — заряд; v — скорость движения заряда; r — расстояние от заряда до точки, в которой определяется величина индукции; α — угол между направлением скорости и прямой, соединяющей заряд и рассматриваемую точку поля.

Максимальное значение индукции будет при $\alpha = \pi/2$, т. е. при $\sin\alpha = 1$.

$$B_{макс} = \frac{\mu\mu_0 \Delta q v}{4\pi r^2}; \quad \Delta q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Отсюда

$$v = \frac{4\pi r^2 B_{макс}}{\mu\mu_0 e} = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

11.11. Из проволоки длиной l сделаны три контура: квадратный, круговой и в виде равностороннего треугольника. Найти вращающие моменты, действующие на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле, индукция которого равна B. По проводнику течет ток I.

Плоскость каждого контура составляет угол β с направлением магнитного поля.

Вращающий момент, действующий на замкнутый контур с током,

$$M = BIS \sin \alpha, \qquad (1)$$

где S — площадь контура; α — угол между направлением магнитного поля и нормалью к плоскости контура.

Если плоскость контура составляет угол β с направлением магнитного поля, то угол между нормалью к плоскости и направлением магнитного поля $\alpha = 90° - \beta$ и $\sin \alpha = \cos \beta$.

Если периметр квадрата равен l, то его сторона равна $l/4$, следовательно, площадь квадратного контура

$$S_1 = \frac{l^2}{16}.$$

Площадь кругового контура

$$S_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 = \frac{l^2}{4\pi}.$$

Площадь треугольного контура

$$S_3 = \frac{l^2 \sqrt{3}}{36}.$$

Вращающие моменты для каждого из контуров равны соответственно

$$M_1 = \frac{1}{16} BIl^2 \cos \beta;$$

$$M_2 = \frac{1}{4\pi} BIl^2 \cos \beta;$$

$$M_3 = \frac{\sqrt{3}}{36} BIl^2 \cos \beta.$$

Рис. 284

11.12. В центре вертикально расположенного витка радиуса R находится магнитная стрелка, установленная в горизонтальной плоскости. При отсутствии тока в контуре стрелка лежит в плоскости витка. Если по витку пропускают ток I, стрелка поворачивается на угол α. Определить горизонтальную составляющую магнитного поля Земли.

В отсутствие тока в контуре стрелка устанавливается вдоль горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли, следовательно, горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B_З$ расположена в плоскости витка. Индукция магнитного поля кольцевого тока $B_т$ расположена в плоскости, перпендикулярной плоскости витка, в данном случае перпендикулярно к вектору $B_З$ (рис. 284). В случае, когда по кольцу течет ток, магнитная стрелка устанавливается вдоль направления результирующей индукции обоих полей.

Таким образом,

$$B_З = B_т \operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{I}{R} \operatorname{tg} \alpha.$$

11.13. Два прямолинейных параллельных проводника длиной 1 м каждый находятся в вакууме на расстоянии 20 см друг от друга. По ним текут токи $I_1 = 40$ А и $I_2 = 30$ А в одном направлении. Какова сила притяжения между проводниками?

Сила взаимодействия между проводниками с током определяется по формуле

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d},$$

где l — длина проводника; d — расстояние между проводниками.

Для вакуума $\mu = 1$, следовательно,

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

11.14. По трем параллельным прямолинейным проводникам 1, 2, 3, расположенным в вакууме на расстояниях a друг от друга, текут токи I_1, I_2, I_3. В проводниках *1* и *2* направления токов совпадают. Найти силу, действующую на единицу длины каждого проводника (рис. 285).

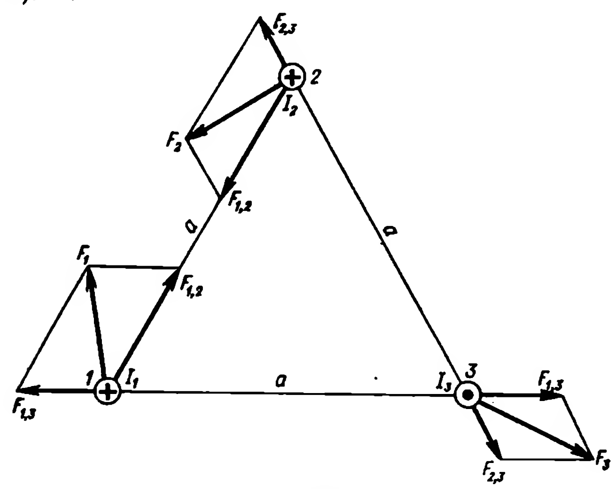


Рис. 285

Проводники *1* и *2* притягиваются друг к другу с силой

$$F_{1,2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}.$$

Проводники *1* и *3* и проводники *2* и *3* соответственно отталкиваются друг от друга с силами

$$F_{1,3} = \frac{\mu_0 I_1 I_3 l}{2\pi a};$$

$$F_{2,3} = \frac{\mu_0 I_2 I_3 l}{2\pi a}.$$

Равнодействующие сил, приложенных к каждому из проводников, определяются путем векторного сложения, как показано на рисунке. Их модули равны соответственно

$$F_1 = \sqrt{F_{1,2}^2 + F_{1,3}^2 - F_{1,2}F_{1,3}};$$

$$F_2 = \sqrt{F_{1,2}^2 + F_{2,3}^2 - F_{1,2}F_{2,3}};$$

$$F_3 = \sqrt{F_{1,3}^2 + F_{2,3}^2 + F_{1,3}F_{2,3}}.$$

Силы, действующие на единицу длины каждого из проводников, равны

$$f_1 = \frac{F_1}{l} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\sqrt{I_2^2 + I_3^2 - I_2 I_3};$$

$$f_2 = \frac{F_2}{l} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\sqrt{I_1^2 + I_3^2 - I_1 I_3};$$

$$f_3 = \frac{F_3}{l} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi a}\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2}.$$

11.15. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}6$ Т, движется равномерно проводник длиной $l = 20$ см. По проводнику течет ток силой $I = 4$ А. Скорость движения проводника $v = 20$ см/с и направлена перпендикулярно к магнитному полю. Найти работу перемещения проводника за 10 с движения и мощность, необходимую для осуществления этого движения.

На проводник с током в магнитном поле действует сила

$$F = BIl \sin \alpha,$$

где α — угол между направлением индукции поля $\vec{B}$ и направлением тока. Из условия задачи $\alpha = 90°$, $\sin \alpha = 1$. Работа по перемещению проводника

$$A = Fs,$$

где s — путь, пройденный проводником. Учитывая, что $s = vt$, где v — скорость движения проводника, получаем:

$$A = IBlvt = 0{,}96 \text{ Дж}.$$

Мощность, необходимая для движения,

$$P = \frac{A}{t} = Fv = IBlv = 0{,}096 \text{ Вт}.$$

11.16. Между полюсами электромагнита в горизонтальном магнитном поле находится проводник, расположенный горизонтально, причем его направление перпендикулярно к магнитному полю. Какой ток должен идти через проводник, чтобы он висел, не падая, если индукция поля $B = 0{,}02$ Т и масса единицы длины проводника $m_l = 0{,}01$ кг/м (рис. 286)?

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера

$$F = BIl \sin \alpha.$$

В данном случае эта сила и должна уравновесить силу тяжести, т. е. должна быть направлена вертикально вверх ($\alpha = 90°$):

$$BIl = m_l lg; \ I = \frac{m_l g}{B} = 4{,}9 \text{ А}.$$

11.17. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью v. Индукция магнитного поля — B. Радиус окружности — r. Найти заряд частицы, если известно, что ее энергия — W.

При движении по окружности роль центростремительной силы играет сила Лоренца:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB.$$

Кинетическая энергия частицы

$$W = \frac{mv^2}{2},$$

следовательно, масса частицы

$$m = \frac{2W}{v^2}$$

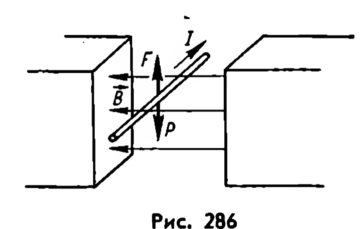


Рис. 286

и ее заряд

$$q = \frac{mv}{Br} = \frac{2W}{vBr}.$$

11.18. Протон и электрон влетают в однородное магнитное поле с одинаковой скоростью, перпендикулярной к $\vec{B}$. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона $R_п$ больше радиуса кривизны траектории электрона $R_э$?

На движущуюся заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца

$$F = qvB \sin \alpha.$$

В данном случае $F = evB$, где e — элементарный заряд.

Сила, с которой магнитное поле действует на движущуюся заряженную частицу, играет роль центростремительной силы. Следовательно, для протона и электрона

$$\frac{m_п v^2}{R_п} = evB = \frac{m_э v^2}{R_э}.$$

Отсюда

$$\frac{R_п}{R_э} = \frac{m_п}{m_э}.$$

11.19. α-Частица, прошедшая ускоряющую разность потенциалов U, влетает в однородное магнитное поле $\vec{B}$, перпендикулярное к ее скорости. Найти силу, действующую на частицу, радиус окружности, по которой движется частица, и период обращения частицы.

При прохождении ускоряющей разности потенциалов U работа сил электрического поля идет на сообщение α-частице кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} = qU, \qquad (1)$$

где m — масса α-частицы; v — приобретенная ею скорость; q — заряд α-частицы. Из (1) имеем:

$$v^2 = \frac{2qU}{m}. \qquad (2)$$

При движении заряженной частицы в магнитном поле последнее действует на нее с силой

$$F = qBv \sin(\vec{v}, \vec{B}).$$

Из условия задачи следует, что $(\vec{v}, \vec{B}) = 90°$, следовательно,

$$F = qBv. \qquad (3)$$

Эта сила играет роль центростремительной силы, так что

$$\frac{mv^2}{r} = qBv. \qquad (4)$$

Из уравнений (2), (3) и (4) получаем:

$$F = qB\sqrt{\frac{2qU}{m}} = B\sqrt{\frac{2q^3U}{m}};$$

$$r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

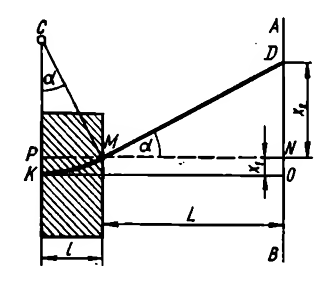


Рис. 287

Угловая и линейная скорости движения частицы по окружности радиуса r связаны соотношением

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T},$$

откуда

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{2qU}{m}}} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

11.20. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U, влетает в однородное магнитное поле (рис. 287), направленное перпендикулярно к плоскости чертежа к читателю. Ширина области поля — l. В отсутствие магнитного поля пучок электронов попадает в точку O на экране AB, который находится на расстоянии L от края полюсов магнита. При включении магнитного поля пятно на флуоресцирующем экране смещается из точки O в точку D. Найти смещение пучка, если индукция магнитного поля равна B и направление скорости перпендикулярно к направлению индукции.

Общее смещение пучка $x = x_1 + x_2$, где x_1 — смещение электрона в магнитном поле.

Электрон в магнитном поле движется по окружности, радиус которой находим, учитывая, что роль центростремительной силы в данном случае играет сила Лоренца: $F_ц = F_Л$ или $\frac{mv^2}{R} = evB$, откуда

$$R = \frac{mv}{eB}.$$

Смещение $x_1 = PK = R - \sqrt{R^2 - l^2}$.

Смещение x_2 может быть найдено из пропорции $x_2/L = PM/PO$, откуда

$$x_2 = L\frac{l}{\sqrt{R^2 - l^2}}.$$

Общее смещение

$$x = R - \sqrt{R^2 - l^2} + L\frac{l}{\sqrt{R^2 - l^2}}.$$

Для того чтобы определить R, найдем скорость пучка электронов из соотношения

$$eU = \frac{mv^2}{2},$$

где eU — работа сил электрического поля, затраченная на ускорение пучка электронов; $mv^2/2$ — кинетическая энергия электронов.

Из этого соотношения

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Таким образом, значение

$$R = \frac{\sqrt{2eUm}}{eB}$$

можем подставить в выражение для смещения x.

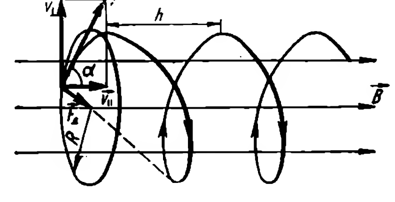


Рис. 288

11.21. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью v под углом α к вектору индукции $\vec{B}$. Определить радиус и шаг винтовой линии, по которой будет двигаться электрон (рис. 288).

Движение электрона в однородном магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к вектору индукции $\vec{B}$, происходит по винтовой линии. Это становится очевидным, если разложить вектор скорости на две составляющие: параллельную вектору индукции $\vec{v}_\parallel = \vec{v}\cos\alpha$ и перпендикулярную к вектору индукции $\vec{v}_\perp = \vec{v}\sin\alpha$.

Сила Лоренца $F_Л$ действует на электрон в плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{B}$, сообщая ему центростремительное ускорение.

В результате электрон описывает в этой плоскости окружность радиусом R, так как $\vec{B} = \text{const}$ и $v_\perp = \text{const}$.

Как уже сказано, сила Лоренца играет роль центростремительной силы, т. е.

$$F_Л = ev_\perp B = evB \sin \alpha = \frac{mv_\perp^2}{R} = \frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{R}.$$

Отсюда вытекает, что

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{eB}.$$

Вдоль поля электрон движется по инерции с постоянной скоростью, так как в этом направлении не действуют никакие силы. В результате сложения двух движений — движения по окружности и прямолинейного равномерного движения по инерции — траектория результирующего движения электрона представляет собой винтовую линию. Шаг винтовой линии равен расстоянию h, на которое смещается частица вдоль поля за один оборот:

$$h = v_\perp T = vT \cos \alpha.$$

Учитывая, что $Tv_\perp = 2\pi R$, получаем

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha},$$

откуда

$$h = \frac{2\pi R v \cos \alpha}{v \sin \alpha} = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{eB}.$$

11.22. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}4$ Т, помещена катушка из $N = 300$ витков. Сопротивление катушки $R = 40$ Ом, площадь сечения $S = 16$ см^2. Катушка помещена так, что ее ось составляет угол $\alpha = 60°$ с направлением магнитного поля. Какое количество электричества протечет по катушке при исчезновении магнитного поля?

Э. д. с., индуцируемая в катушке,

$$\mathscr{E} = -\Delta\Phi/\Delta t.$$

Начальный поток через катушку

$$\Phi_1 = \Phi_0 N \cos \alpha = BSN \cos \alpha,$$

где Φ_0 — поток магнитной индукции через один виток катушки, расположенный перпендикулярно к магнитному полю. После исчезновения магнитного поля поток Φ через катушку станет равным нулю, следовательно, $\mathscr{E}\, \Delta t = \Phi_1 = BSN \cos \alpha$.

Согласно закону Ома $\mathscr{E}\, \Delta t = qR$. Таким образом,

$$qR = BSN \cos \alpha;$$

$$q = \frac{BSN \cos \alpha}{R} = 2{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}.$$

11.23. В магнитном поле, индукция которого равна B, вращается с постоянной частотой ν стержень длиной l. Ось вращения проходит

через конец стержня и параллельна силовым линиям магнитного поля. Найти э. д. с. индукции, возникающую на концах стержня (рис. 289).

Э. д. с. индукции $\mathscr{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$, где $\Delta\Phi$ — изменение потока магнитной индукции за время Δt. Индукция магнитного поля B в данном случае не меняется, следовательно, $\Delta\Phi = B\,\Delta S$, где ΔS — площадь, описанная стержнем за время Δt.

$$\Delta S = S_0\nu\,\Delta t = \pi l^2\nu\,\Delta t,$$

где S_0 — площадь круга радиусом l; ν — частота. Окончательно

$$\mathscr{E} = -\frac{B\pi l^2\nu\,\Delta t}{\Delta t} = -B\pi l^2\nu.$$

11.24. Катушка диаметром d, состоящая из N витков, находится в магнитном поле, вектор индукции которого параллелен оси катушки. Чему будет равно среднее значение э. д. с. индукции в этой катушке, если за время Δt индукция увеличивается от B_1 до B_2?

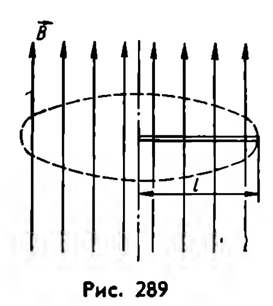


Рис. 289

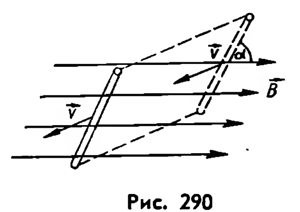


Рис. 290

Э. д. с. индукции $\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Линии индукции магнитного поля пересекают площадь $S = NS_0 = \frac{\pi d^2}{4}N$, где S_0 — площадь одного витка катушки; N — число витков. Изменение магнитного потока

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = B_2S - B_1S = (B_2 - B_1)\,S = \frac{(B_2 - B_1)\,\pi\,d^2N}{4}.$$

Таким образом, э. д. с. индукции

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{4}\,\pi\,d^2N\,\frac{B_2 - B_1}{\Delta t}.$$

11.25. Скорость летящего горизонтально самолета $v = 900$ км/ч. Найти э. д. с. индукции $\mathscr{E}$, возникающую на концах крыльев этого самолета, если вертикальная составляющая индукции B магнитного поля Земли равна $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ Т, а размах крыльев самолета $l = 12{,}5$ м (рис. 290).

Крылья самолета будем рассматривать как проводник. Если при равномерном движении проводника длиной l в однородном магнитном поле с индукцией B проводник перемещается на расстояние Δx за время Δt, то он пересекает магнитный поток $\Delta\Phi = l\,\Delta x B \sin\alpha$.

Подставляя это выражение в формулу закона электромагнитной индукции и учитывая, что $\Delta x/\Delta t = v$ и $\alpha = 90°$, получим для э. д. с. индукции, возникающей на концах проводника,

$$\mathscr{E} = lvB \sin \alpha = 0{,}156 \text{ В}.$$

11.26. В однородном магнитном поле с индукцией B равномерно вращается с частотой ν рамка площадью S. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна к линиям индукции. Определить максимальную э. д. с. индукции, возникающую в рамке (рис. 291).

При равномерном вращении плоской рамки в однородном магнитном поле магнитный поток, пронизывающий рамку, изменяется с течением времени по закону: $\Phi = BS \cos \omega t$, где S — площадь рамки; B — индукция магнитного поля; ω — угловая скорость вращения рамки.

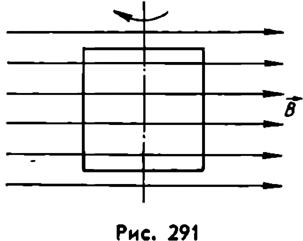


Рис. 291

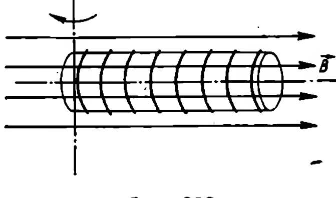


Рис. 292

За время Δt магнитный поток изменяется на величину

$$\Delta\Phi = BS[\cos \omega (t + \Delta t) - \cos \omega t] = BS[\cos \omega t \cdot \cos \omega \Delta t - \\ - \sin \omega t \sin \omega \Delta t - \cos \omega t].$$

Если Δt очень мало, то можно считать, что $\cos \omega \Delta t \approx 1$ и $\sin \omega \Delta t \approx \approx \omega \Delta t$, так что

$$\Delta\Phi = -BS\omega \Delta t \cdot \sin \omega t$$

и

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = BS\omega \sin \omega t.$$

Максимального значения э. д. с. индукции достигает при $\sin \omega t = 1$, т. е

$$\mathscr{E}_{\text{макс}} = BS\omega = 2\pi\nu BS.$$

11.27. В однородном магнитном поле, индукция которого равна B, равномерно вращается катушка из N витков проволоки. Число оборотов катушки за 1 с равно n, площадь сечения катушки — S. Ось вращения перпендикулярна к оси катушки и направлению магнитного поля. Найти максимальную э. д. с. индукции во вращающейся катушке (рис. 292).

Поток, пронизывающий катушку, будет максимальным в тот момент, когда катушка ориентирована в магнитном поле так, что ее ось параллельна магнитным силовым линиям:

$$\Phi_{\text{макс}} = BSN.$$

Изменение магнитного потока при равномерном вращении катушки (см. предыдущую задачу):

$$\Delta\Phi = -\Phi_{\text{макс}}\omega\,\Delta t \sin\omega t.$$

Изменение потока $\Delta\Phi$ будет максимальным при значении $\sin\omega t = 1$, следовательно,

$$\mathscr{E}_{\text{макс}} = \frac{\Phi_{\text{макс}}\omega\,\Delta t}{\Delta t} = \Phi_{\text{макс}}\omega = BSN\omega = 2\pi BSNn.$$

11.28. Проволочная рамка в виде квадрата со стороной a находится в магнитном поле прямолинейного длинного проводника, по которому течет ток силой I (рис. 293). Рамка движется вправо, оставаясь в той же плоскости, что и проводник, со скоростью v. Найти э. д. с., индуцированную в рамке, как функцию расстояния от проводника.

На расстоянии x от проводника индукция магнитного поля бесконечного прямолинейного тока

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}.$$

На расстоянии $x+a$ индукция

$$B_2 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x+a}.$$

Рис. 293

Пусть за малый промежуток времени Δt рамка переместилась из положения $1-2-3-4$ в положение $1'-2'-3'-4'$. Магнитный поток уменьшается при этом на величину

$$\Delta\Phi = \Phi_{122'1'} - \Phi_{433'4'}.$$

Вследствие малости промежутка времени Δt будем полагать, что индукция магнитного поля во всех точках площадок $1-2-2'-1'$ и $4-3-3'-4'$ одинакова, причем для всех точек поля, лежащих в пределах площадки $1-2-2'-1'$, она равна B_1, для точек поля, лежащих в пределах площадки $3-4-4'-3'$, равна B_2.

Таким образом, учитывая, что $S_{122'1'} = S_{344'3'} = va\,\Delta t$, получаем для изменения потока выражение

$$\Delta\Phi = B_2 va\,\Delta t - B_1 va\,\Delta t = -av(B_1 - B_2)\Delta t =$$

$$= -\frac{\mu\mu_0}{2\pi} Iv\,\Delta t\,\frac{a^2}{x(x+a)}$$

и

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu\mu_0 Iva^2}{x(x+a)}.$$

11.29. Проводник длиной $l = 20$ см перемещают в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Т так, что его ось составляет угол $\alpha = 30°$ с направлением поля. Как нужно двигать проводник, чтобы разность потенциалов на его концах возрастала равномерно на 1 В за 1 с?

При равномерном движении проводника в однородном магнитном поле на его концах возникает постоянная э. д. с. индукции, равная

$$\mathcal{E} = -Blv \sin \alpha,$$

где α — угол между осью проводника и направлением магнитного поля.

Для того чтобы э. д. с. индукция изменялась, проводник должен двигаться в однородном магнитном поле ускоренно. Если в момент t_1 скорость проводника была v_1, индуцированная э. д. с. равнялась $\mathcal{E}_1 = -Blv_1 \sin \alpha$. В момент t_2 скорость была v_2 и э. д. с. $\mathcal{E}_2 = -Blv_2 \sin \alpha$.

Приращение э. д. с.

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = -Bl(v_2 - v_1) \sin \alpha$$

и

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t} = -Bl \frac{\Delta v}{\Delta t} \sin \alpha = -Bla \sin \alpha,$$

где a — ускорение, с которым движется проводник. Отсюда

$$a = -\frac{\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t}}{Bl \sin \alpha} = -100 \text{ м/с}^2.$$

11.30. Между двумя плоскими параллельными пластинами площадью S, расположенными на расстоянии l друг от друга, пропускают со скоростью v поток ионизированного газа (рис. 294). На поток между пластинами воздействует магнитное поле с индукцией B, направленной перпендикулярно к плоскости чертежа. Под действием силы Лоренца положительные и отрицательные ионы отклоняются соответственно вверх и вниз и заряжают обе пластины. К пластинам присоединена внешняя нагрузка R, через которую от одной пластины к другой течет ток. Найти э. д. с. и максимальную полезную мощность этого генератора, если $S = 0{,}1$ м², $l = 0{,}2$ м, $B = 1{,}2$ Т, $v = 1000$ м/с, удельная электропроводность газа $g = 10$ См/м.

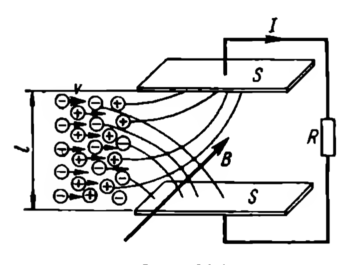


Рис. 294

Описанное устройство представляет собой магнитогидродинамический генератор (МГД-генератор), э. д. с. которого можно вычислить по формуле

$$\mathcal{E} = Blv = 240 \text{ В}.$$

Внутреннее сопротивление этого МГД-генератора

$$r = \frac{l}{gS}.$$

Максимальная полезная мощность достигается тогда, когда внутреннее сопротивление r равно внешнему сопротивлению нагрузки. В этом случае

$$P_{\text{макс}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{B^2 l v^2 g S}{4} = 72 \text{ кВт}.$$

11.31. На соленоид длиной l и площадью сечения S надет проволочный виток. Соленоид имеет N витков и по нему течет ток I. Найти среднюю э. д. с., индуцируемую в витке при выключении тока в течение малого промежутка времени Δt.

В соленоиде с током существует магнитное поле с индукцией

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I.$$

Поток магнитной индукции, пересекающий отдельный виток,

$$\Phi_1 = B_1 S.$$

Когда ток выключается, индукция магнитного поля и поток через виток падают до нуля, т. е.

$$B_2 = 0; \ \Phi_2 = 0.$$

Средняя э. д. с., индуцируемая в витке,

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = +\frac{\mu\mu_0 NIS}{l\,\Delta t}.$$

11.32. Обмотка соленоида состоит из медной проволоки с площадью сечения S_1. Длина соленоида — l, его сопротивление — R. Найти индуктивность соленоида.

Индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 lS,$$

где $n = N/l$ — число витков на единицу длины соленоида (N — общее число витков); S — площадь сечения соленоида. Для того чтобы найти N и S, необходимо знать длину проводника, из которого намотан соленоид. Известно, что $R = \rho l_1/S_1$, где l_1 — длина провода; S_1 — площадь сечения провода; ρ — удельное сопротивление меди. Отсюда

$$l_1 = \frac{RS_1}{\rho}.$$

Если r — радиус сечения соленоида, то длина одного витка провода $l_0 = 2\pi r$. Длина обмотки из N витков $l_1 = 2\pi rN$. Отсюда

$$rN = \frac{l_1}{2\pi} = \frac{RS_1}{2\pi\rho}.$$

Так как площадь сечения соленоида $S = \pi r^2$, формула для индуктивности может быть переписана в виде:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r^2 = \mu\mu_0 \frac{\pi}{l} (Nr)^2 = \mu\mu_0 \frac{\pi}{l} \frac{R^2 S_1^2}{4\pi^2\rho^2} = \mu\mu_0 \frac{R^2 S_1^2}{4\pi l\rho^2}.$$

Согласно условию задачи катушка не имеет сердечника, поэтому $\mu = 1$.

$$L = \mu_0 \frac{R^2 S_1^2}{4\pi l\rho^2}.$$

11.33. Найти индуктивность катушки длиной $l = 30$ см, площадью поперечного сечения $S = 10$ см², с общим числом витков $N = 600$. Найти индуктивность этой катушки, если в нее введен железный сердечник, магнитная проницаемость которого $\mu = 500$.

При отсутствии сердечника $\mu = 1$ и

$$L_1 = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 lS = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ Г}.$$

При наличии ферромагнитного сердечника с $\mu = 500$

$$L_2 = \mu\mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 lS = 0{,}75 \text{ Г}.$$

11.34. По катушке, индуктивность которой $L = 0{,}05$ мГ, течет ток $I = 0{,}8$А. При выключении ток изменяется практически до нуля за время $\Delta t = 120$ мкс. Определить среднее значение э. д. с. самоиндукции, возникающей в контуре.

Э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{1}{3} \text{ В}.$$

11.35. Две длинные катушки намотаны на один сердечник. Индуктивности катушек $L_1 = 1{,}6$ Г, $L_2 = 0{,}1$ Г. Во сколько раз число витков первой катушки больше, чем второй?

Известно, что $L_1 = \mu_1\mu_0 n_1^2 V_1$; $L_2 = \mu_2\mu_0 n_2^2 V_2$, где V_1 и V_2 — объемы катушек (произведения длины на сечение). Так как катушки намотаны на один сердечник, то $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и $V_1 = V_2 = V$. Следовательно,

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}; \quad \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = 4.$$

11.36. Экстраток размыкания соленоида пропустили через баллистический гальванометр, подвижная система которого отклонилась при этом на пять делений. Омическое сопротивление соленоида $R_1 = 60$ Ом. Затем ток такой же силы пропустили через второй соленоид сопротивлением 70 Ом. Экстраток размыкания вызвал при этом отклонение подвижной системы на девять делений. Определить, во сколько раз индуктивность второго соленоида больше индуктивности первого (сопротивлением гальванометра пренебречь).

Э. д. с. самоиндукции равны соответственно

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{\Delta I}{\Delta t_1};$$

$$\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{\Delta I}{\Delta t_2},$$

или

$$\mathcal{E}_1 \Delta t_1 = -L_1 \Delta I;$$
$$\mathcal{E}_2 \Delta t_2 = -L_2 \Delta I,$$

где L_1 и L_2 — индуктивности первого и второго соленоидов. С другой стороны,

$$\mathscr{E}_1 \Delta t_1 = q_1 R_1;$$
$$\mathscr{E}_2 \Delta t_2 = q_2 R_2,$$

где q_1 и q_2 — количества электричества, прошедшие в каждом из случаев через гальванометр. Учитывая, что $q = nc$, где n — число делений, на которое отклонился гальванометр; c — цена деления гальванометра, получаем

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{n_2 R_2}{n_1 R_1} = 2{,}1.$$

Рис. 295

Рис. 296

11.37. Катушка сопротивлением R и индуктивностью L находится в переменном магнитном поле. Когда создаваемый этим полем поток увеличился на $\Delta\Phi$, ток в катушке возрос на ΔI. Какой заряд прошел при этом по катушке?

Ток в катушке порождается появлением э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\Delta\Phi/\Delta t$, изменение же тока в цепи приводит к появлению э. д. с. самоиндукции, которая направлена против э. д. с. индукции, $\mathscr{E}_{\text{с}} = -L\Delta I/\Delta t$.

Так как

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} - \mathscr{E}_{\text{с}} = IR = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} - L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

то

$$\frac{\Delta\Phi - L\Delta I}{R} = I\Delta t = \Delta q.$$

11.38. В некоторой цепи имеется участок (рис. 295), состоящий из сопротивления $R = 0{,}2$ Ом и индуктивности $L = 0{,}02$ Г. Ток изменяется по закону $I = 3t$. Найти разность потенциалов между точками A и B.

При протекании переменного тока в катушке индуцируется э. д. с. самоиндукции

$$\mathscr{E} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

следовательно,

$$\varphi_A - \varphi_B - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR,$$

откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = IR + L\frac{\Delta I}{\Delta t} = (0{,}6t + 0{,}06) \text{ В}.$$

11.39. В цепи (рис. 296) $L1 = 0{,}04$ Г; $L2 = 0{,}02$ Г. В некоторый момент ток $I_1 = 0{,}2$ А и возрастает со скоростью 10 А/с, а ток $I_2 = 0{,}4$ А и возрастает со скоростью 20 А/с. Найти сопротивление R.

Разность потенциалов для каждой из ветвей:

$$\varphi_A - \varphi_B - L1\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = I_1 R;$$

$$\varphi_A - \varphi_B - L2\frac{\Delta I_2}{\Delta t} = I_2 R.$$

Отсюда

$$\varphi_A - \varphi_B = I_1 R + L1\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = I_2 R + L2\frac{\Delta I_2}{\Delta t};$$

$$R = \frac{L2\frac{\Delta I_2}{\Delta t} - L1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}}{I_1 - I_2} = 0.$$

11.40. Два конденсатора емкостью $C_1 = 0{,}4$ мкФ и $C_2 = 0{,}2$ мкФ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц. Найти силу тока в цепи и падение напряжения на каждом конденсаторе.

Общая емкость конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Сопротивление цепи, содержащей емкость C,

$$R_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{C_1 + C_2}{\omega C_1 C_2}.$$

По закону Ома, учитывая, что циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$,

$$I = \frac{U}{R_C} = \frac{U\omega C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 0{,}009 \text{ А}.$$

Очевидно, что $U = U_1 + U_2$, где U_1 и U_2 — падения напряжения на каждом из конденсаторов. Очевидно также, что

$$U_1 = IR_{C_1} = I\frac{1}{\omega C_1} = \frac{U\omega C_1 C_2}{(C_1 + C_2)\,\omega C_1} = \frac{UC_2}{C_1 + C_2} \approx 73{,}3 \text{ В};$$

$$U_2 = U - U_1 = \frac{UC_1}{C_1 + C_2} \approx 146{,}7 \text{ В}.$$

11.41. Катушка длиной l и радиусом r имеет обмотку из N витков медного провода сечением S_1. Катушка включена в сеть переменного тока частотой ν. Найти отношения активного и индуктивного сопротивлений катушки к ее полному сопротивлению.

Сопротивление переменному току цепи, содержащей катушку индуктивности,

$$R = \sqrt{R_0^2 + X_L^2} = \sqrt{R_0^2 + (\omega L)^2},$$

где ω — циклическая частота переменного тока; L — индуктивность катушки; R_0 — активное, или омическое, сопротивление катушки.

Известно, что $R_0 = \rho l_1/S_1$, где l_1 — длина проводника, из которого изготовлена катушка; S_1 — площадь сечения проводника; ρ — его удельное сопротивление. Учитывая, что длина витка равна $2\pi r$, находим

$$l_1 = 2\pi N r;$$

$$R_0 = \rho \frac{2\pi N r}{S_1}.$$

Индуктивность катушки определяется по формуле

$$L = \mu\mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 lS,$$

где μ — магнитная проницаемость сердечника; N — число витков катушки; l, S — ее длина и площадь сечения. Учитывая, что

$$\mu = 1; \qquad S = \pi r^2,$$

находим

$$L = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 l\pi r^2 = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r^2.$$

Отсюда

$$\frac{R_0}{R} = \frac{2\pi\rho N r}{S_1 \sqrt{\frac{4\pi^2\rho^2 N^2 r^2}{S_1^2} + \omega^2\mu_0^2 \frac{N^4}{l^2}\pi^2 r^4}} = \frac{l\rho}{\sqrt{\rho^2 l^2 + \pi^2\nu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S_1^2}};$$

$$\frac{R_L}{R} = \frac{2\pi\nu\mu_0 N^2 \pi r^2}{l\sqrt{\frac{4\pi^2\rho^2 N^2 r^2}{S_1^2} + \mu_0^2 (2\pi\nu)^2 \frac{N^4}{l^2}(\pi r^2)^2}} =$$

$$= \frac{\pi\mu_0\nu N r S_1}{\sqrt{(\rho l)^2 + (\mu\nu N\pi r S_1)^2}}.$$

Рис. 297

11.42. В цепи (рис. 297) протекает синусоидальный ток. Зная, что эффективное напряжение $U_{AB} = 30$ В, эффективное напряжение $U_{BO} = 10$ В и эффективное напряжение $U_{OD} = 15$ В, найти эффективное напряжение на участке AD.

Искомое напряжение

$$U_{AD} = IR = I\sqrt{R_0^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(IR_0)^2 + \left(IL\omega - \frac{I}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{U_{BO}^2 + (U_{AB} - U_{OD})^2} = 25 \text{ В}.$$

11.43. Неоновая лампочка включена на $t_0 = 10$ мин в сеть переменного синусоидального тока с эффективным значением напряжения $U_{эф} = 120$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Найти время горения лампочки,

если она зажигается и гаснет при напряжении $u_{заж} = u_{гаш} = 120$ В (заметим, что $u_{заж}$ и $u_{гаш}$ обычно меньше $U_{эф}$).

Мгновенное напряжение на зажимах лампочки

$$u = U \sin \omega t = U \sin 2\pi\nu t,$$

где U — максимальное (амплитудное) значение напряжения, связанное с эффективным значением равенством

$$U = U_{эф}\sqrt{2}.$$

Время свечения лампочки за полупериод $\tau = t_2 - t_1$, где t_2 — время от начала периода T до гашения; t_1 — время от начала периода T до зажигания.

В промежутке времени $t_0 = 10$ мин содержится $2t_0/T = 2\nu t_0$ полупериодов, следовательно, за время t_0 лампочка горит в течение

$$\tau_0 = 2\nu t_0 \tau.$$

Если в уравнении для u выразить U через $U_{эф}$, получим

$$u = U_{эф}\sqrt{2}\sin 2\pi\nu t.$$

В этом уравнении все величины, кроме t, известны, и из него можно определить времена t_1 и t_2.

Подставив числовые значения $u = u_{заж} = u_{гаш}$, найдем

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда (в пределах от 0 до $T/2$)

$$\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{4}; \quad t_1 = \frac{T}{8};$$

$$\frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{3\pi}{4}; \quad t_2 = \frac{3T}{8};$$

$$\tau = \frac{3}{8}T - \frac{1}{8}T = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\nu} = \frac{1}{200}\ \text{с};$$

$$\tau_0 = 300\ \text{с}.$$

11.44. Индуктивность L соленоида длиной $l = 60$ см и площадью поперечного сечения $S = 4$ см^2 равна $4 \cdot 10^{-7}$ Г. При какой силе тока объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида составит $2 \cdot 10^{-3}$ Дж/м^3?

Энергия магнитного поля внутри соленоида $W = \frac{LI^2}{2}$, где I — сила тока.

Учитывая, что $W = wV$, где w — объемная плотность энергии; V — объем соленоида, получим:

$$wV = \frac{1}{2}LI^2;$$

$$I = \sqrt{\frac{2wV}{L}} = \sqrt{\frac{2wlS}{L}} = 1{,}55\ \text{А}.$$

11.45. Круговой контур радиусом r помещен в однородное магнитное поле, индукция которого равна B. Плоскость контура перпендикулярна к направлению магнитного поля, сопротивление контура — R. Какое количество электричества протечет по контуру при повороте его на $\alpha = 60°$?

Э. д. с. индукции, возникающая в контуре, равна $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$. В начальный момент времени поток через контур $\Phi_1 = BS\cos\alpha_1 = B\pi r^2$, где S — площадь витка; r — радиус контура; $\alpha_1 = 90^0$ — угол между нормалью к плоскости витка и направлением поля.

После поворота контура на угол $\alpha = 60°$ поток магнитной индукции через катушку

$$\Phi_2 = B\pi r^2 \cos 60° = \frac{1}{2} Br^2\pi.$$

Изменение потока $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{1}{2} B\pi r^2$, следовательно, $\mathcal{E}\Delta t = \frac{1}{2} B\pi r^2$. Учитывая, что по закону Ома

$$\mathcal{E}\Delta t = qR,$$

получаем

$$q = \frac{B\pi r^2}{2R}.$$

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

12. Механические и электромагнитные колебания

Колебания — процессы отклонения от равновесного состояния, повторяющиеся через одинаковые промежутки времени. Наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются все значения физических величин, характеризующих колебательное движение, называется периодом колебаний T. Частота колебаний $\nu = 1/T$.

Механические колебания — повторяющиеся отклонения тела от положения равновесия. Они происходят под воздействием сил упругости, сил тяжести и др., например, колебания груза на пружине, колебания маятника, волны на поверхности воды. К этому же типу колебаний относятся и колебания плотности, объема, температуры и т. д.

Электромагнитные колебания — повторяющиеся изменения электрических напряжений и токов в электрических цепях и напряженностей электрического и магнитного полей в пространстве вокруг этих цепей.

Несмотря на различную природу тех или иных колебаний, в них обнаруживаются сходные физические закономерности.

Свободные и вынужденные колебания. Резонанс. При определенных условиях устойчивая система, выведенная из состояния равновесия и затем представленная самой себе, совершает колебания около этого состояния. Такие колебания называются свободными. Если же система колеблется в результате регулярно повторяющегося внешнего воздействия, то система совершает вынужденные колебания. При совпадении частоты внешнего воздействия и частоты собственных колебаний амплитуда колебаний сильно возрастает. Это явление называется резонансом.

Свободные механические колебания. Пусть материальная точка с массой m, находившаяся в равновесии в точке O (рис. 298), смещена вдоль оси на расстояние $|x|$. При этом на нее будет действовать сила F, пропорциональная смещению $|x|$ и направленная к точке O, т. е.

$$F = k|x|,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Сила F, пропорциональная смещению и направленная к точке равновесия, т. е. стремящаяся возвратить материальную точку в положение равновесия, называется восстанавливающей или возвращающей силой. Под действием восстанавливающей силы точка совершает свободные гармонические колебания вдоль оси X.

Смещение точки в данный момент времени t определяется уравнением гармонических колебаний:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$. Оба уравнения равнозначны и отличаются лишь сдвигом начальной фазы на величину $\pi/2$. Как и в кинематике, круговая, или циклическая, частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Величина A представляет собой наибольшее отклонение точки $x_{макс}$ от положения равновесия (амплитуду колебаний).

Выражение в скобках под знаком тригонометрической функции называется фазой колебаний и характеризует положение точки в момент t. Величина φ или φ_0 является начальной фазой в момент $t=0$.

Скорость и ускорение колеблющейся точки определяются следующим образом. Пусть смещение точки в момент t

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = x_{макс}\cos(\omega t + \varphi_0).$$

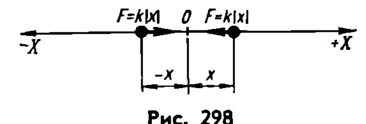


Рис. 298

Тогда скорость точки

$$u_x = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = v_{макс}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

и ускорение точки

$$a_x = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = a_{макс}\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь $x_{макс} = A$; $v_{макс} = -A\omega$; $a_{макс} = -A\omega^2$.

Согласно второму закону Ньютона

$$F = ma = -m\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x = -kx,$$

где $k = m\omega^2$ — коэффициент жесткости. Знак «—» означает, что направление силы F противоположно смещению.

Период колебаний гармонически колеблющейся точки

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Кинетическая энергия гармонически колеблющейся материальной точки

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}.$$

Потенциальная энергия колеблющейся материальной точки, смещенной на x от положения равновесия,

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}.$$

Полная механическая энергия колеблющейся материальной точки

$$E_к + E_п = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

Математический маятник — материальная точка, подвешенная на тонкой нерастяжимой невесомой нити. При углах отклонения, меньших 5°,

колебания математического маятника можно считать гармоническими с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина нити; g — ускорение свободного падения.

Физическим маятником называется тело, способное колебаться вокруг оси, не совпадающей с его центром тяжести. При малых углах отклонения период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}},$$

где J — момент инерции тела относительно оси вращения; a — расстояние от оси вращения до центра тяжести тела.

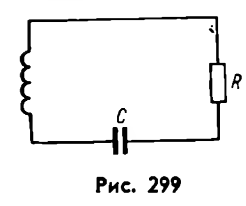


Рис. 299

Свободные электромагнитные колебания. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C, катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением R (рис. 299). Если зарядить конденсатор до напряжения U и затем предоставить контур самому себе, то в нем возникнут затухающие электромагнитные колебания. Условием возникновения колебаний является соотношение (см. стр. 352):

$$X_L - X_C = 0 \quad \text{или} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C},$$

откуда вытекает формула Томсона

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{LC},$$

где T выражается в секундах, если L — в генри, а C — в фарадах.

Волна — процесс распространения колебаний в какой-либо среде.

Длина волны — расстояние между двумя ближайшими точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе.

Длина волны λ, период колебаний T (или частота колебаний ν) и скорость распространения волны v связаны соотношением

$$\lambda = vT = v/\nu.$$

12.1. Материальная точка с массой $m = 5$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}5$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 3$ см. Определить скорость, ускорение и силу, действующую на точку в момент, когда смещение $x = 1{,}5$ см.

Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где x — смещение колеблющейся точки от положения равновесия; A — амплитуда; $\omega t + \varphi$ — фаза колебаний; φ — начальная фаза; ω — циклическая частота; t — время.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Чтобы выразить скорость через смещение, нужно исключить из вышеприведенных формул время. Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое из них на A^2, второе — на $A^2\omega^2$ и, сложив, получим

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{A^2\omega^2}=1$$

или, учитывая, что $\omega=2\pi\nu$,

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{4\pi^2\nu^2A^2}=1.$$

Решая полученное уравнение относительно v, находим

$$v=\pm 2\pi\nu\sqrt{A^2-x^2}=\pm 8{,}2 \text{ см/с}.$$

Ускорение

$$a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2 x=-4\pi^2\nu^2 x=59{,}16 \text{ см/с}^2.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$F=ma=295{,}8\cdot 10^{-5} \text{ Н}.$$

12.2. Материальная точка с массой $m=0{,}01$ кг совершает гармонические колебания по закону косинуса с периодом $T=2$ с и начальной фазой, равной нулю. Полная энергия колеблющейся точки $E=1\cdot 10^{-4}$ Дж. Найти амплитуду колебаний A; написать уравнение данных колебаний; найти наибольшее значение силы $F_{\text{макс}}$, действующей на точку.

Запишем уравнение гармонических колебаний без начальной фазы

$$x=A\cos\omega t,$$

где $\omega=2\pi/T$ — циклическая частота (T — период колебаний); A — амплитуда колебаний. Скорость колеблющейся точки определяется уравнением

$$v=-A\omega\sin\omega t.$$

Кинетическая энергия колеблющейся точки

$$E_{\text{к}}=\frac{mv^2}{2}=\frac{mA^2\omega^2\sin^2\omega t}{2}.$$

Полная энергия колеблющейся точки равна максимальному значению кинетической энергии точки

$$E=E_{\text{к. макс}}=\frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Отсюда

$$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}=\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}=0{,}045 \text{ м}.$$

Циклическая частота

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\text{с}^{-1}.$$

Таким образом, уравнение данного гармонического колебания может быть представлено в виде

$$x = 0{,}045 \cos \pi t.$$

Ускорение колеблющейся точки

$$a = -A\omega^2 \cos \omega t.$$

Отсюда максимальное ускорение

$$a_{\text{макс}} = -A\omega^2.$$

Следовательно, согласно второму закону Ньютона максимальная сила, действующая на точку,

$$F_{\text{макс}} = ma_{\text{макс}} = -mA\omega^2 = -4{,}44 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

12.3. Найти амплитуду A, период T, частоту ν и начальную фазу φ колебания, заданного уравнением

$$x = 5 \sin \frac{39{,}2t + 5{,}2}{5} \text{ см}.$$

Уравнение гармонического колебания в общем виде имеет вид:

$$x = A \sin (\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда; ω — циклическая частота; φ — начальная фаза. Сравнивая оба выражения и учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, находим

$$A = 5 \text{ см};$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1{,}25 \text{ Гц};$$

$$T = \frac{1}{\nu} = 0{,}8 \text{ с};$$

$$\varphi = 1{,}04 \text{ рад}.$$

12.4. Точка совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени t_1 смещение $x_1 = 5$ см. При увеличении фазы вдвое смещение точки стало $x_2 = 8$ см. Найти амплитуду колебаний.

Запишем уравнения для смещения в обоих случаях:

$$x_1 = A \sin (\omega t_1 + \varphi);$$
$$x_2 = A \sin (\omega t_2 + \varphi).$$

Согласно условию задачи

$$2 (\omega t_1 + \varphi) = \omega t_2 + \varphi.$$

Обозначим $\omega t_1 + \varphi = \alpha$; тогда уравнения для смещения могут быть представлены в виде:

$$x_1 = A \sin \alpha,$$
$$x_2 = A \sin 2\alpha = 2A \sin \alpha \cos \alpha.$$

Возведем оба уравнения в квадрат, разделим второе из них на четыре и вычтем из первого уравнения второе:

$$x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = A^2 \sin^2 \alpha - A^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = A^2 \sin^4 \alpha.$$

Учитывая, что $x_1 = A \sin \alpha$, получаем

$$x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = \frac{x_1^4}{A^2},$$

откуда

$$A = \sqrt{\frac{4x_1^4}{4x_1^2 - x_2^2}} = 8{,}3 \text{ см}.$$

12.5. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид:

$$x = 0{,}1 \sin 2t \text{ м}.$$

В момент, когда возвращающая сила впервые достигла значения $F = -10^{-2}$ Н, точка обладает потенциальной энергией $E_п = 2 \times \times 10^{-4}$ Дж. Найти этот момент времени t и соответствующую ему фазу колебаний.

Возвращающая сила $F = -kx = ma$. Если уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A \sin \omega t$, то ускорение может быть представлено как $a = -A\omega^2 \sin \omega t$, и следовательно, возвращающая сила

$$F = -mA\omega^2 \sin \omega t.$$

Потенциальная энергия

$$E_п = \frac{kx^2}{2}.$$

Учитывая, что $k = \omega^2 m$, получаем

$$E_п = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t}{2}.$$

Из выражений для F и $E_п$ находим

$$m = -\frac{F}{A\omega^2 \sin \omega t};$$

$$E_п = -\frac{F\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t}{2A\omega^2 \sin \omega t} = -\frac{FA \sin \omega t}{2},$$

откуда

$$\sin \omega t = -\frac{2E}{FA} = 0{,}4;$$

$$\omega t = 23^\circ 35' = 0{,}4116 \text{ рад};$$

$$t = 0{,}2058 \text{ с}.$$

12.6. Продолжительность $N = 100$ полных колебаний маятника, состоящего из проволоки длиной $l = 90{,}7$ см и металлического шарика диаметром $d = 4$ см, оказалась равной $t = 3$ мин 13,2 с. Вычислить ускорение силы тяжести и длину секундного маятника, период колебаний которого $T_0 = 1$ с.

Период колебаний математического маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}},$$

где l_1 — длина маятника; g — ускорение силы тяжести. Учитывая, что согласно условию задачи

$$l_1 = l + \frac{d}{2},$$

можем записать:

$$T_1^2 = 4\pi^2\left(\frac{l+\frac{d}{2}}{g}\right).$$

С другой стороны,

$$T_1 = \frac{t}{N}.$$

Из вышеприведенных выражений находим

$$g = \frac{4\pi^2\left(l+\frac{d}{2}\right)N}{t} \approx 981{,}5 \text{ см/с}^2.$$

Длина секундного маятника при этом

$$l' = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} \approx 99{,}44 \text{ см}.$$

12.7. Точные астрономические часы с секундным маятником установлены в подвале здания. Насколько будут отставать за сутки эти часы, если их перенести на верхний этаж здания? Высота верхнего этажа относительно подвала — 200 м.

При правильном ходе маятник часов за сутки должен сделать $N = \frac{24 \cdot 3600}{T_1}$ колебаний, где T_1 — период колебаний маятника.

Если после переноса часов период колебаний маятника стал равным T_2, то за сутки часы отстанут на

$$\Delta t = N(T_2 - T_1).$$

Пусть период колебаний маятника до переноса часов

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}},$$

где g_1 — ускорение силы тяжести на уровне подвала.

Период колебаний маятника после переноса часов

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}},$$

где g_2 — ускорение силы тяжести на уровне верхнего этажа здания.

Отношение периодов

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}.$$

Из закона всемирного тяготения следует, что

$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2,$$

где R — радиус Земли; h — высота здания. Отсюда следует, что

$$T_2 = T_1 \frac{R+h}{R}$$

и

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{h}{R} T_1.$$

Отставание часов за сутки

$$\Delta t = \frac{Nh}{R} T_1 = 2{,}7 \text{ с}.$$

12.8. Как изменится период колебаний маятника при переносе его с Земли на Луну?

Периоды колебаний математического маятника на Луне и на Земле равны соответственно

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_Л}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_З}},$$

где $g_Л$, $g_З$ — ускорения свободного падения на поверхности Луны и Земли; l — длина маятника.

Согласно закону всемирного тяготения

$$g_Л = \gamma \frac{M_Л}{R_Л^2}; \quad g_З = \gamma \frac{M_З}{R_З^2},$$

где γ — гравитационная постоянная; $M_Л$, $M_З$ — массы Луны и Земли; $R_Л$, $R_З$ — радиусы Луны и Земли. Таким образом, можем записать

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_З}{g_Л}} = \sqrt{\frac{M_З R_Л^2}{M_Л R_З^2}} = 2{,}46.$$

12.9. Каково соотношение между высотой H горы и глубиной h шахты, если периоды качания маятника на вершине горы и на дне шахты одинаковы?

Если периоды качания маятника на вершине горы и на дне шахты одинаковы, следовательно,

$$g_H = g_h,$$

где g_H, g_h — ускорение силы тяжести на вершине горы и на дне шахты соответственно.

Пусть m — масса тела, находящегося на расстоянии H от поверхности Земли. Сила тяготения в данном случае

$$F_H = mg_H = \gamma \frac{mM_З}{(R_З + H)^2},$$

или

$$g_H = \gamma \frac{M_З}{(R_З + H)^2},$$

где $M_З$ — масса Земли; $R_З$ — радиус Земли.

Принимая, что Земля — однородный шар плотностью ρ, получаем следующее выражение для ускорения силы тяжести на высоте H:

$$g_H = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho \frac{R_З^3}{(R_З + H)^2}.$$

Если то же самое тело с массой m лежит на дне шахты глубиной h, оно не испытывает со стороны вышележащего шарового слоя толщиной h никакого притяжения, так как притяжения от отдельных противоположных частей слоя взаимно компенсируются (см. задачу 12.22). В этом случае

$$F_h = mg_h = \gamma \frac{mM'_З}{(R_З - h)^2},$$

где масса шара плотностью ρ и радиусом $R_1 = R_З - h$ равна $M'_З = \frac{4}{3}\pi\rho (R_З - h)^3$.

Таким образом, на дне шахты

$$g_h = \frac{4}{3}\pi\rho\gamma (R_З - h).$$

Учитывая, что $g_H = g_h$, получаем

$$\frac{4}{3}\pi\rho\gamma \frac{R_З^3}{(R_З + H)^2} = \frac{4}{3}\pi\rho\gamma (R_З - h),$$

откуда

$$h = R_З - \frac{R_З^3}{(R_З + H)^2}.$$

Выражение для h может быть преобразовано следующим образом:

$$h = R_З \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{H}{R_З}\right)^2} \right].$$

Если $H \ll R_З$, то, пренебрегая членами, содержащими $H^2/R_З^2$, вследствие их малости по сравнению с членами, содержащими $H/R_З$, имеем:

$$h = R_З \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2H}{R_З}} \right] = \frac{R_З 2H}{R_З + 2H}.$$

Принимая, что $R_З + 2H \approx R_З$, получаем

$$h = 2H.$$

12.10. Чему равен период колебаний математического маятника, находящегося в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением a?

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}},$$

где $g_1 = \sqrt{g^2 + a^2}$ — ускорение свободного падения в ускоренно движущемся вагоне.

Таким образом,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

12.11. На какую часть нужно уменьшить длину математического маятника, чтобы периоды его колебаний на высоте H и на поверхности Земли были равны?

Пусть математический маятник длиной l_0 на поверхности Земли колеблется с периодом

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0}},$$

где $g_0 = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}$ — ускорение силы тяжести на поверхности Земли ($M_З$ и $R_З$ — масса и радиус Земли соответственно).

На высоте H ускорение силы тяжести $g = \gamma \frac{M_З}{(R_З + H)^2}$, а период колебаний маятника длиной l

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Учитывая, что согласно условию задачи $T = T_0$, получаем

$$\frac{l_0}{g_0} = \frac{l}{g};$$

$$\frac{l_0 R_З^2}{\gamma M_З} = \frac{l (R_З + H)^2}{\gamma M_З},$$

откуда

$$\frac{l}{l_0} = \frac{R_З^2}{(R_З + H)^2}$$

и

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{R_З^2}{(R_З + H)^2} = \frac{H (2R_З + H)}{(R_З + H)^2}.$$

Если $H \ll R_З$, то, пренебрегая величинами $H^2/R_З^2$, найдем

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{H\left(2+\frac{H}{R_З}\right)R_З}{R_З^2\left(1+\frac{H}{R_З}\right)^2} = \frac{2H}{R_З+2H}.$$

12.12. Период колебаний математического маятника длиной l в неподвижном лифте — T_0. Чему равен период колебаний такого маятника, если лифт: 1) поднимается вертикально вверх с ускорением $a = 0{,}5g$? 2) опускается вертикально вниз с ускорением $a = 0{,}5g$? 3) опускается вниз с ускорением $a_1 = 1{,}5g$?

1) Ускорение свободного падения при подъеме лифта равно $g + a$, следовательно,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{1{,}5g}} = T_0\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2) Ускорение свободного падения при опускании лифта равно $g - a$, так что

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{0{,}5g}} = T_0\sqrt{2}.$$

3) Если лифт опускается с ускорением $a_1 > g$, колебания маятника происходят не около нижнего положения равновесия, а около верхнего. Период колебаний в этом случае

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|g-a_1|}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{0{,}5g}} = T_0\sqrt{2}.$$

12.13. Определить период полного колебания математического маятника длиной l (рис. 300), если точка перегиба нити находится на одной вертикали с точкой подвеса, на расстоянии $l/2$ от нее.

Движение маятника справа от вертикали происходит за полупериод $T_1/2 = \pi\sqrt{l/g}$, а слева — за полупериод $T_2/2 = \pi\sqrt{l/2g}$. Полный период

$$T = \frac{T_1+T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \pi\sqrt{\frac{l}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \approx$$

$$\approx 1{,}706\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

12.14. Два шарика подвешены на нитях одинаковой длины l. Первый шарик поднимают по вертикали до точки подвеса, второй — при натянутой нити — отклоняют на малый угол α от вертикали (рис. 301), так что его колебания можно считать гармоническими. Шарики одновременно отпускают. Какой из них раньше достигнет положения равновесия?

Первый шарик в свободном падении пройдет путь l за время

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = 1{,}41\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Время же, необходимое для того, чтобы второй шарик оказался в положении равновесия, равно

$$t_2 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}57\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где T — период колебания второго шарика.

Как видно, $t_2 > t_1$, т. е. шарик, совершающий свободное падение, достигнет положения равновесия раньше.

12.15. К пружине подвешен груз с массой $m = 10$ кг. Зная, что пружина под влиянием силы $F = 2{,}45$Н растягивается на величину $x = 1{,}5$ см, определить период вертикальных колебаний груза.

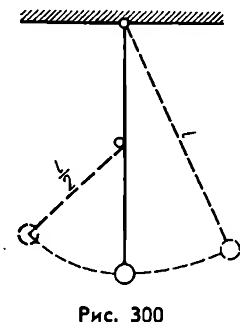


Рис. 300

Рис. 301

Период колебаний груза на пружине

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где k — коэффициент жесткости пружины. Учитывая, что $F = -kx$, находим

$$k = \left|\frac{F}{x}\right|$$

и

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mx}{F}} = 1{,}532 \text{ с}.$$

12.16. К пружине подвешена чашка весов с гирями. Период вертикальных колебаний чашки равен T_1. После того, как на чашку положили добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равен T_2. Насколько удлинилась пружина от прибавления добавочного груза?

Период колебаний

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m — масса чашки с гирями; k — коэффициент жесткости пружины.

После добавления гирь с массой Δm период колебаний

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}}.$$

Возводя оба выражения в квадрат и вычитая одно из другого, получим

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta m}{k}.$$

Но для упругой силы

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{g\Delta m}{\Delta x},$$

где F — сила, вызывающая удлинение пружины Δx.

Таким образом,

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta m\, \Delta x}{g\, \Delta m} = 4\pi^2 \frac{\Delta x}{g},$$

откуда

$$\Delta x = \frac{g}{4\pi^2}(T_2^2 - T_1^2).$$

12.17. Ареометр массой m, состоящий из шарика, заполненного дробью, и цилиндрической трубки с поперечным сечением S, помещен в жидкость с плотностью ρ. Его погружают в жидкость несколько глубже, чем необходимо для равновесия, и затем отпускают. Ареометр после этого начинает совершать свободные колебания около положения равновесия. Найти, как будет зависеть период колебаний ареометра от его массы, диаметра трубки и плотности жидкости.

На плавающий ареометр действуют сила тяжести P, направленная вертикально вниз, и сила Архимеда F_A, направленная вертикально вверх. В положении равновесия $P = F_A$, т. е. $P = \rho g V'$, где ρ — плотность жидкости; g — ускорение силы тяжести, $V' = V + Sh$ — часть объема ареометра, находящаяся в жидкости (V — объем шарика; Sh — объем части цилиндрической трубки, погруженной в жидкость). Таким образом, в положении равновесия

$$P = \rho g (V + Sh).$$

Если погрузить ареометр на глубину x, то результирующая выталкивающая сила

$$F = F'_A - P = \rho g [V + S(h + x)] - P$$

или

$$F = \rho g [V + S(h + x)] - \rho g (V + Sh) = \rho g S x.$$

С другой стороны, $F = kx$, следовательно, $k = \rho g S$. Подставив выражение для k в формулу для периода колебаний $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

12.18. Тело (рис. 302) с массой $m = 0{,}8$ кг связано с двумя пружинами жесткостью $k = 2000$ Н/м. Какой будет амплитуда колебаний тела, если сообщить ему начальную скорость $v_0 = 2$ м/с? Горизонтальная плоскость гладкая.

Если телу сообщена начальная скорость v_0, оно начнет деформировать пружины до тех пор, пока кинетическая энергия движения полностью не перейдет в потенциальную энергию деформации.

Когда тело максимально сместится от положения равновесия, пружины приобретают потенциальную энергию

$$E_п = \frac{kx^2_{макс}}{2} = \frac{kA^2}{2},$$

где $x_{макс}$ — максимальное смещение, или амплитуда колебаний A; k — жесткость пружины. Следовательно,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Отсюда

$$A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}04 \text{ м}.$$

12.19. На гладком горизонтальном столе лежит шар с массой M, прикрепленный к пружине жесткостью k. В шар попадает пуля с массой m, имеющая в момент удара скорость v_0, направленную вдоль оси пружины (рис. 303, *а*). Считая удар абсолютно неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить амплитуду и период колебаний шара.

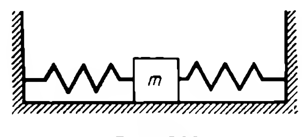


Рис. 302

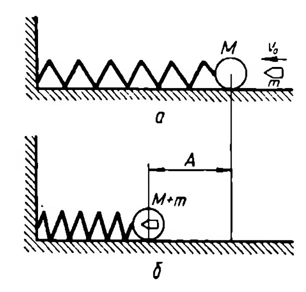


Рис. 303

В момент соударения пуля сообщает шару кинетическую энергию, вследствие чего шар начнет сжимать пружину. Сжатие пружины будет продолжаться до тех пор, пока вся кинетическая энергия движения шара не перейдет в потенциальную энергию деформации пружины. Потенциальная энергия пружины достигнет максимума, когда кинетическая энергия шара станет равной нулю. При этом смещение шара от положения равновесия будет максимальным (рис. 303, *б*),

$$x_{макс} = A.$$

Чтобы определить амплитуду колебаний, воспользуемся законом сохранения энергии для системы тел, состоящей из шара, пружины и пули.

В начальный момент движения энергия E_1 системы тел

$$E_1 = E_ш + E_{пр} + E_п,$$

где $E_ш$ — энергия шара; $E_{пр}$ — энергия пружины; $E_п$ — энергия пули. Учитывая, что в начальный момент $E_{пр} = 0$, находим

$$E_1 = \frac{(m + M) v_1^2}{2},$$

где v_1 — скорость шара и пули после удара.

В момент, когда смещение стало максимальным,

$$E_ш = 0, \quad E_п = 0, \quad E_{пр} = \frac{kA^2}{2},$$

следовательно, в этом положении энергия системы тел

$$E_2 = \frac{kA^2}{2}.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$E_1 = E_2,$$

или

$$\frac{kA^2}{2} - \frac{(m + M) v_1^2}{2} = 0.$$

Скорость шара после удара пули определяется из закона сохранения количества движения:

$$mv_0 = (m + M) v_1,$$

откуда

$$v_1 = \frac{mv_0}{m + M}$$

и

$$\frac{kA^2}{2} - \frac{(m + M) m^2 v_0^2}{2 (m + M)^2} = 0.$$

Отсюда

$$A = \sqrt{\frac{m^2 v_0^2}{(m + M)k}} = mv_0 \sqrt{\frac{1}{(m + M) k}}.$$

Шар будет совершать колебания под действием возвращающей силы упругости, пропорциональной смещению. Поэтому колебания шара будут гармоническими. Уравнение второго закона Ньютона для шара с застрявшей в нем пулей имеет вид:

$$F_{макс} = -(m + M) a_{макс} = -(m + M) \omega^2 x_{макс}.$$

С другой стороны, $F_{макс} = -kx_{макс}$, следовательно,

$$k = (m + M) \omega^2 = \frac{4\pi^2 (m + M)}{T^2},$$

откуда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

12.20. Диск с массой M подвешен к пружине, коэффициент жесткости которой равен k (рис. 304). После того как на диск падает с высоты h кольцо с массой m, диск и кольцо начинают совершать гармонические колебания. Полагая удар кольца о диск абсолютно неупругим, определить амплитуду колебаний. Массой пружины пренебречь.

При свободном падении с высоты h кольцо приобретает скорость

$$v = \sqrt{2gh}.$$

После абсолютно неупругого удара диск и кольцо в начальный момент времени приобретут скорость v_1, которую находим из закона сохранения количества движения:

$$mv = (m+M)\, v_1, \qquad (1)$$

откуда

$$v_1 = \frac{mv}{m+M} = \frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}.$$

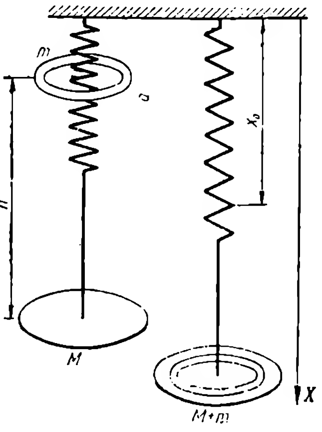


Рис. 304

Пришедший в движение диск будет растягивать пружину до тех пор, пока вся энергия движения диска и кольца не перейдет в потенциальную энергию растянутой пружины. Далее система будет совершать гармонические колебания относительно некоторого равновесного положения x_0.

Так как еще до падения кольца пружина под действием веса Mg диска растянулась до длины a, то ордината a является начальным положением колеблющейся системы. Очевидно, что

$$ka = Mg; \quad kx_0 = (M+m)\, g. \qquad (2)$$

Запишем закон сохранения энергии для колебательного процесса:

$$\frac{(M+m)\, v_1^2}{2} + \frac{k\,(x_0 - a)^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \qquad (3)$$

Здесь первое слагаемое — кинетическая энергия системы в начальном положении a; второе слагаемое — потенциальная энергия пружины в том же начальном положении a относительно равновесного положения x_0. Их сумма равна максимальной потенциальной энергии пружины $kA^2/2$, где A — амплитуда колебаний.

Определив v_1, a и x_0 из формул (1), (2) и подставляя их в (3), получаем для амплитуды выражение

$$A = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{k\,(M+m)}}.$$

12.21. Определить период колебаний шарика, скользящего вниз и вверх по двум наклонным плоскостям (рис. 305). Трение и потери скорости при ударе не учитывать.

Если шарик начинает скользить с высоты h, то он приходит вниз со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$. Дальнейшее движение его вверх по наклонной плоскости будет равнозамедленным со скоростью

$$v = v_0 - at,$$

где a — ускорение, сообщаемое шарику скатывающей силой $F_{ск} = mg \sin \beta = ma$.

При движении по правой наклонной плоскости

$$a = g \sin \beta,$$

поэтому

$$v = v_0 - gt \sin \beta.$$

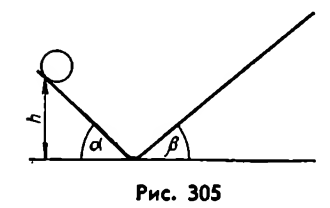


Рис. 305

Шарик будет двигаться вверх до тех пор, пока его скорость не станет равной нулю, т. е.

$$t_1 = \frac{v_0}{g \sin \beta}.$$

Столько же времени t_1 шарик будет двигаться вниз. Поэтому полное время его движения по правой наклонной плоскости

$$T_1 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g \sin \beta}.$$

Аналогично для левой наклонной плоскости имеем

$$T_2 = \frac{2v_0}{g \sin \alpha}.$$

Полный период колебаний шарика

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \alpha}\right).$$

Подставляя выражения для v_0, получим

$$T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \alpha}\right).$$

12.22. Показать, что тело, упавшее в шахту, пронизывающую Луну по одному из ее диаметров, будет совершать колебания около центра Луны. Определить период этих колебаний.

На тело, находящееся в шахте на глубине h от поверхности, будет действовать сила притяжения только со стороны слоев Луны, лежащих ниже этого тела. Докажем, что сила, действующая со стороны шарового пояса, лежащего выше тела, равна нулю.

Выделим из всего объема Луны тонкий шаровой слой (рис. 306). Рассмотрим материальную точку массой m, находящуюся в полости

шарового слоя. Построим конусы с малым углом раствора с вершиной в этой точке. Площади участков, вырезанных этими конусами в шаровом слое, связаны соотношением

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Массы, заключенные внутри конусов, пропорциональны площадям участков ΔS_1 и ΔS_2, т. е. $\Delta m = \alpha \Delta S$. Таким образом, действующая на тело массой m сила притяжения со стороны участка шарового слоя площадью ΔS_1

$$F_1 = \gamma \frac{m \Delta m_1}{r_1^2} = \gamma \frac{m \alpha \Delta S_1}{r_1^2}.$$

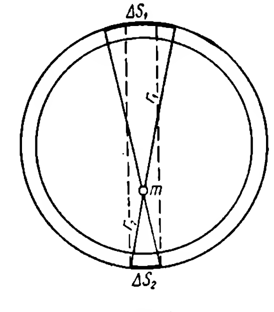


Рис. 306

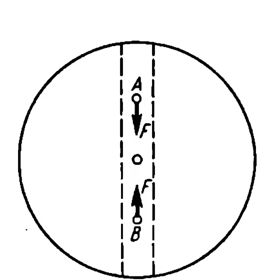


Рис. 307

Сила притяжения со стороны участка шарового слоя площадью ΔS_2

$$F_2 = \gamma \frac{m \Delta m_2}{r_2^2} = \gamma \frac{m \alpha \Delta S_2}{r_2^2}.$$

Из написанных уравнений следует, что

$$F_1 = F_2,$$

т. е. обе силы равны по модулю и противоположны по направлению. Отсюда видно, что сила, действующая на тело m со стороны шарового слоя, равна нулю.

Таким образом, на тело, находящееся на глубине h от поверхности Луны, будет действовать сила

$$F = \gamma \frac{mM'}{(R_Л - h)^2},$$

где

$$M' = \frac{4}{3} \pi \rho (R_Л - h)^3,$$

т. е.

$$F = \gamma \frac{m \frac{4}{3} \pi \rho (R_Л - h)^3}{(R_Л - h)^2} = \frac{\gamma m M_Л}{R_Л^3}(R_Л - h) = \frac{\gamma m M_Л}{R_Л^3} x = kx. \quad (*)$$

($x = (R_Л - h)$ — расстояние тела от центра Луны).

В результате мы видим, что в точках A и B (рис. 307), отстоящих на одинаковом расстоянии от центра Луны, на тело m будут действовать силы, пропорциональные расстоянию до центра планеты, равные между собой по величине и направленные к центру, т. е. восстанавливающие силы. Под действием этих сил тело будет совершать гармонические колебания около центра Луны. Период таких колебаний

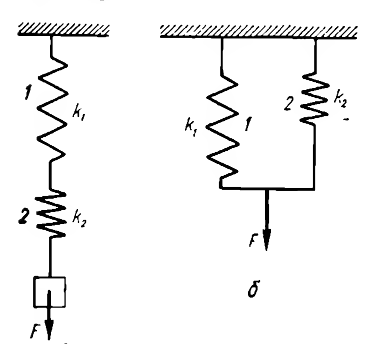


Рис. 308

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Из выражения (*) находим

$$k = \frac{\gamma m M_Л}{R_Л^3},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_Л^3}{\gamma M_Л}}.$$

12.23. Две пружины с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 соединены в одном случае последовательно (рис. 308, a), в другом — параллельно (рис. 308, $б$). Каково отношение периодов вертикальных колебаний грузов на таких пружинах?

Определим жесткость системы пружин в первом и во втором случае:

a) Под действием силы F каждая из пружин растянется на длину

$$x_1 = \frac{F}{k_1}; \quad x_2 = \frac{F}{k_2}.$$

Для системы пружины можно записать:

$$F = kx = k(x_1 + x_2) = k\left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}\right),$$

откуда

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Период колебаний груза с массой m

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{(k_1 + k_2) m}{k_1 k_2}}.$$

б) Сила F, действующая на систему пружин, может быть разложена на две составляющие, одна из которых F_1 приложена к пружине *1*, другая F_2 — к пружине *2*. Обе пружины растянутся на одинаковую длину x.

Для каждой из пружин можно записать

$$F_1 = k_1 x; \quad F_2 = k_2 x.$$

Для системы пружин

$$F = kx,$$

или

$$(F_1 + F_2) = kx;$$
$$k_1 x + k_2 x = kx;$$
$$k = k_1 + k_2.$$

Период колебаний груза массой m

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

В результате находим:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)\, m\, (k_1 + k_2)}{k_1 k_2 m}} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \sqrt{k_1 k_2}.$$

12.24. Горизонтальная платформа совершает круговые колебания в горизонтальной плоскости с частотой ν и амплитудой A. На платформе лежит груз, коэффициент трения которого о платформу равен $k_{тр}$. При каком условии груз не будет скользить по платформе?

Груз не будет скользить по платформе, если $k_{тр} mg \geqslant m a_{макс}$, где m — масса груза; g — ускорение силы тяжести; $a_{макс}$ — максимальное ускорение платформы:

$$a_{макс} = A\omega^2 = 4\pi^2\nu^2 A,$$

где A — амплитуда колебаний. Таким образом, условие отсутствия скольжения запишется в виде:

$$k_{тр} g \geqslant 4\pi^2\nu^2 A.$$

12.25. Однородный шарик радиуса r катается по внутренней стороне сферической поверхности радиуса R. Полагая колебания шарика гармоническими, определить их период T (рис. 309).

Сравним движение центра шарика с движением конца математического маятника длиной $R - r$. Обе точки описывают дугу окружности радиуса $R - r$. Применим закон сохранения энергии к шару и маятнику.

Кинетическая энергия катящегося шара:

$$\frac{m_ш v_ш^2}{2} + \frac{I_ш \omega_ш^2}{2} = \frac{m_ш v_ш^2}{2} + \frac{2 m_ш r^2 v_ш^2}{5 \cdot 2 r^2} = 0{,}7 m_ш v_ш^2,$$

Пусть при угле φ_0 шар и маятник покоятся; тогда закон сохранения энергии для каждого из них можно записать в виде:

$$0{,}7m_ш v_ш^2 = m_ш g(R - r)(\cos\varphi_0 - \cos\varphi),$$

где φ_0 — угол максимального отклонения;

$$\frac{m_м v_м^2}{2} = m_м g(R - r)(\cos\varphi_0 - \cos\varphi).$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\frac{0{,}7v_ш^2}{0{,}5v_м^2} = 1; \quad \frac{v_ш}{v_м} = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

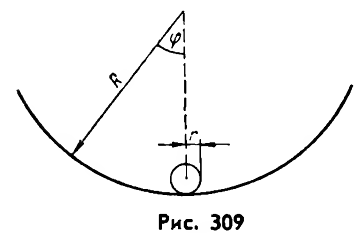


Рис. 309

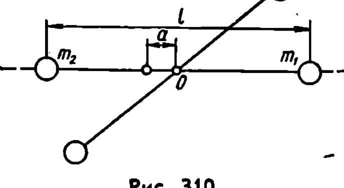


Рис. 310

Так как шар движется в $\sqrt{\frac{7}{5}}$ раз медленнее маятника, то период колебаний шара будет во столько же раз больше периода движения математического маятника длиной $R - r$. Таким образом, для искомого периода находим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R - r)\,5}{7g}}.$$

12.26. На концах тонкого невесомого стержня длиной l укреплены грузики с массами m_1 и m_2. Стержень колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину (рис. 310). Определить период колебаний, совершаемых стержнем для случаев, когда: 1) стержень невесом; 2) масса стержня равна $m_с$.

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

где I — момент инерции маятника; m — его масса; a — расстояние от центра тяжести до оси вращения; g — ускорение свободного падения.

1) Момент инерции маятника для случая, когда стержень невесом, равен сумме моментов инерции грузиков: $I = I_1 + I_2$. Пренебрегая размерами грузиков, т. е. считая их материальными точками, получим

$$I = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}(m_1 + m_2).$$

Масса маятника $m = m_1 + m_2$. Для определения расстояния a напишем условие равновесия грузиков:

$$m_1 g\left(\frac{l}{2} + a\right) - m_2 g\left(\frac{l}{2} - a\right) = 0,$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)\, l}{2\,(m_2 + m_1)}.$$

Период колебаний может быть записан в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{4}(m_1 + m_2)(m_1 + m_2)2}{(m_1 + m_2)\, g\,(m_2 - m_1)\, l}} = \pi \sqrt{\frac{2l\,(m_1 + m_2)}{g\,(m_2 - m_1)}}.$$

2) Если масса стержня равна m_c, то момент инерции $I' = I_1 + I_2 + I_c$. Учитывая, что момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину, $I_c = \frac{1}{12} m_c l^2$, находим

$$I = \frac{l^2}{12}(3m_1 + 3m_2 + m_c).$$

Масса маятника $m = m_1 + m_2 + m_c$. Условие равновесия:

$$m_1 g\left(\frac{l}{2} + a\right) + m_c g a - m_2 g\left(\frac{l}{2} - a\right) = 0,$$

откуда

$$a = \frac{l\,(m_2 - m_1)}{2\,(m_1 + m_2 + m_c)}.$$

Период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l\,(3m_1 + 3m_2 + m_c)}{6g\,(m_2 - m_1)}}.$$

12.27. Однородный диск радиуса R колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих поверхности диска. Каков период его колебаний?

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}.$$

Согласно теореме Штейнера момент инерции диска I относительно оси, не проходящей через центр тяжести диска:

$$I = I_0 + ml^2,$$

где I_0 — момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр тяжести; m — масса диска; l — расстояние между осями. Учитывая, что в данном случае $l = R$; $I_0 = \frac{1}{2} mR^2$; $a = R$, находим

$$I = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2;$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} mR^2}{mgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}.$$

12.28. На стержне длиной l укреплены два одинаковых грузика — один в середине стержня, другой на одном из его концов. Стержень с грузиками колеблется относительно горизонтальной оси, проходящей через другой конец стержня (рис. 311). Определить приведенную длину и период колебаний физического маятника (массой стержня пренебречь).

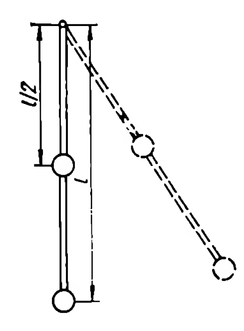


Рис. 311

Известно, что

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}; \quad L = \frac{I}{ma},$$

где L — приведенная длина.

Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции грузиков, которые можно рассматривать как материальные точки с массой m_1, т. е. $I = I_1 + I_2 = m_1 l^2 + m_1 (l/2)^2 = 1{,}25 m_1 l^2$.

Масса маятника $m = 2m_1$. Центр тяжести будет находиться на середине расстояния между грузиками, т. е. $a = l/2 + l/4 = 0{,}75l$. Таким образом,

$$L = \frac{5l}{6}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{5l}{6g}}.$$

12.29. В открытую с обоих концов U-образную трубку с площадью поперечного сечения S быстро вливают ртуть массой m. Определить период колебаний ртути в трубке.

При смещении уровня ртути от положения равновесия на величину x на ртуть будет действовать сила $F = \rho g S 2x$. С другой стороны, $F = kx$, следовательно, $k = 2\rho g S$ и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho g S}}.$$

12.30. Скорость звука в воде $v = 1450$ м/с. На каком расстоянии находятся две ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний $\nu = 725$ Гц?

Две ближайшие точки, колеблющиеся в противофазах, находятся на расстоянии $l = \lambda/2$, где λ — длина волны. Так как $\lambda = v/\nu$, то

$$l = \frac{v}{2\nu} = 1 \text{ м}.$$

12.31. Волны распространяются со скоростью $v = 400$ м/с при частоте $\nu = 500$ Гц. Чему равна разность фаз двух точек, отстоящих друг от друга на расстояние $l = 0{,}2$ м?

Если две точки отстоят друг от друга на расстояние, равное длине волны, то разность фаз равна 2π. Следовательно, если точки отстоят на l друг от друга, то разность фаз

$$\Delta\varphi = \frac{l}{\lambda} 2\pi.$$

Длина волны

$$\lambda = \frac{v}{\nu},$$

значит,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi l \nu}{v} = 0{,}5\pi.$$

12.32. Определить показатель преломления звуковых волн на границе воздух — стекло. Модуль Юнга для стекла равен $6{,}9 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, плотность стекла $\rho = 2{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, температура воздуха $t = 20°$ С. Скорость звука в воздухе $v_1 = 340$ м/с.

Показатель преломления показывает, во сколько раз скорость распространения волн в первой среде больше, чем во второй:

$$n = \frac{v_1}{v_2},$$

где v_1 и v_2 — скорости звука в воздухе и стекле соответственно.

Скорость распространения акустических колебаний в газе определяется формулой

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}},$$

где $\gamma = C_p/C_V$ (C_V, C_p — молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении, соответственно); μ — молекулярный вес газа; R — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура.

Скорость распространения акустических колебаний в среде определяется формулой

$$v_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E — модуль Юнга; ρ — плотность среды. Таким образом,

$$n = \sqrt{\frac{\gamma RT\rho}{\mu E}} = 0{,}067.$$

12.33. Два поезда идут навстречу друг другу со скоростями $u = 72$ км/ч и $v = 54$ км/ч. Первый поезд дает свисток на частоте $\nu = 600$ Гц. Найти частоту звука, который слышит пассажир второго поезда: 1) до встречи поездов; 2) после встречи поездов. Скорость звука c принять равной 340 м/с.

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой

$$\nu' = \frac{\vec{c} + \vec{v}}{\vec{c} - \vec{u}} \nu,$$

где ν — частота звука, посылаемого источником; $\vec{u}$ — скорость движения источника звука; $\vec{v}$ — скорость движения наблюдателя; $\vec{c}$ — вектор скорости распространения звука, направленный от источника к наблюдателю.

1) Если поезда сближаются,

$$\nu' = \frac{c + v}{c - u} \nu = 666 \text{ Гц}.$$

2) Если поезда удаляются друг от друга,

$$\nu'' = \frac{c + v}{c + u} \nu = 542 \text{ Гц}.$$

12.34. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости $C = 2$ мкф получить звуковую частоту $\nu = 10^3$ Гц? Сопротивлением контура пренебречь.

Период колебаний контура можно определить по формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, откуда

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 \nu^2 C} = 12{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ Г}.$$

12.35. Ток в колебательном контуре изменяется со временем по закону $I = 0{,}01 \cos 1000t$. Найти индуктивность контура, зная, что емкость его конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф.

Зависимость силы тока от времени в общем виде может быть представлена как $I = I_0 \cos \omega t$. Согласно условию задачи $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$, значит,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Из формулы Томсона

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = 0{,}05 \text{ Г}.$$

12.36. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 48$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 24 \cdot 10^{-3}$ Г и активным сопротивлением $R = 200$ Ом. Определить частоту свободных электромагнитных колебаний в этом контуре. Насколько изменится частота, если пренебречь активным сопротивлением катушки?

Период электромагнитных колебаний в контуре, состоящем из емкости C, индуктивности L и сопротивления R, определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

Частота

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 132 \text{ Гц}.$$

Если $R = 0$, то

$$T_1 = 2\pi\sqrt{LC};$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 148 \text{ Гц},$$

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu = 16 \text{ Гц}.$$

12.37. В контуре с индуктивностью L и емкостью C совершаются свободные незатухающие колебания. Зная, что максимальное напряжение на конденсаторе равно $U_{\text{макс}}$, найти максимальный ток в контуре.

Закон сохранения энергии в данном случае запишется в виде:

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{CU^2_{\text{макс}}}{2} = \frac{LI^2_{\text{макс}}}{2},$$

откуда

$$I_{\text{макс}} = U_{\text{макс}}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

12.38. Тонкий стержень длиной l закреплен с обоих концов. Определить возможные собственные частоты продольных колебаний. Решить задачу, если закреплен один конец стержня.

На закрепленных концах стержня находятся узлы, и на стержне должно укладываться целое число полуволн:

$$l = \frac{\lambda}{2}k,$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$ — целые числа. Отсюда

$$\lambda = \frac{2l}{k}$$

и

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{vk}{2l},$$

т. е.

$$\nu_1 = \frac{v}{2l}; \quad \nu_2 = \frac{v}{l}; \quad \nu_3 = \frac{3v}{2l}, \ldots$$

Если один конец стержня закреплен, а другой свободен, то на закрепленном конце будет узел, а на свободном — пучность, и тогда на стержне должно укладываться целое число $\lambda/4$:

$$l = \frac{\lambda}{4}n,$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — целые числа. Таким образом,

$$\lambda = \frac{4l}{n}$$

и

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{vn}{4l},$$

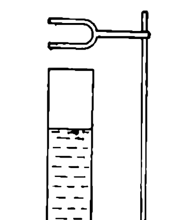


Рис. 312

т. е.

$$\nu_1 = \frac{v}{4l}; \quad \nu_2 = \frac{v}{2l}; \quad \nu_3 = \frac{3}{4}\frac{v}{l}, \ldots$$

12.39. Определить минимальную длину воздушного столба в сосуде (рис. 312), резонирующего с колебаниями камертона с частотой $\nu_к = 440$ Гц. Скорость звука $v \approx 332$ м/с.

Явление резонанса наступит тогда, когда частота собственных колебаний воздушного столба $\nu_в$ будет совпадать с частотой колебаний камертона: $\nu_к = \nu_в$.

На границе воздух — вода образуется узел, на другом конце воздушного столба образуется пучность. Следовательно, на длине воздушного столба l будет укладываться целое число $\lambda/4$, которое мы обозначим n:

$$l = \frac{\lambda_в}{4} n = \frac{v}{4\nu_в} n.$$

Для основного тона $n = 1$, следовательно, частота основного тона

$$\nu_{в1} = \frac{v}{4l}.$$

Так как $\nu_{в1} = \nu_к$, то

$$l = \frac{v}{4\nu_к} \approx 19{,}7 \text{ см}.$$

ОПТИКА

13. Геометрическая оптика

Световой луч. Световым лучом называется бесконечно тонкая линия, вдоль которой распространяется лучистая энергия.

Оптические системы. Тела или системы тел, преобразующие ход лучей света, называют оптическими системами.

Если расходящийся пучок лучей, идущий от светящейся точки, преобразуется оптической системой в сходящийся пучок, изображение точки, получающееся в месте пересечения преобразованных лучей, называют действительным.

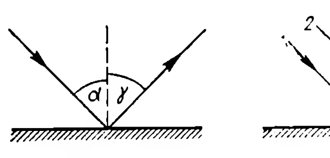


Рис. 313 Рис. 314

Если расходящийся пучок лучей, выходящий из светящейся точки, преобразуется оптической системой так, что он остается расходящимся, изображение точки, получающееся на месте пересечения продолжений преобразованных лучей, называют мнимым.

Отражение света. При отражении света от границы раздела двух сред угол падения α равен углу отражения γ (рис. 313).

Луч падающий и луч отраженный лежат в одной плоскости с перпендикуляром, восстановленным в точке падения.

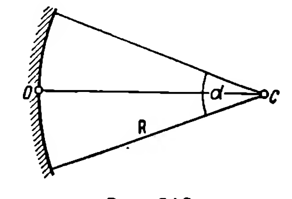


Рис. 315

Плоское зеркало. Если параллельный пучок лучей, падающий на плоскую поверхность раздела двух сред, после отражения остается параллельным, отражение называется зеркальным, а сама поверхность называется плоским зеркалом (рис. 314).

Сферическое зеркало. Если зеркально отражающая поверхность представляет собой часть шаровой поверхности (рис. 315), то такое зеркало называется сферическим. Центр шара — точку C — называют оптическим центром зеркала, его радиус R — радиусом зеркала. Вершина шарового сегмента O называется полюсом зеркала, угол α, под которым этот сегмент виден из оптического центра,— угловым отверстием (апертурой) зеркала. Прямая, проходящая через оптический центр зеркала, называется его оптической осью. Оптическая ось,

проходящая через полюс зеркала, называется главной, а прочие — побочными оптическими осями.

Согласно законам отражения, луч, падающий на сферическое зеркало, и луч отраженный составляют с радиусом зеркала одинаковые углы и лежат с ним в одной плоскости.

Вогнутое зеркало. Фокус. Фокусом зеркала называется точка, в которой пересекаются после отражения параллельные лучи, упавшие на зеркало. Фокус, лежащий на главной оптической оси, называется главным фокусом. Фокус, лежащий на побочной оси, — побочным. Фокусы вогнутого зеркала действительные. Расстояние между полюсом и главным фокусом называется главным фокусным расстоянием F. Геометрическое место всех фокусов представляет часть сферической поверхности, называемую фокальной поверхностью.

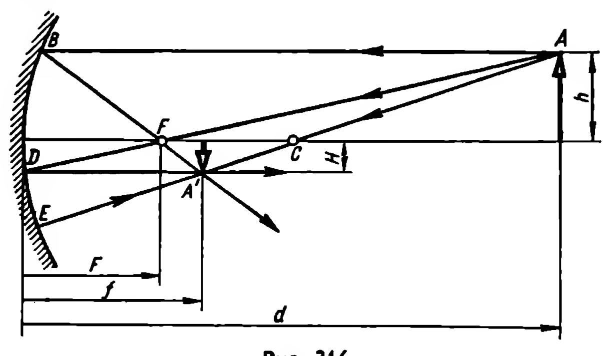


Рис. 316

Если диаметр сферического зеркала значительно меньше его радиуса кривизны R, то фокусное расстояние

$$F = \frac{R}{2}.$$

Радиус фокальной поверхности

$$R_{\text{ф}} = \frac{R}{2}.$$

Если светящаяся точка (небольшой по сравнению с R протяженный предмет) находится на расстоянии d от зеркала и ее изображение получается на расстоянии f от него, то

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

В этой формуле все расстояния от зеркала до мнимых точек берутся со знаком «минус», до действительных точек — со знаком «плюс». Фокусное расстояние вогнутого зеркала всегда положительно.

Величину $D = 1/F$ называют оптической силой зеркала. Фокусное расстояние F и радиус R измеряются в метрах. Единица измерения оптической силы ($м^{-1}$) называется диоптрией.

Для построения изображения A' какой-либо точки A предмета наиболее удобны лучи, идущие, как показано на рис. 316:

луч, проходящий через оптический центр зеркала, идет по тому же направлению назад (луч ACE);

луч, проходящий через фокус, после отражения пойдет параллельно оптической оси, на которой лежит этот фокус (луч AFD);

луч, идущий параллельно оптической оси, после отражения проходит через фокус, лежащий на этой оси (луч ABA').

Линейное увеличение (уменьшение) предмета, даваемое зеркалом,

$$k = \frac{H}{h} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d - F},$$

где H — высота изображения; h — высота предмета.

Выпуклое зеркало. Если пучок параллельных лучей падает на выпуклое зеркало, то после отражения продолжения лучей пересекаются в точке, называемой фокусом. Фокус выпуклого зеркала мнимый. Формула выпуклого зеркала

$$-\frac{1}{F} = -\frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

Правило знаков для d и f остается таким же, как и для вогнутого зеркала.

Линейное увеличение предмета

$$k = \frac{H}{h} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d + F}.$$

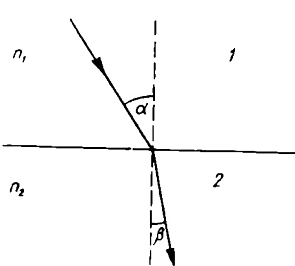


Рис. 317

Преломление света. Свет, идущий из вакуума в некоторую среду, частично отражается и частично преломляется. Угол падения α и угол преломления β связаны соотношением (рис. 317):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

где n — абсолютный показатель преломления данной среды (см. ниже).

Если луч света переходит из среды *1* в среду *2*, то

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

где n_1, n_2 — абсолютные показатели преломления среды *1* и *2* соответственно, n_{21} — относительный показатель преломления среды *2* относительно среды *1*. Данное равенство верно и при обратном переходе луча из среды *2* в среду *1*.

Абсолютный показатель преломления показывает, во сколько раз скорость света в вакууме c больше скорости света в данной среде:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Относительный показатель преломления показывает, во сколько раз скорость света в одной среде больше, чем во второй:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Если показатель преломления n_1 среды 1 больше показателя преломления n_2 среды 2 (т. е. свет переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную), то при угле падения α, превышающем некоторое предельное значение $\alpha_{пр}$, луч полностью отражается от границы раздела и возвращается в среду 1 (рис. 318).

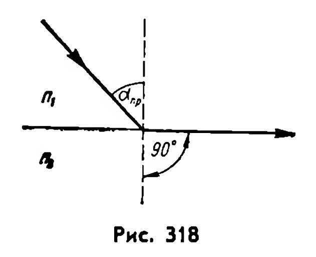


Рис. 318

Угол $\alpha_{пр}$ называется предельным углом полного внутреннего отражения. Очевидно, что

$$n_1 \sin \alpha_{пр} = n_2 \sin 90° = n_2;$$

$$\sin \alpha_{пр} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Собирающие линзы* (рис. 319, *а*). Точку линзы, через которую лучи проходят, не изменяя своего направления, называют оптическим центром линзы. Прямые, проходящие через оптический центр, называются оптическими осями. Оптическая ось, проходящая через центры сферических поверхностей линзы, называется главной оптической осью.

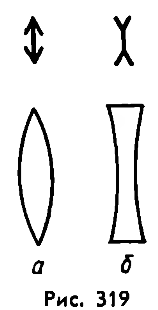


Рис. 319

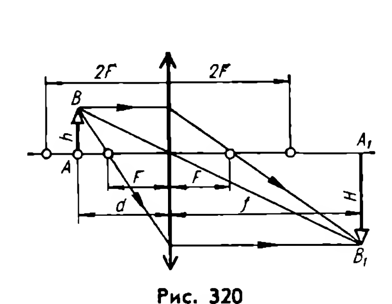


Рис. 320

Фокусом собирающей линзы называется точка, в которой пересекаются параллельные лучи после преломления в линзе. Фокус собирающей линзы — действительный. Фокус, лежащий на главной оптической оси, называется главным фокусом. Плоскость, в которой лежат фокусы, называется фокальной плоскостью. Расстояние от вершины преломляющей поверхности до главного фокуса называется главным фокусным расстоянием F.

Правила хода лучей в собирающей линзе (рис. 320):

* Все рассматриваемые здесь линзы являются тонкими, т. е. их толщинами можно пренебречь по сравнению с их радиусами кривизны.

луч, падающий на линзу параллельно какой-либо оптической оси, после преломления пройдет через фокус, лежащий на этой оптической оси;

луч, идущий вдоль оптической оси, не меняет своего направления;

луч, проходящий через передний фокус, после преломления в линзе пойдет параллельно главной оптической оси;

луч, проходящий через передний двойной фокус, после преломления пройдет через задний двойной фокус **.

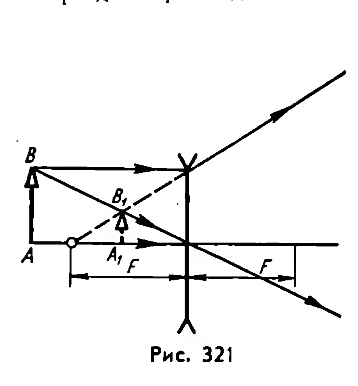


Рис. 321

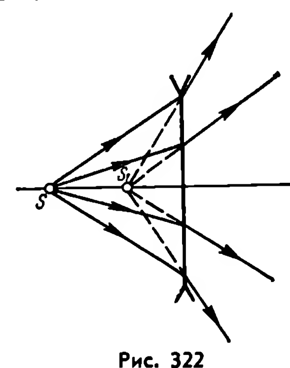


Рис. 322

Формула собирающей линзы:

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d},$$

где F — фокусное расстояние линзы; D — оптическая сила линзы; f — расстояние от изображения до линзы; d — расстояние от предмета до линзы. Правило знаков будет таким же, как и для зеркала.

Линейное увеличение, даваемое линзой,

$$k = \frac{H}{h} = \frac{f}{d},$$

где H — высота изображения; h — высота предмета (рис. 320).

Рассеивающие линзы (рис. 319, *б*). Лучи, упавшие на рассеивающую линзу параллельным пучком, расходятся так, что их продолжения пересекаются в точке, называемой мнимым фокусом.

Правила хода лучей в рассеивающей линзе (рис. 321):

лучи, падающие на линзу параллельно какой-нибудь оптической оси, после преломления пойдут так, что их продолжения пройдут через фокус, лежащий на этой оптической оси;

луч, идущий вдоль оптической оси, не меняет своего направления.

Формула рассеивающей линзы:

$$-D = -\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

(правило знаков остается прежним).

* Двойной фокус — точка на главной оси, удаленная от линзы на двойное фокусное расстояние.

Следует учесть, что отрицательным может быть и d (т. е. мнимым может быть не только изображение, но и источник). Например, если направление лучей, показанных на рис. 322 и идущих от точки S к линзе, изменить на обратное, то S_1 будет мнимым источником, а S — его действительным изображением (такой случай возможен, если справа от данной линзы поместить другую линзу, собирающую лучи в точку S_1).

Фокусное расстояние линзы определяется по формуле

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где $n_л$, $n_{ср}$ — показатели преломления материала линзы и среды; R_1, R_2 — радиусы сферических поверхностей линзы.

Для выпуклой поверхности R берется со знаком «плюс», для вогнутой — со знаком «минус», для плоской — $R = \infty$. Для плотно прилегающих друг к другу нескольких линз справедливо выражение:

$$D = D_1 + D_2 + D_3,$$

где D — оптическая сила системы; D_1, D_2, D_3 — оптические силы данных линз.

Если линза вплотную прилегает к зеркалу, то

$$D = 2D_1 + D_2,$$

где D_1 — оптическая сила линзы; D_2 — оптическая сила зеркала.

Лупа. Увеличение, даваемое лупой,

$$k = \frac{L}{F},$$

где L — расстояние наилучшего зрения; F — фокусное расстояние лупы.

Микроскоп. Увеличение микроскопа

$$k = Ld/F_1F_2,$$

где L — расстояние наилучшего зрения; d — расстояние между фокусами объектива и окуляра; F_1, F_2 — фокусные расстояния объектива и окуляра.

Телескоп. Увеличение телескопа

$$k = \frac{F_1}{F_2},$$

где F_1, F_2 — фокусные расстояния объектива и окуляра.

Световой поток Φ, излучаемый источником, определяется из формулы

$$\Phi = \frac{W}{t},$$

где W — полная энергия излучения; t — время излучения.

Телесный угол — часть пространства, ограниченная конической поверхностью (рис. 323). Величина телесного угла измеряется отно-

шением площади S, вырезаемой этим углом на поверхности сферы (с центром O в вершине телесного угла) к квадрату радиуса сферы R:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

Единицей измерения телесного угла является стерадиан (ср) — угол, вырезающий единичную площадь на сфере единичного радиуса.

Очевидно, что телесный угол, охватывающий все пространство вокруг источника света, равен 4π ср:

$$\Omega_п = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$$

Сила света численно равна световому потоку в единице телесного угла:

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}. \qquad (*)$$

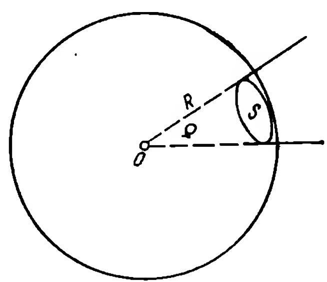


Рис. 323

В качестве единицы измерения силы света принята кандела (кд) — сила света, испускаемая при определенных условиях эталонным источником света специальной конструкции.

Из (*) следует, что единицей светового потока является световой поток, создаваемый точечным источником света с силой света, равной одной канделе в телесном угле в один стерадиан. Эта единица называется люменом (лм).

Освещенность. Освещенностью поверхности называется отношение светового потока Φ, падающего на данную поверхность, к площади этой поверхности

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

За единицу освещенности принимается люкс (лк). Люкс — освещенность поверхности площадью 1 м^2 световым потоком в 1 лм, падающим перпендикулярно к поверхности.

Точечный источник света силой I создает на площадке, отстоящей от него на расстоянии r, освещенность

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2},$$

где α — угол падения лучей.

Светимость численно равна световому потоку, испускаемому единицей площади светящегося тела:

$$R = \frac{\Phi}{S}.$$

Яркость B протяженного источника света измеряется силой света, излучаемого с единицы площади видимой (перпендикулярной к направлению наблюдения) поверхности этого источника:

$$B = \frac{J}{S_0},$$

где I — сила света; S_0 — видимая поверхность. Единицей измерения яркости является канде́ла на квадратный метр (кд/м^2).

13.1. Луч падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом $\alpha = 30°$. Выходящий из пластинки луч параллелен падающему (рис. 324). Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Какова толщина пластинки, если расстояние между лучами $CD = 3{,}88$ см?

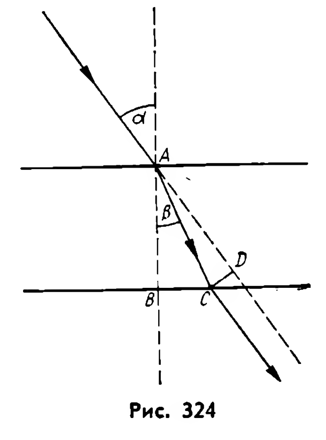


Рис. 324

Из рисунка видно, что

$$\angle BAD = \alpha; \quad \angle CAD = \alpha - \beta;$$

$$AC = \frac{CD}{\sin(\alpha - \beta)}; \quad AB = AC\cos\beta.$$

Отсюда

$$AB = \frac{CD\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Угол преломления β определяем из закона преломления $\sin\alpha/\sin\beta = n$, откуда $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}333$; $\beta \approx 19°30'$, $\alpha - \beta = 10°30'$.

После подстановки числовых значений получаем

$$AB = 0{,}2 \text{ м}.$$

13.2. Луч падает под углом α на тело с показателем преломления n. Как должны быть связаны между собой α и n, чтобы отраженный луч был перпендикулярен преломленному (рис. 325)?

Согласно закону преломления света

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Отраженный луч направлен под тем же углом к поверхности, что и луч падающий. Следовательно, угол между отраженным и преломленным лучами равен $180° - (\alpha + \beta) = 90°$ и $\beta = 90° - \alpha$. Таким образом, закон преломления может быть представлен в виде

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = n = \operatorname{tg}\alpha.$$

13.3. Взаимно перпендикулярные лучи идут из воздуха в жидкость (рис. 326). Угол преломления первого луча — β_1, второго — β_2. Найти показатель преломления жидкости.

Закон преломления для каждого из лучей:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}=n;\quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}=n.$$

Из рисунка следует: $\gamma_1+\gamma_2=90°$; $\alpha_1+\gamma_1=90°$; $\alpha_2+\gamma_2=90°$; следовательно, $\alpha_1+\alpha_2=90°$ и $\sin\alpha_1=\sin(90°-\alpha_2)=\cos\alpha_2$. Таким образом, ранее записанные законы преломления могут быть представлены в виде

$$\frac{\cos\alpha_2}{\sin\beta_1}=n;\quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}=n.$$

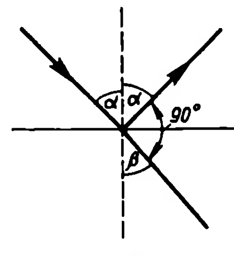


Рис. 325

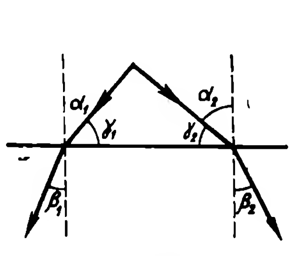


Рис. 326

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1};\quad \alpha_2=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}\right);$$

$$n=\frac{\sin\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}\right)\right]}{\sin\beta_2}=\frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta_1+\sin^2\beta_2}}.$$

13.4. Монохроматический луч падает под углом $\alpha_1=60°$ на боковую поверхность стеклянной равнобедренной призмы. Угол у вершины призмы $\gamma=40°$. На какой угол сместится луч, вышедший из призмы, если показатель преломления материала призмы $n=1{,}54$ (рис. 327)? Получить формулу для определения угла смещения луча для случая, когда угол падения на поверхность призмы и преломляющий угол призмы γ малы (преломляющий угол призмы — угол между преломляющими гранями).

Из рассмотрения треугольника DEM следует: $\alpha_2=\gamma-\beta_1$. Из треугольника DEN: $\vartheta=(\alpha_1-\beta_1)+(\beta_2-\alpha_2)=\alpha_1+\beta_2-\gamma$ или $\beta_2=\gamma+\vartheta-\alpha_1$.

Из закона преломления $\sin\alpha_1/\sin\beta_1=n$; $\sin\alpha_2/\sin\beta_2=1/n$.

$$\sin(\gamma+\vartheta-\alpha_1)=n\sin(\gamma-\beta_1); \qquad (*)$$

$$\sin\beta_1=\frac{\sin\alpha_1}{n}=0{,}562;$$

$$\beta_1=34°\,12';$$

$$\sin(\vartheta-20°)=n\sin 5°\,48'=1{,}54\cdot\sin 5°\,48',$$

Принимая $\sin\alpha \approx \alpha$, получаем

$$\vartheta - 20^\circ = 8^\circ 54',$$
$$\vartheta = 28^\circ 54'.$$

Для того чтобы вывести формулу для определения угла ϑ при малых α_1 и γ, выражение (*) представим в виде:

$$-\sin\alpha_1 \cos(\vartheta + \gamma) + \sin(\gamma + \vartheta)\cos\alpha_1 =$$
$$= n \sin\gamma \cos\beta_1 - n \sin\beta_1 \cos\gamma.$$

Вследствие малости углов γ и ϑ можем записать $\sin(\gamma + \vartheta) \approx \gamma + \vartheta$; $\cos(\gamma + \vartheta) \approx 1$; $\cos\gamma \approx 1$; $\sin\gamma \approx \gamma$.

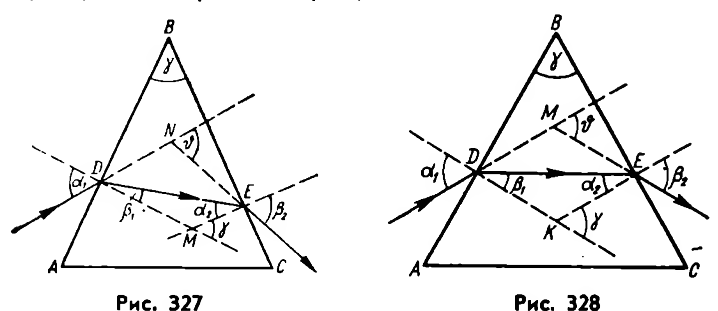


Рис. 327 Рис. 328

Таким образом, рассмотренное выражение преобразуется к виду

$$-\sin\alpha_1 + (\gamma + \vartheta)\cos\alpha_1 = \gamma n \cos\beta_1 - n \sin\beta_1.$$

Учитывая, что $n \sin\beta_1 = \sin\alpha_1$, находим

$$\vartheta \cos\alpha_1 = \gamma n \cos\beta_1 - \gamma \cos\alpha_1,$$

или

$$\vartheta = \gamma \left[\frac{n \cos\beta_1}{\cos\alpha_1} - 1\right].$$

Вследствие малости углов α_1 и β_1 можем считать $\cos\alpha_1 \approx 1$; $\cos\beta_1 \approx \approx 1$, так что

$$\vartheta = (n - 1)\gamma.$$

13.5. Монохроматический луч падает на боковую грань равнобедренной призмы и после преломления идет параллельно основанию призмы. Выйдя из призмы, он оказывается отклоненным на угол ϑ от своего первоначального направления. Найти связь между преломляющим углом призмы γ, показателем преломления n и отклонением луча ϑ (рис. 328).

Из рисунка следует, что $\beta_1 = \alpha_2$, следовательно, законы преломления света на каждой из граней можно представить в виде: $\sin\alpha_1/\sin\beta_1 = n$; $\sin\beta_1/\sin\beta_2 = 1/n$, откуда следует, что $\alpha_1 = \beta_2$.

Из треугольника DKE:

$$\gamma = \beta_1 + \alpha_2.$$

Из треугольника DME:

$$\vartheta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\beta_2 - \alpha_2).$$

Учитывая, что $\alpha_1 = \beta_2$, $\alpha_2 = \beta_1$, получаем

$$\gamma = 2\beta_1; \quad \beta_1 = \frac{\gamma}{2};$$

$$\vartheta = 2(\alpha_1 - \beta_1); \quad \alpha_1 = \frac{\vartheta + \gamma}{2}.$$

Закон преломления света на грани AB можно записать в виде:

$$\frac{\sin\frac{\gamma + \vartheta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = n$$

или

$$\sin\left(\frac{\gamma + \vartheta}{2}\right) = n \sin\frac{\gamma}{2}.$$

13.6. Проследить ход луча, падающего нормально на грань AC прямоугольной равнобедренной призмы (рис. 329). Показатель преломления материала призмы $n_1 = 1{,}6$. Как изменится картина, если призму поместить в сероуглерод, показатель преломления которого $n_2 = 1{,}63$? Угол падения луча на грань AB $\alpha = 45°$.

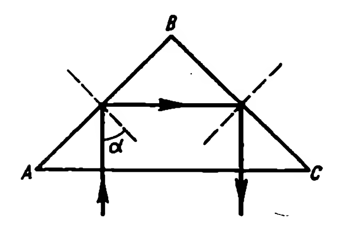


Рис. 329

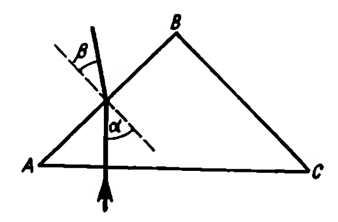


Рис. 330

Предельный угол полного внутреннего отражения находим из условия

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{1}{n_1} = 0{,}625; \quad \alpha_{пр} \approx 38° 42'.$$

Так как угол падения луча больше предельного, луч испытает полное внутреннее отражение от плоскостей AB и BC и выйдет из призмы параллельно первоначальному лучу, но в противоположном направлении.

В случае, когда призма опущена в сероуглерод, явление полного внутреннего отражения от грани AB наблюдаться не будет. Луч испытает преломление и выйдет под углом β к грани AB (рис. 330). Из закона преломления $\sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1$ получаем

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha = 0{,}694; \quad \beta \approx 43° 57'.$$

Следовательно, луч, вышедший из призмы, отклонится на угол

$$\gamma = \alpha - \beta \approx 1^\circ 3'$$

от своего первоначального направления.

13.7. Каков преломляющий угол γ призмы из стекла с показателем преломления $n = 1{,}56$, если луч, упавший нормально на одну ее грань, выходит вдоль другой (рис. 331)?

По условию задачи вышедший из призмы луч идет вдоль грани. Следовательно, угол падения на эту грань — предельный:

$$\alpha = \alpha_{пр};$$

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{1}{n} = 0{,}641; \quad \alpha = \alpha_{пр} = 39^\circ 52'.$$

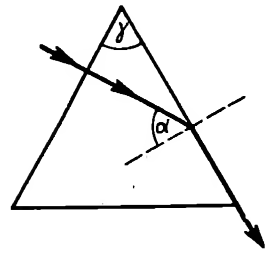


Рис. 331

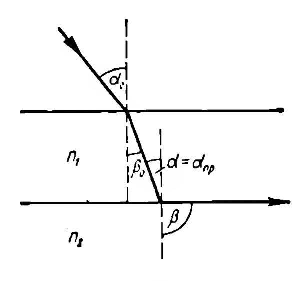


Рис. 332

Углы γ и α равны, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами:

$$\gamma = 39^\circ 52'.$$

13.8. На стакан, наполненный водой, положена стеклянная пластинка. Под каким углом должен падать на пластинку луч света, чтобы от поверхности раздела воды со стеклом произошло полное внутреннее отражение (рис. 332)? Показатели преломления стекла — $n_1 = 1{,}6$, воды — $n_2 = 1{,}33$.

Если луч падает на границу раздела оптически более плотной и оптически менее плотной сред под углом $\alpha = \alpha_{пр}$, преломленный луч скользит по границе раздела сред, т. е. угол преломления $\beta = 90^\circ$.

В таком случае согласно закону преломления

$$\frac{\sin\alpha_{пр}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_2 — показатель преломления воды.

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{n_2}{n_1} = 0{,}8312;$$

$$\alpha_{пр} = 56^\circ 13'.$$

Для границы раздела воздух — стекло закон преломления записывается в виде

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \beta_0} = n_1.$$

Из рисунка следует, что $\beta_0 = \alpha_{пр}$, т. е.

$$\sin \alpha_0 = n_1 \sin \beta_0 = 1{,}33.$$

Таким образом, получаем, что для полного внутреннего отражения на границе стекло — вода луч должен падать на стеклянную пластинку под углом, синус которого равен 1,33, что невозможно.

13.9. Показатели преломления воды — $n_1 = 1{,}33$, скипидара — $n_2 = 1{,}48$. Как должны относиться толщины слоев жидкостей, чтобы времена распространения в них луча были одинаковыми?

Показатели преломления

$$n_1 = \frac{c}{v_1}; \quad n_2 = \frac{c}{v_2},$$

где c — скорость света в вакууме; v_1, v_2 — скорости света в воде и скипидаре соответственно.

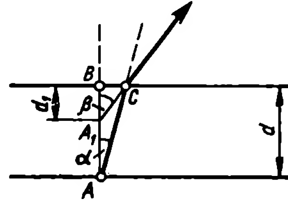


Рис. 333

$$v_1 = \frac{c}{n_1}; \quad v_2 = \frac{c}{n_2}.$$

Толщины слоев жидкостей

$$d_1 = v_1 t; \quad d_2 = v_2 t,$$

откуда

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = 1{,}112.$$

13.10. На верхней и нижней сторонах стеклянной пластинки толщиной d нанесены царапины. Чему равен показатель преломления стекла, если при наведении микроскопа с верхней царапины на нижнюю его тубус пришлось опустить на расстояние d_1 (рис. 333)? Углы отклонения лучей, попадающих в объектив, от оси микроскопа считать малыми.

Лучи от нижней царапины A после преломления на верхней границе пластинки будут казаться исходящими из точки A_1, которую можно рассматривать как изображение нижней царапины в плоскопараллельной пластинке.

При наведении микроскопа с верхней царапины на нижнюю тубус следует передвинуть на расстояние

$$A_1B = d_1.$$

Из $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC$ получим

$$BC = d \operatorname{tg} \alpha, \quad BC = d_1 \operatorname{tg} \beta,$$

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{d}{d_1}.$$

Учитывая, что для малых углов

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n,$$

находим

$$\frac{d}{d_1} = n.$$

13.11. На дне сосуда, наполненного до высоты h водой, находится точечный источник света (рис. 334). На поверхности воды плавает круглый диск так, что его центр находится над источником. При каком минимальном диаметре диска лучи от источника не будут выходить из воды?

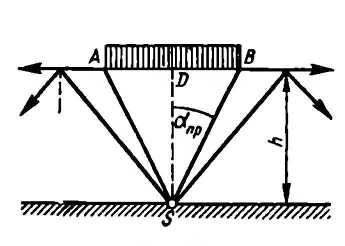


Рис. 334

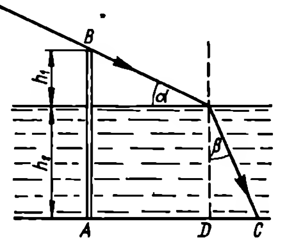


Рис. 335

Лучи, идущие из светящейся точки S, падают на границу раздела сред вода — воздух расходящимся пучком. Если на край непрозрачной пластинки (в точки A и B) лучи падают под углом α, причем $\alpha = \alpha_{пр}$ ($\alpha_{пр}$ — предельный угол), то ни один луч в воздух не попадет, так как все лучи, угол падения которого больше предельного, на границе вода — воздух испытают полное внутреннее отражение.

Для лучей, идущих из воды в воздух под предельным углом, можно записать

$$\sin \alpha_{пр} = \frac{n_2}{n_1},$$

где $n_2 = 1$ — показатель преломления воздуха; n_1 — показатель преломления воды.

Из $\triangle SDB$ находим диаметр пластинки

$$d = 2h \operatorname{tg} \alpha_{пр}.$$

Решая совместно два полученных уравнения, получаем

$$d = \frac{2h}{\sqrt{n_1^2 - 1}}.$$

13.12. Столб AB вбит в дно реки. Часть его высотой $h_1 = 1{,}5$ м возвышается над водой. Найти длину тени столба на поверхности и на дне реки, если высота солнца над горизонтом $\alpha = 40°$, а глубина реки $h_2 = 3$ м (рис. 335).

Как видно из рисунка, длина тени на поверхности воды

$$l_1 = AD = h_1 \operatorname{ctg} \alpha \approx 1{,}79 \text{ м}.$$

Длина тени на дне

$$l_2 = AC = l_1 + DC = h_1 \operatorname{ctg} \alpha + h_2 \operatorname{tg} \beta.$$

Из закона преломления

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \beta} = n;$$

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{n} \cos \alpha = 0{,}576,$$

где n — показатель преломления воды;

$$\beta = 35^\circ\, 10',$$
$$l_2 \approx 1{,}79 \text{ м} + 2{,}12 \text{ м} = 3{,}91 \text{ м}.$$

13.13. Луч, направленный горизонтально, падал на вертикальный экран. Когда на пути луча поместили небольшое зеркальце (рис. 336), то светлое пятно на экране сместилось вверх на $h = 5{,}2$ см. Определить угол падения луча на зеркальце, если расстояние от зеркальца до экрана $l = 60$ см.

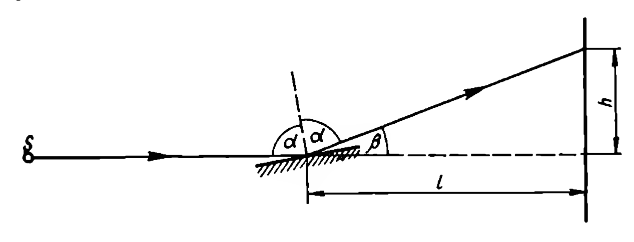


Рис. 336

Из рисунка ясно, что

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{l} \approx 0{,}0867,$$

$$\beta = 5^\circ, \quad \alpha = 87^\circ\, 30'.$$

13.14. Два плоских прямоугольных зеркала образуют двугранный угол $\gamma = 178^\circ$. На расстоянии $d = 8$ см от линии соприкосновения зеркал и на одинаковом расстоянии от каждого из них находится точечный источник света. Определить расстояние между мнимыми изображениями источника в зеркалах.

Построим изображение источника S в каждом из зеркал (рис. 337). Так как лучи SA и SB перпендикулярны к плоскостям зеркал, то из чертежа следует

$$\angle ASB = \alpha, \quad AS = d \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Учитывая, что мнимое изображение в плоском зеркале находится на расстоянии, равном расстоянию предмета до зеркала, т. е.

$$AS = AS_1,$$

находим

$$S_1K = SS_1 \sin\frac{\alpha}{2} = 2AS \sin\frac{\alpha}{2} = 2d\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = d\sin\alpha.$$

Расстояние между мнимыми источниками

$$S_1S_2 = 2S_1K = 2d\sin\alpha = 2d\sin(180° - \gamma) = 0{,}56 \text{ см}.$$

13.15. Два зеркала наклонены друг к другу и образуют двугранный угол α (рис. 338). На одно из них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к ребру угла. Найти, на какой угол повернется луч после отражения в обоих зеркалах.

Обозначим угол поворота луча через φ. Из рисунка следует, что

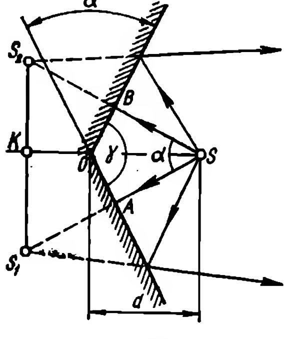


Рис. 337

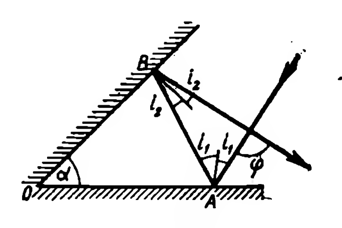


Рис. 338

$\alpha = i_1 + i_2$, где i_1 — угол падения луча на плоскость OA; i_2 — угол падения луча на плоскость OB. Угол поворота луча

$$\varphi = 2i_1 + 2i_2 = 2\alpha.$$

13.16. Определить предельный угол полного внутреннего отражения для алмаза в воздухе и воде.

Известно, что при предельном угле падения преломленный луч скользит вдоль границы раздела двух сред, т. е. угол преломления $\beta = 90°$. Согласно закону преломления

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления алмаза и воздуха (или воды).

Для алмаза в воздухе ($n_2 \approx 1$)

$$\sin\alpha_{пр1} = \frac{1}{n_1} = 0{,}3937; \quad \alpha_{пр1} = 23°\,11'.$$

Для алмаза в воде

$$\sin\alpha_{пр2} = \frac{n_2}{n_1} = 0{,}5236; \quad \alpha_{пр2} = 31°\,34'.$$

13.17. Радиус кривизны вогнутого зеркала $R = 90$ см. Найти положение предмета, при котором его изображение будет действительным и увеличенным в три раза. Где должен находиться предмет, чтобы его изображение было мнимым и увеличенным в три раза?

Построим изображение предмета в вогнутом зеркале (рис. 339, *а*). Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 имеем

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA},$$

где $OA_1 = f$ — расстояние изображения от зеркала; $OA = d$ — расстояние предмета от зеркала.

Фокусное расстояние $F = R/2$, где R — радиус кривизны зеркала.

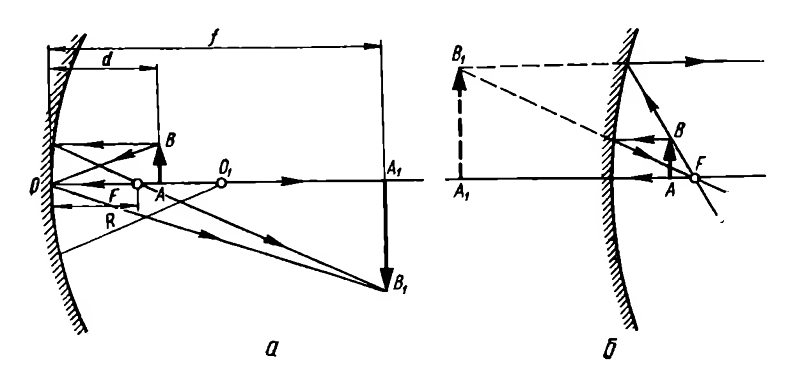


Рис. 339

В случае действительного изображения $2/R = 1/d + 1/f$. Согласно условию задачи $f = 3d$, откуда

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{3d} \text{ и } d = \frac{2}{3}R = 60 \text{ см.}$$

Если изображение мнимое (рис. 339, *б*), $2/R = 1/d - 1/f$; $2/R = 1/d - 1/3d$ и

$$d = \frac{1}{3}R = 30 \text{ см.}$$

13.18. Сходящиеся лучи падают на выпуклое зеркало так, что их продолжения пересекаются в точке, находящейся на расстоянии $x = 0{,}2$ м за зеркалом (рис. 340). После отражения от зеркала лучи расходятся таким образом, что их продолжения пересекаются в точке, отстоящей от зеркала на расстоянии $l = 0{,}8$ м. Обе точки пересечения лежат на главной оптической оси зеркала. Определить фокусное расстояние зеркала.

Точка B изображает мнимый источник света, расстояние BO представляет собой расстояние от мнимого источника до зеркала. Точка A является изображением мнимого источника B в зеркале. В данном

случае для мнимого изображения формула сферического зеркала может быть записана в виде

$$-\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}.$$

Величины d и f взяты со знаком «минус», так как источник и изображение являются мнимыми; фокусное расстояние выпуклого зеркала также берется со знаком «минус».

Таким образом,

$$F=\frac{df}{d+f}=\frac{xl}{x+l}=0{,}16 \text{ м.}$$

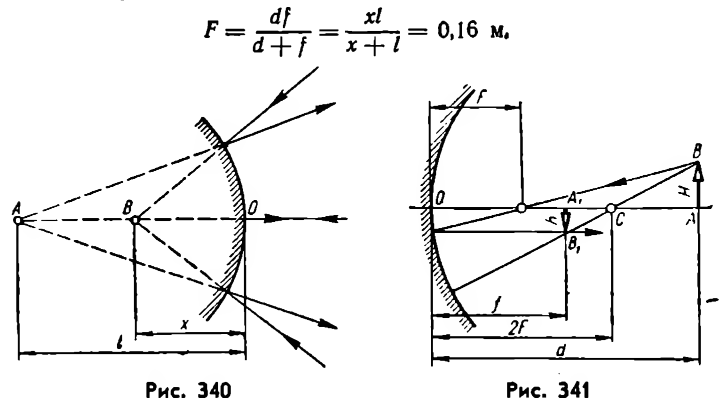


Рис. 340 Рис. 341

13.19. Определить фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала, которое дает действительное уменьшенное в три раза изображение предмета при расстоянии между предметом и изображением $l = 20$ см.

Уменьшенное действительное изображение предмета в вогнутом зеркале получается в том случае, когда предмет находится за оптическим центром зеркала. Построим для данного случая изображение предмета (рис. 341). Из формулы сферического зеркала

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F};$$

$$F=\frac{df}{d+f}.$$

Из рисунка видно, что

$$d=f+l;$$

$$F=\frac{(f+l)f}{2f+l}.$$

Из подобия треугольников A_1B_1C и ABC имеем

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C};$$

$$\frac{H}{h}=\frac{d-2F}{2F-f}.$$

Преобразуем последнее уравнение, прибавив к обеим его частям по единице:

$$\frac{H}{h} + 1 = \frac{d - 2F}{2F - f} + 1.$$

Приведя к общему знаменателю правую часть, получим

$$\frac{H}{h} + 1 = \frac{d - f}{2F - f} = \frac{l}{2F - f}.$$

Подставив в правую часть полученного уравнения выражение для F, после преобразований получаем

$$f = \frac{l}{\frac{H}{h} - 1} = 0{,}1 \text{ м}$$

и окончательно

$$F = \frac{(f + l) f}{2f + l} = 0{,}075 \text{ м}.$$

13.20. На пути лучей, сходящихся в точке S, поставили плоское зеркало (рис. 342). После отражения лучи сошлись в точке S_1. Определить положение точки S_1 относительно зеркала, если расстояние от точки S до зеркала равно d.

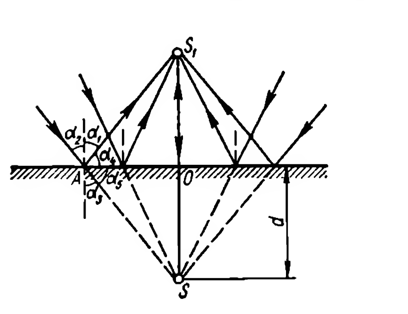


Рис. 342

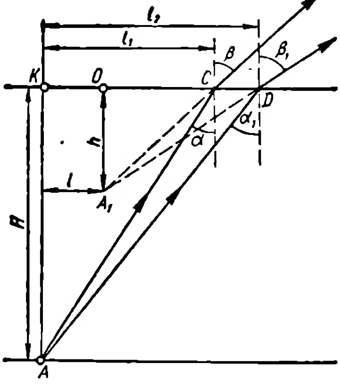


Рис. 343

Так как луч, идущий по перпендикуляру к зеркалу в точку S, меняет направление своего распространения на обратное, изображение точки S_1 должно находиться на продолжении перпендикуляра SO. Из законов отражения и геометрии следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\alpha_2 = \alpha_3$. Таким образом, $\alpha_4 = \alpha_5$. Это означает, что AO в треугольнике SAS_1 является биссектрисой и высотой, а следовательно, и медианой, т. е.

$$S_1O = SO = d.$$

13.21. На дне реки глубиной $H = 2$ м лежит предмет (рис. 343). Где будет видеть изображение этого предмета человек, луч зрения

которого составляет угол $\beta = 30°$ с перпендикуляром к поверхности воды?

Изображение предмета будет находиться в точке A_1 пересечения продолжений преломленных лучей. Точка A_1 смещена относительно точки A на расстояние $(H-h)$ по вертикали и на расстояние l по горизонтали.

Из треугольников A_1OC и A_1OD имеем: $l_1 - l = h \operatorname{tg} \beta$; $l_2 - l = h \operatorname{tg} \beta_1$.

Из треугольников AKC и AKD: $l_1 = H \operatorname{tg} \alpha$; $l_2 = H \operatorname{tg} \alpha_1$.

Углы α_1 и β_1 можно представить как

$$\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha; \quad \beta_1 = \beta + \Delta\beta.$$

Очевидно, что величины $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ малы, так как они дают разницу в углах падения и преломления лучей пучка, попадающего в глаз наблюдателя.

Из первых двух уравнений получаем

$$l = l_1 - h \operatorname{tg} \beta = l_2 - h \operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta).$$

Подставив сюда выражения для l_1 и l_2, находим

$$l = H \operatorname{tg} \alpha - h \operatorname{tg} \beta = H \operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha) - h \operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta)$$

или

$$h = H \frac{\operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha) - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta) - \operatorname{tg} \beta} = H \frac{\sin \Delta\alpha \cos \beta \cos (\beta + \Delta\beta)}{\cos \alpha \cos (\alpha + \Delta\alpha) \sin \Delta\beta}.$$

Учитывая малость углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$, вследствие чего $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$; $\sin \Delta\beta \approx \Delta\beta$; $\cos \Delta\alpha \approx 1$; $\cos \Delta\beta \approx 1$, получаем

$$h = H \frac{\cos^2 \beta \cdot \Delta\alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \Delta\beta}.$$

Из законов преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}; \quad \frac{\sin (\alpha + \Delta\alpha)}{\sin (\beta + \Delta\beta)} = \frac{1}{n}$$

находим

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin (\alpha + \Delta\alpha)}{\sin (\beta + \Delta\beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \Delta\alpha + \cos \alpha \sin \Delta\alpha}{\sin \beta \cos \Delta\beta + \cos \beta \sin \Delta\beta};$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \Delta\alpha \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \sin \beta + \Delta\beta \sin \alpha \cos \beta;$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} = \frac{\cos \beta}{n \cos \alpha}$$

Окончательно

$$h = \frac{H}{n} \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)^3.$$

Из закона преломления, зная, что показатель преломления воды $n = 1{,}33$, находим

$$\sin \alpha = 0{,}375; \quad \alpha = 22°;$$

$$h \approx 122 \text{ см};$$

$$l \approx 10{,}4 \text{ см}.$$

13.22. Плоское зеркало поворачивают вокруг оси, проходящей через точку падения луча и перпендикулярной к плоскости, в которой лежат падающий и отраженный лучи. На какой угол повернули зеркало, если отраженный от него луч повернулся на угол ϑ? На какую величину изменится угол между падающим и отраженным лучами?

Пусть AA — первоначальное положение плоского зеркала (рис. 344), угол падения луча SO на него равен α_1. При повороте зеркала на угол γ угол падения луча стал равным

$$\alpha_2 = \gamma + \alpha_1,$$

следовательно, отраженный луч повернется на угол

$$\vartheta = (\alpha_2 + \gamma) - \alpha_1 = \gamma + \alpha_1 + \gamma - \alpha_1 = 2\gamma.$$

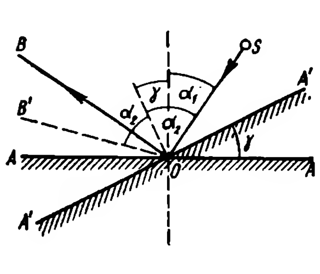


Рис. 344

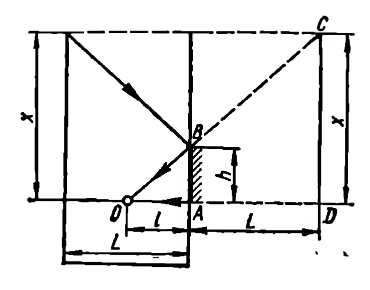


Рис. 345

Отсюда угол поворота зеркала

$$\gamma = \frac{\vartheta}{2}.$$

Угол между падающим и отраженным лучами изменится на

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\, 2 = 2\gamma = \vartheta.$$

13.23. На стене висит зеркало высотой h (рис. 345). Человек стоит на расстоянии l от зеркала. Какова высота участка противоположной стены, который может увидеть в зеркале человек, не изменяя положения головы? Стена находится на расстоянии L.

Изображение будет находиться за зеркалом на расстоянии L. Пусть глаз находится в точке O. При этом в него могут попасть после отражения в зеркале AB лишь лучи, исходящие из всех точек участка изображения стены CD. Из подобия треугольников OAB и OCD имеем

$$\frac{AB}{DC} = \frac{OA}{OD},$$

т. е.

$$\frac{h}{x} = \frac{l}{l+L}; \quad x = \frac{h(l+L)}{l}.$$

13.24. На дне стеклянной ванночки лежит зеркало, поверх которого налит слой воды толщиной d (рис. 346). В воздухе на высоте h от поверхности воды висит лампа S. На каком расстоянии от поверхности зеркала будет находиться изображение лампы?

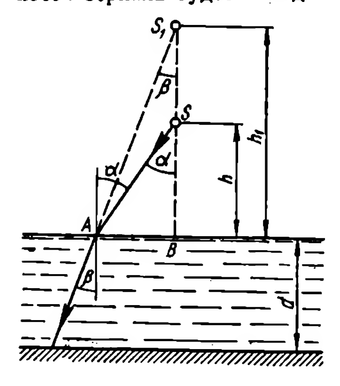


Рис. 346

Если смотреть на лампу из воды, она будет казаться расположенной в точке S_1, лежащей на продолжении лучей, попадающих в глаз наблюдателя. Из треугольников ABS и ABS_1 находим

$$AB = BS \operatorname{tg} \alpha = h \operatorname{tg} \alpha;$$
$$AB = BS_1 \operatorname{tg} \beta = h_1 \operatorname{tg} \beta,$$

отсюда

$$h_1 = h \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Для малых углов $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$; $\operatorname{tg} \beta \approx \sin \beta$

$$h_1 = h \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = nh.$$

Изображение лампы S_1 в плоском зеркале будет находиться на расстоянии $d + nh$ от зеркала.

13.25. Радиус вогнутого сферического зеркала — R. На главной оптической оси этого зеркала помещен точечный источник света S

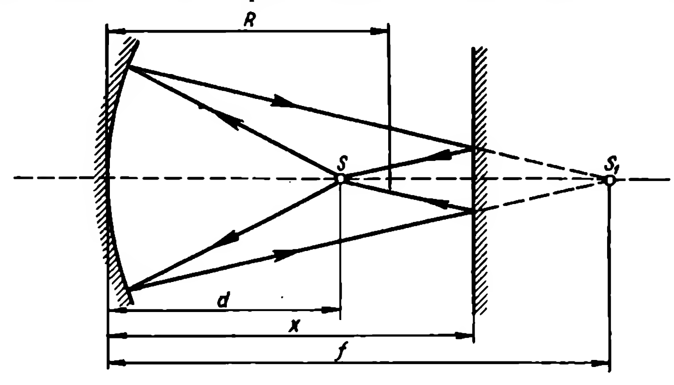


Рис. 347

на расстоянии d от зеркала. На каком расстоянии от вогнутого зеркала нужно поставить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные вогнутым, а затем плоским зеркалом, вернулись в точку S (рис. 347)?

Найдем положение изображения, которое образуется при отражении лучей вначале от вогнутого, потом от плоского зеркала, учитывая, что изображение, получаемое в вогнутом зеркале, играет роль источника для плоского зеркала. Так как изображение в плоском

зеркале S_1 лежит на том же расстоянии, что и источник, то $x - d = f - x$, т. е. $x = \frac{f + d}{2}$.

Применяя формулу сферического зеркала и учитывая, что фокусное расстояние $F = R/2$, получим

$$f = \frac{dF}{d - F} = \frac{dR}{2d - R}$$

и

$$x = \frac{f + d}{2} = \frac{d^2}{2d - R}.$$

13.26. Выпуклое и вогнутое зеркала имеют одинаковые радиусы кривизны R. Расстояние между ними равно $2R$. В какой точке на оптической оси зеркал нужно поместить точечный источник света S, чтобы лучи после отражения сначала от выпуклого, а затем от вогнутого зеркала снова собрались в точке S (рис. 348)?

Пусть a — расстояние от источника до вогнутого зеркала, f — расстояние от изображения, даваемого выпуклым зеркалом, до этого зеркала (рис. 348). Запишем формулу выпуклого сферического зеркала $1/d - 1/f = -2/R$, или

$$1/(2R - a) - 1/f = -2/R. \qquad (1)$$

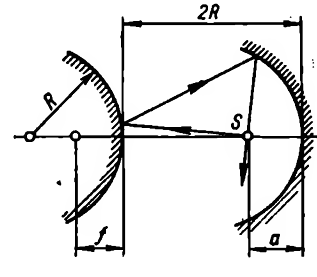




Рис. 348

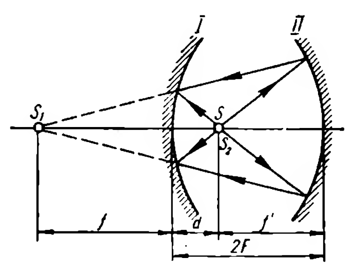


Рис. 349

Изображение в выпуклом зеркале является источником для вогнутого зеркала. Если точка пересечения лучей после двух отражений совпадает с источником, формула вогнутого сферического зеркала будет иметь вид:

$$\frac{1}{2R + f} + \frac{1}{a} = \frac{2}{R}. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) найдем расстояние от источника до выпуклого зеркала

$$f = \frac{R(2R - a)}{5R - 2a};$$

подставив это выражение в (2), после преобразований получим

$$2a^2 - 6Ra + 3R^2 = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $a < 2R$, получаем $a = 0{,}63R$.

13.27. Два одинаковых вогнутых зеркала I и II поставлены друг против друга так, что их главные фокусы совпадают (рис. 349). Светящаяся точка помещена на общей оси зеркал на расстоянии d от зеркала I. Где получится изображение после отражения лучей от обоих зеркал?

Найдем положение изображения, которое получается при отражении лучей сначала от первого, затем от второго зеркала, учитывая, что изображение, получаемое в первом зеркале, играет роль источника для второго зеркала.

Формула сферического зеркала I: $1/d + 1/f = 1/F$ или

$$f = \frac{dF}{d - F}.$$

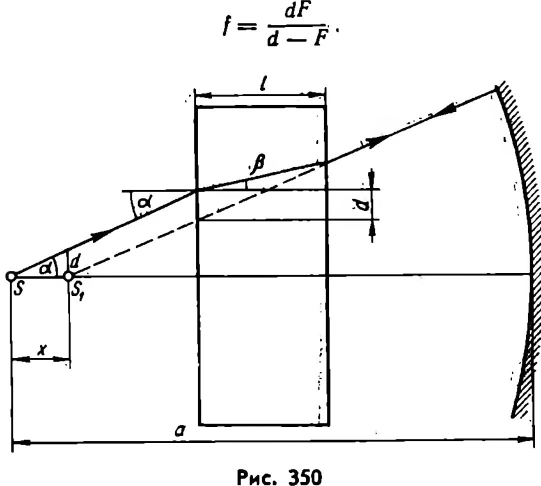


Рис. 350

Если изображение мнимое, $f < 0$; если изображение действительное, $f > 0$.

Для зеркала II:

$$\frac{1}{2F - f} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{F},$$

где f' — расстояние от изображения S_2 до зеркала II. Из последнего уравнения

$$f' = \frac{F(2F - f)}{F - f} = 2F - d.$$

Таким образом, изображение, получающееся после отражения лучей от обоих зеркал, совпадает с самим источником.

13.28. На расстоянии $a = 51$ см от вогнутого зеркала, оптическая сила которого $D = +4$ диоптрии, находится источник света S (рис. 350). Между зеркалом и источником расположена плоскопараллельная пластинка, показатель преломления которой $n = 1{,}5$. При какой толщине пластины изображение будет совпадать с источником? Считать, что размер зеркала достаточно мал, так что отношение тан-

генсов углов падения и преломления лучей в пластинке можно заменить отношением их синусов.

Проходя через плоскопараллельную пластинку, лучи смещаются. Точку S_1, в которой пересекаются продолжения лучей, выходящих из пластинки, можно рассматривать как мнимое изображение источника S, даваемое плоскопараллельной пластинкой. Это изображение играет роль источника для вогнутого зеркала.

Если точка S_1 окажется лежащей в оптическом центре зеркала, отраженные и падающие лучи будут идти вдоль одной прямой (вдоль радиуса) навстречу друг другу и после вторичного прохождения пластинки вновь соберутся в точке S. Следовательно,

$$x = a - 2F = a - \frac{2}{D} = 0{,}01 \text{ м},$$

где D — оптическая сила зеркала.

Как видно из рисунка, вертикальное смещение луча, прошедшего через пластинку,

$$d = l\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta),$$

где α и β — углы падения и преломления соответственно. Кроме того,

$$x = d/\operatorname{tg}\alpha = l\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

Для малых углов отношение тангенсов можно заменить отношением синусов:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом,

$$x = l\,\frac{n-1}{n},$$

откуда

$$l = \frac{xn}{n-1} = \frac{1 \cdot 1{,}5}{1{,}5-1} = 3 \text{ см}.$$

13.29. Найти фокусные расстояния линз:

1) двояковыпуклой $R_1 = 15$ см; $R_2 = 25$ см;
2) плоско-выпуклой $R_1 = 15$ см, $R_2 = \infty$;
3) вогнуто-выпуклой $R_1 = -15$ см; $R_2 = 25$ см;
4) двояковогнутой $R_1 = -15$ см; $R_2 = -25$ см.

Показатель преломления материала линз $n = 1{,}5$.

Из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где F — фокусное расстояние; n — относительный показатель преломления; R_1, R_2 — радиусы кривизны поверхностей линзы, получаем

$$F = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_1 + R_2)}.$$

После подстановки чисел находим

$$F_1 = 0{,}1875 \text{ м}; \quad F_2 = 0{,}3 \text{ м}; \quad F_3 = -0{,}75 \text{ м}; \quad F_4 = -0{,}1875 \text{ м}.$$

13.30. Найти фокусное расстояние линзы, погруженной в скипидар, если известно, что ее фокусное расстояние в воздухе равно 50 см. Показатель преломления стекла, из которого сделана линза, $n_1 = 1{,}6$.

Фокусное расстояние линзы в воздухе

$$F_1 = \frac{R_1 R_2}{(n_1 - 1)(R_1 + R_2)},$$

где R_1, R_2 — радиусы кривизны линзы.

Фокусное расстояние линзы, погруженной в скипидар,

$$F_2 = \frac{R_1 R_2}{\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)(R_1 + R_2)},$$

где n_2 — показатель преломления скипидара.

Из вышеприведенных выражений находим

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(n_1 - 1)}{\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)};$$

$$F_2 = F_1 \frac{(n_1 - 1)}{\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)} = 3{,}6 \text{ м}.$$

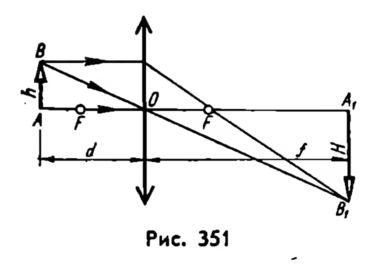


Рис. 351

13.31. На расстоянии $d = 15$ см от двояковыпуклой линзы, оптическая сила которой $D = 10$ диоптрий, поставлен перпендикулярно к главной оптической оси предмет высотой $h = 4$ см (рис. 351). Найти положение и высоту изображения.

Фокусное расстояние линзы

$$F = \frac{1}{D} = 0{,}1 \text{ м}.$$

Строим изображение. Из формулы линзы $1/d + 1/f = 1/F$ находим расстояние изображения от линзы

$$f = dF/(d - F) = 0{,}3 \text{ м}.$$

Из подобия треугольников ABO и A_1B_1O находим (обозначив через h высоту предмета и через H высоту изображения)

$$\frac{H}{h} = \frac{f}{d}; \quad H = h\frac{f}{d} = 8 \text{ см}.$$

13.32. Линза с фокусным расстоянием $F = 16$ см дает резкое изображение предмета в положениях *1* и *2*, расстояние между которыми $l = 60$ см (рис. 352). Найти расстояние L от предмета до экрана.

Если расстояние от предмета до экрана больше $4F$, то всегда найдутся два таких положения линзы, при которых на экране получается отчетливое изображение предмета: в одном случае увеличенное (A'), в другом — уменьшенное (a'). Воспользовавшись формулой линзы, можно записать выражения для фокусного расстояния линзы в положениях *1* и *2*:

$$F = \frac{f_1 d_1}{f_1 + d_1} = \frac{(f_2 + l)(L - f_2 - l)}{L};$$
$$F = \frac{f_2 d_2}{f_2 + d_2} = \frac{f_2 (L - f_2)}{L}. \qquad (*)$$

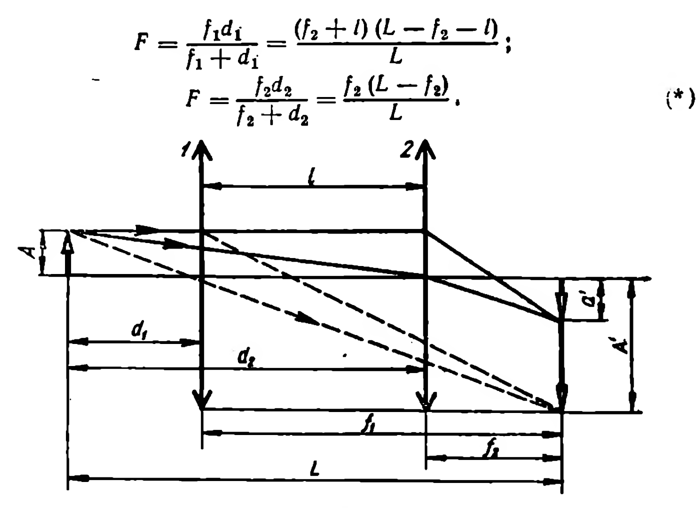


Рис. 352

Приравняв правые части этих уравнений, найдем

$$f_2 = \frac{L - l}{2}.$$

Подставив выражения для f_2 в уравнение (*), после преобразований получим

$$F = \frac{L^2 - l^2}{4L}$$

и

$$L^2 - 4LF - l^2 = 0,$$

откуда

$$L_{1,2} = 2F \pm \sqrt{4F^2 + l^2} = (32 \pm 68)\ \text{см}; \quad L = 100\ \text{см}$$

(знак «минус» отбрасываем, так как $L > 0$).

13.33. Если расстояние предмета от линзы $d_1 = 36$ см, то высота изображения $H_1 = 10$ см. Если же расстояние предмета от линзы $d_2 = 24$ см, то высота изображения $H_2 = 20$ см. Определить фокусное расстояние линзы.

Увеличения линзы в обоих случаях соответственно равны

$$\frac{H_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}; \quad \frac{H_2}{h} = \frac{f_2}{d_2},$$

где h — высота предмета; f_1 и f_2 — расстояния от изображения до линзы в обоих случаях соответственно. Отсюда

$$\frac{H_2}{H_1}=\frac{f_2 d_1}{f_1 d_2}$$

и

$$f_2=f_1\frac{H_2 d_2}{d_1 H_1}=\frac{4}{3}f_1.$$

Используя уравнение линзы, напишем выражения для фокусного расстояния

$$F=\frac{f_1 d_1}{f_1+d_1};\quad F=\frac{f_2 d_2}{f_2+d_2}=\frac{\frac{4}{3}f_1 d_2}{\frac{4}{3}f_1+d_2}.$$

Приравнивая правые части написанных уравнений, получим

$$\frac{d_1}{f_1+d_1}=\frac{\frac{4}{3}d_2}{\frac{4}{3}f_1+d_2},$$

откуда, после преобразований,

$$f_1=\frac{0,25 d_1 d_2}{d_1-d_2}=18 \text{ см},$$

$$F=\frac{f_1 d_1}{f_1+d_1}=12 \text{ см}.$$

13.34. Каково главное фокусное расстояние линзы F, если для получения изображения предмета в натуральную величину он должен быть помещен на расстоянии $d=25$ см от линзы? Какова оптическая сила линзы?

Увеличение, даваемое линзой, определяется по формуле

$$\frac{H}{h}=\frac{f}{d}.$$

По условию задачи $H/h=1$, следовательно, $f=d$ и

$$F=\frac{fd}{f+d}=\frac{d^2}{2d}=\frac{d}{2}=12,5 \text{ см};$$

$$D=\frac{1}{F}=8 \text{ диоптрий}.$$

13.35. Угловой диаметр солнечного диска при наблюдении с Земли $\varphi=32'$. Определить диаметр изображения Солнца, даваемого собирающей линзой с фокусным расстоянием $F=0,5$ м.

Предмет, т. е. Солнце, находится на бесконечности от линзы, следовательно, согласно формуле линзы

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{f}.$$

Таким образом, расстояние от изображения до линзы f равно фокусному расстоянию линзы F, т. е. изображение Солнца будет лежать в фокальной плоскости линзы. Если диаметр Солнца виден под углом φ, то диаметр изображения Солнца (рис. 353)

$$AB = 2AC = 2F \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Вследствие малости угла φ можно положить $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \approx \varphi/2$, откуда

$$AB = F\varphi = 5{,}7 \text{ мм}.$$

13.36. На рассеивающую линзу падает сходящийся пучок лучей. После преломления в линзе лучи пересекаются в точке, лежащей

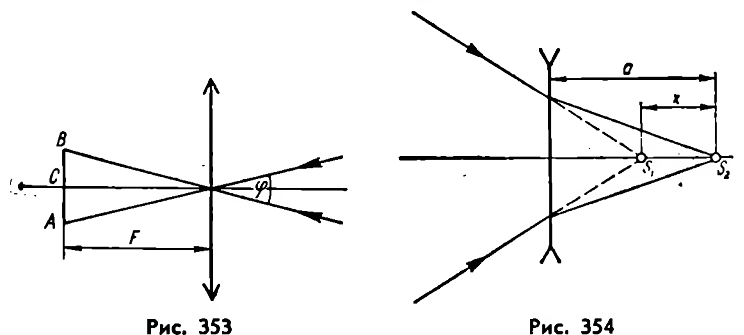


Рис. 353 Рис. 354

на расстоянии a от линзы. Если линзу убрать, то точка встречи лучей переместится на расстояние x ближе к тому месту, где находилась линза. Определить фокусное расстояние линзы.

В данном случае (рис. 354) точка S_1 играет роль источника, а точка S_2 — роль изображения. Формула рассеивающей линзы

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}.$$

Учитывая, что согласно условию задачи

$$d = a - x; \quad f = a,$$

находим

$$F = \frac{df}{d-f} = \frac{a(a-x)}{-x} = \frac{a(x-a)}{x}.$$

13.37. Предмет расположен в фокальной плоскости рассеивающей линзы. Во сколько раз линза уменьшает размеры предмета?

Запишем формулу линзы $-1/F = 1/d + 1/f$. Согласно условию задачи d — расстояние от линзы до предмета — равно фокусному расстоянию F, следовательно, расстояние от изображения до линзы $f = -F/2$, а увеличение, даваемое линзой,

$$k = \frac{f}{d} = \frac{F/2}{F} = 0{,}5$$

(размеры предмета уменьшаются в два раза).

13.38. Если точечный источник света поместить на расстоянии d_1 (рис. 355) от рассеивающей линзы диаметром D_0, вставленной в оправу, то на экране L, находящемся на расстоянии l за линзой, получится светлое пятно диаметром D_1. Каков будет диаметр пятна на экране, если источник поместить в фокусе линзы?

Пусть в первом положении светящаяся точка находится от линзы на расстоянии $d_1 > F$. Изображение источника S будет находиться в точке S_1.

Из подобия треугольников S_1BO и S_1KL получаем

$$\frac{D_1}{D_0} = \frac{S_1L}{S_1O} \quad \text{или} \quad \frac{D_1}{D_0} = \frac{f_1 + l}{f_1},$$

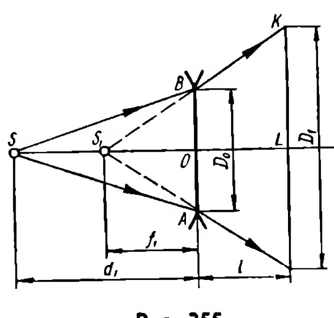


Рис. 355

Рис. 356

откуда

$$f_1 = \frac{D_0 l}{D_1 - D_0}.$$

Из формулы линзы находим

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1};$$

$$F = \frac{f_1 d_1}{d_1 - f_1} = \frac{D_0 l d_1}{[d_1(D_1 - D_0) - D_0 l]}.$$

Для второго положения источника (рис. 356) из подобия треугольников S_1BO и S_1MN получаем

$$\frac{D_2}{D_0} = \frac{S_1N}{S_1O}, \quad \text{или} \quad \frac{D_2}{D_0} = \frac{f_2 + l}{f_2}.$$

Формула линзы в этом случае дает

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f_2},$$

т. е. $f_2 = \frac{F}{2}$, так как $d_2 = F$. Таким образом,

$$D_2 = D_0 \frac{f_2 + l}{f_2} = D_0 \frac{F + 2l}{F} = D_0 \left(1 + \frac{2l}{F}\right) = 2D_1 - \frac{2l + d_1}{d_1} D_0.$$

13.39. Предмет в виде отрезка длиной l расположен вдоль оптической оси тонкой положительной линзы с фокусным расстоянием F. Середина отрезка расположена на расстоянии d от линзы и линза дает действительное изображение всех точек предмета. Определить продольное увеличение предмета.

Пусть A_1 — изображение точки A, а B_1 — изображение точки B (рис. 357). Применим формулу линзы: $1/F = 1/\left(d - \frac{l}{2}\right) + 1/f_2$; $1/F = 1/\left(d + \frac{l}{2}\right) + 1/f_1$, откуда

$$f_1 = \frac{F\left(d + \frac{l}{2}\right)}{d + \frac{l}{2} - F}; \quad f_2 = \frac{F\left(d - \frac{l}{2}\right)}{d - \frac{l}{2} - F}.$$

Длина изображения предмета

$$A_1B_1 = f_2 - f_1 = \frac{F^2 l}{(d-F)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

Искомое увеличение

$$k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{f_2 - f_1}{l} = \frac{F^2}{(d-F)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

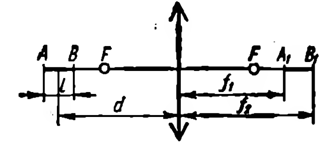


Рис. 357

13.40. На некотором расстоянии от тонкой собирающей линзы помещен предмет. На экране при этом получено его четкое изображение. Линейное увеличение полученного изображения равно k_1. Затем предмет был удален от линзы на расстояние l от своего предыдущего положения. Передвинув экран, вновь получили четкое изображение, причем линейное увеличение оказалось равным k_2. Чему равно фокусное расстояние линзы?

Линейное увеличение

$$k_1 = \frac{f_1}{d_1}; \quad k_2 = \frac{f_2}{d_2} = \frac{f_2}{d_1 + l},$$

где f_1 и f_2 — расстояние изображений от линзы для каждого из положений предмета соответственно; d_1 и d_2 — расстояния предмета от линзы. Согласно формуле линзы $1/F = 1/d_1 + 1/f_1$ и $1/F = 1/(d_1 + l) + 1/f_2$, или

$$\frac{d_1}{F} = 1 + \frac{d_1}{f_1} \text{ и } \frac{d_1 + l}{F} = 1 + \frac{d_1 + l}{f_2};$$

$$\frac{d_1}{F} = 1 + \frac{1}{k_1}; \quad \frac{d_1 + l}{F} = 1 + \frac{1}{k_2}.$$

Почленно вычитая два последних уравнения, получим

$$\frac{l}{F} = \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1},$$

откуда

$$F = \frac{k_1 k_2 l}{k_1 - k_2}.$$

13.41. Найти продольную хроматическую аберрацию двояковыпуклой линзы, поверхности которой имеют одинаковые радиусы кривизны $R_1 = R_2 = 16$ см. Показатели преломления материала, из которого изготовлена линза, для красного ($\lambda_1 = 76$ нм) и фиолетового ($\lambda_2 = 43$ нм) лучей равны соответственно 1,5 и 1,8.

Найти продольную хроматическую аберрацию — в данном случае значит найти расстояние между фокусами линзы для красных и фиолетовых лучей. Используя формулу линзы, имеем:

$$F_1 = \frac{R_1 R_2}{(n_1 - 1)(R_1 + R_2)} = \frac{R_1}{2(n_1 - 1)}; \quad F_2 = \frac{R_1}{2(n_2 - 1)};$$

$$\Delta F = F_1 - F_2 = \frac{R_1}{2}\left[\frac{1}{n_1 - 1} - \frac{1}{n_2 - 1}\right] = \frac{R_1}{2}\frac{(n_2 - n_1)}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)} = $$
$$= 6 \text{ см}.$$

13.42. Точка S движется со скоростью $v = 4$ см/с (рис. 358). С какой скоростью движется ее изображение, если $d = 30$ см, а фокусное расстояние линзы 20 см?

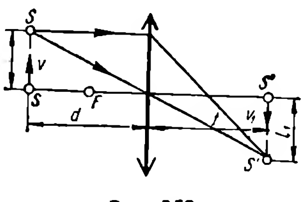


Рис. 358

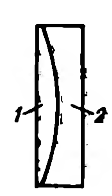


Рис. 359

Пусть точка S прошла за время t путь l. Ее изображение за этот промежуток времени пройдет путь l_1. Увеличение линзы $k = f/d$ или $k = l_1/l$. Из формулы линзы имеем

$$f = \frac{dF}{d - F},$$

следовательно,

$$k = \frac{F}{d - F}.$$

Путь, пройденный изображением,

$$l_1 = kl = \frac{Fl}{d - F}.$$

Скорость движения изображения

$$v_i = \frac{l_i}{t} = \frac{F}{d-F}\frac{l}{t} = \frac{F}{d-F}v = 8 \text{ см/с}.$$

13.43. Линзы *1* и *2* сделаны из одного сорта стекла (рис. 359). Найти оптическую силу линзы *2*, зная, что оптическая сила линзы *1* составляет 5 диоптрий.

Линзы *1* и *2* образуют плоскопараллельную пластинку, оптическая сила которой равна нулю, т. е. $D_1 + D_2 = 0$, где D_1 и D_2 — оптические силы линз *1* и *2* соответственно. Таким образом,

$$D_2 = -D_1 = -5 \text{ диоптрий}.$$

13.44. На плоском зеркале лежит плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием 25 см. Какова оптическая сила системы?

Свет, падающий на эту систему, проходит через линзу, отражается от зеркала и вновь проходит через линзу. Таким образом, оптическая сила системы $D = D_1 + D_2 + D_1$, где D_1 — оптическая сила линзы; D_2 — оптическая сила зеркала. Учитывая, что $D_1 = 1/F = 4$ диоптрий; $D_2 = 0$, находим $D = 8$ диоптрий.

13.45. Вогнутое зеркало заполнено скипидаром. Зная, что радиус кривизны зеркала $R = 60$ см, а показатель преломления скипидара $n = 1{,}48$, найти оптическую силу системы и ее фокусное расстояние.

Свет проходит через «скипидарную» линзу, отражается от зеркала и вновь проходит через линзу. Оптическая сила такой системы $D = 2D_1 + D_2$, где D_1 — оптическая сила «скипидарной» плоско-выпуклой линзы; D_2 — оптическая сила зеркала. Учитывая, что

$$D_1 = \frac{1}{F_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{0{,}48}{R}; \quad D_2 = \frac{1}{F_2} = \frac{2}{R},$$

находим

$$D = \frac{0{,}96}{R} + \frac{2}{R} = \frac{2{,}96}{R} \approx 4{,}92 \text{ диоптрий},$$

$$F = \frac{1}{D} \approx 0{,}2 \text{ м}.$$

13.46. Воздушная полость в стекле имеет форму плоско-выпуклой линзы. Найти фокусное расстояние этой линзы, если известно, что фокусное расстояние линзы из стекла, совпадающей по форме с полостью, равно в воздухе F_1.

Согласно формуле

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right),$$

где $n_{ср}$ — показатель преломления среды. Плоско-выпуклая линза может быть собирающей или рассеивающей в зависимости от того, что больше: показатель преломления среды $n_{ср}$ или показатель преломления материала линзы n. Для случая стеклянной линзы в воздухе ($n_{ср} = 1$)

$$\frac{1}{F_1} = (n-1)\frac{1}{R},$$

где n — показатель преломления стекла. Для случая воздушной линзы в стекле

$$\frac{1}{F_2} = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\frac{1}{R}.$$

Из двух последних уравнений находим

$$F_2 = F_1 \frac{n-1}{\frac{1}{n} - 1} = -nF_1.$$

13.47. Оптическая система состоит из двух собирающих линз *1* и *2* с фокусными расстояниями $F_1 = 10$ см и $F_2 = 5$ см, находящихся на расстоянии $L = 35$ см друг от друга (рис. 360). Предмет находится

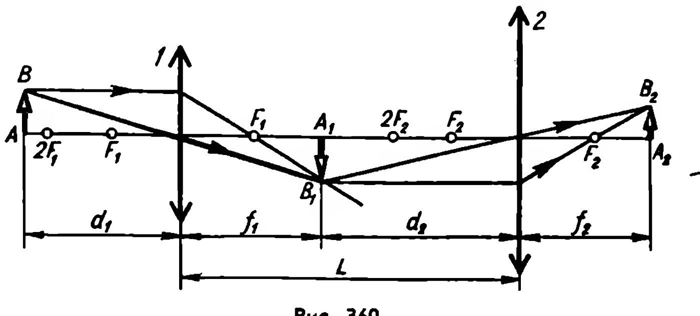


Рис. 360

на расстоянии $d_1 = 25$ см от первой линзы. Определить, где находится изображение, полученное с помощью такой системы. Чему равно увеличение, даваемое этой системой?

Из формулы линзы находим

$$f_1 = \frac{F_1 d_1}{d_1 - F_1} = 16\frac{2}{3} \text{ см}.$$

Увеличение, даваемое линзой *1*,

$$k_1 = \frac{f_1}{d_1} = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad A_1B_1 = \frac{2}{3}AB.$$

Из рисунка ясно, что

$$d_2 = L - f_1 = 18\frac{1}{3} \text{ см}.$$

Согласно формуле линзы

$$f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2} = 6{,}875 \text{ см},$$

значит,

$$k_2 = \frac{f_2}{d_2} = 0{,}375,$$

т. е.

$$A_2B_2 = 0,375A_1B_1 = 0,25AB.$$

Иными словами, увеличение системы

$$k = \frac{A_2B_2}{AB} = k_1k_2 = 0,25.$$

13.48. В зрительную трубу с фокусным расстоянием объектива $F_1 = 50$ см в положении *1* наблюдатель рассматривает очень далекий предмет ($d_1 = \infty$), а затем, переместив окуляр в положение *2*, направляет трубу на предмет, находящийся от него на расстоянии $d_2 = 25$ м. Насколько перемещен окуляр трубы?

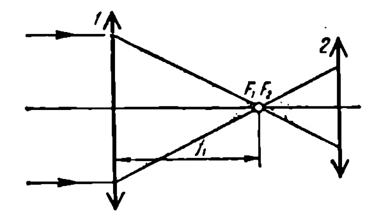


Рис. 361

Рис. 362

Условия наблюдения в обоих случаях будут наилучшими, если из окуляра выходит пучок параллельных лучей. Для этого изображение, которое дает объектив, должно находиться в фокальной плоскости окуляра (рис. 361).

В случае *1* изображение получается в фокальной плоскости объектива: $f_1 = F_1$, где F_1 — фокусное расстояние объектива. В случае *2* изображение окажется на расстоянии f_2, которое больше, чем F_1, на величину x.

Для того чтобы в глаз наблюдателя и в случае *2* попадал пучок параллельных лучей, окуляр также должен быть смещен на расстояние x. Очевидно, что $x = f_2 - F_1$. Используя формулу линзы для второго случая, находим

$$f_2 = \frac{F_1d_2}{d_2 - F_1},$$

а значит,

$$x = \frac{F_1d_2}{d_2 - F_1} - F_1 = \frac{F_1^2}{d_2 - F} \approx 1,02 \text{ см}.$$

13.49. Какое увеличение можно получить с помощью проекционного фонаря, оптическая сила объектива которого равна 4 диоптрии? Расстояние от объектива до экрана — 5 м.

В проекционном аппарате предмет располагается за фокусом, вблизи него (рис. 362). Увеличение, даваемое объективом проекцион-

ного аппарата, $k = f/d$. Расстояние предмета до линзы определяем из формулы линзы $d = Ff/f - F$. Отсюда увеличение

$$k = \frac{f - F}{F} = D\left(f - \frac{1}{D}\right) = 19,$$

где D — оптическая сила объектива.

13.50. Фокусное расстояние объектива микроскопа $F_1 = 5$ мм, окуляра — $F_2 = 25$ мм. Предмет находится на расстоянии $d_1 = 5{,}1$ мм от объектива (рис. 363). Вычислить длину тубуса микроскопа и даваемое микроскопом увеличение k.

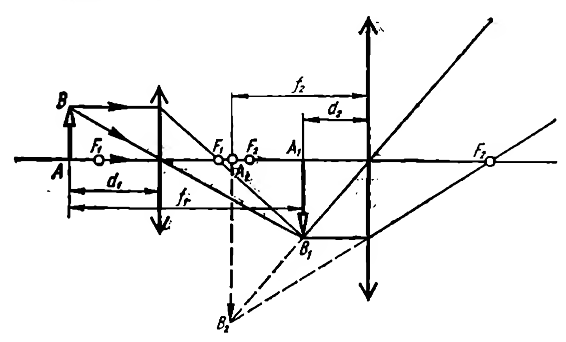


Рис. 363

Увеличение микроскопа $k = k_1k_2$, где k_1 — увеличение, даваемое объективом; k_2 — увеличение, даваемое окуляром. k_1 и k_2 определяются по формулам

$$k_1 = \frac{f_1}{F_1}; \quad k_2 = \frac{l}{F_2},$$

где f_1 — расстояние от объектива до даваемого им изображения; $l = 25$ см — расстояние наилучшего видения для нормального глаза.

С учетом двух последних формул

$$k = \frac{25 f_1}{F_1F_2}.$$

Используя формулу линзы для объектива, находим

$$f_1 = \frac{F_1d_1}{d_1 - F_1} = 25{,}5 \text{ см}.$$

Знаая f_1, находим увеличение, даваемое микроскопом,

$$k = \frac{25 \cdot 25{,}5}{0{,}5 \cdot 2{,}5} = 510.$$

В микроскопе объектив и окуляр подбираются так, что действительное изображение, даваемое объективом, лежит между фокусом

окуляра и окуляром, близко к фокусу окуляра. Окуляр действует, как лупа. Следовательно, длина тубуса

$$L = f_1 + F_2 = 28 \text{ см.}$$

Если принять $L \approx f_1$, то для определения увеличения микроскопа можно пользоваться приближенной формулой

$$k = \frac{25L}{F_1 F_2}.$$

В этом случае получим

$$k = 560.$$

13.51. Фотоаппаратом с размерами кадра 24 × 36 мм и фокусным расстоянием объектива 50 мм нужно переснять чертеж размерами 12 × 18 см. Определить: коэффициент уменьшения переснимаемого предмета; расстояние от поверхности пленки, на котором следует расположить чертеж; оптическую силу насадочной линзы. Изображение чертежа должно точно соответствовать размеру кадра, и объектив фотоаппарата должен быть сфокусирован на бесконечно удаленный предмет. Считать, что систему объектив — насадочная линза можно рассматривать как систему тонких линз, сложенных вплотную.

Определим уменьшение переснимаемого чертежа как отношение соответствующих линейных размеров чертежа (120 мм) и кадра (24 мм)

$$k = \frac{120}{24} = 5.$$

Применительно к оптической системе объектив — насадочная линза формула линзы принимает вид:

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

где D_1 — оптическая сила объектива; D_2 — оптическая сила насадочной линзы; d — расстояние от оптического центра системы до предмета (чертежа); f — расстояние от оптического центра системы до изображения (до пленки).

По условию задачи объектив сфокусирован на бесконечность и $f = F_1$, где F_1 — фокусное расстояние объектива. Уменьшение k в данном случае может быть представлено как

$$k = \frac{d}{f} = \frac{d}{F_1},$$

откуда

$$d = kF_1 = 5 \cdot 50 = 250 \text{ мм.}$$

Искомое расстояние от чертежа до пленки

$$L = d + F_1 = 300 \text{ мм.}$$

Подставив значение d в формулу линзы, получим

$$D_1 + D_2 = \frac{1}{kF_1} + \frac{1}{F_1}.$$

Учитывая что $D_1 = 1/F_1$, находим оптическую силу насадочной линзы

$$D_2 = \frac{1}{kF_1} = 4 \text{ диоптрии.}$$

13.52. Лупа, ограниченная сферическими поверхностями радиусами $R_1 = 5{,}9$ см и $R_2 = 8{,}2$ см, «отодвигает» рассматриваемый предмет на $l = 2$ см. Во сколько раз она его увеличивает? Показатель преломления стекла линзы $n = 1{,}6$.

Находим фокусное расстояние лупы

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

$$F = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_1 + R_2)} = 12 \text{ см.}$$

Согласно формуле линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}.$$

Учитывая, что $d + l = f$, находим

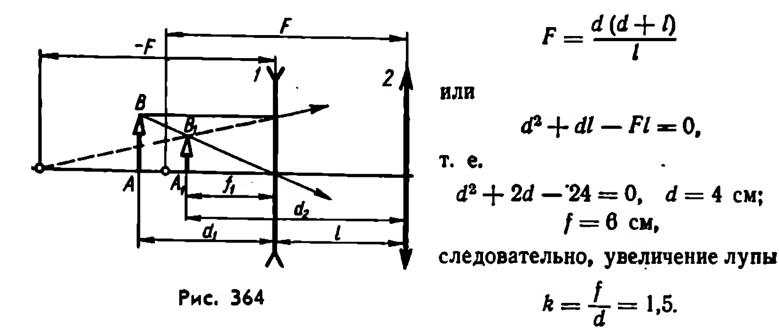


Рис. 364

$$F = \frac{d(d+l)}{l}$$

или

$$d^2 + dl - Fl = 0,$$

т. е.

$$d^2 + 2d - 24 = 0, \quad d = 4 \text{ см};$$
$$f = 6 \text{ см},$$

следовательно, увеличение лупы

$$k = \frac{f}{d} = 1{,}5.$$

13.53. Рассеивающая линза *1* с фокусным расстоянием $-F$ и собирающая линза *2* с фокусным расстоянием F расположены на расстоянии $2F/3$ друг от друга. Предмет AB находится на главной оптической оси системы на некотором расстоянии перед рассеивающей линзой. При каких положениях предмета его изображение будет мнимым?

Построим изображение предмета в рассеивающей линзе *1*. Пусть предмет AB находится на расстоянии d_1 от рассеивающей линзы (рис. 364), A_1B_1 — изображение предмета, даваемое рассеивающей линзой. Это изображение служит предметом для собирающей линзы *2*.

Для того чтобы изображение, даваемое собирающей линзой, было мнимым, предмет AB должен находиться между фокусом линзы *2* и самой линзой, т. е. $d_2 < F$ или

$$f_1 + l < F. \qquad (*)$$

Расстояние f_1 найдем, воспользовавшись формулой линзы $1/d_1 - 1/f_1 = -1/F$, откуда $f_1 = d_1F/(d_1 + F)$.

Подставив это выражение в (*), находим

$$\frac{d_1F}{d_1+F} + l < F,$$

откуда

$$d_1 < \frac{F(F-l)}{l},$$

или

$$d_1 < \frac{F\left(F - \frac{2}{3}F\right)}{\frac{2}{3}F}; \quad d_1 < \frac{F}{2}.$$

13.54. К вогнутому зеркалу, радиус кривизны которого равен R, вплотную приложена тонкая собирающая линза. На расстоянии d перед системой, перпендикулярно к главной оптической оси, расположен предмет. Оказалось, что плоскость предмета совпадает с плоскостью изображения, полученного в результате прохождения света через линзу, отражения от зеркала и вторичного прохождения через линзу. Определить фокусное расстояние линзы.

Так как линза приложена вплотную к зеркалу, оптическая сила системы

$$D = 2D_1 + D_2 = \frac{2}{F_1} + \frac{2}{R},$$

где D_1 — оптическая сила линзы; D_2 — оптическая сила зеркала; $R/2$ — фокусное расстояние зеркала.

Оптическая сила системы может быть найдена из формулы

$$\frac{1}{D} = \frac{df}{d+f}.$$

Учитывая, что $f = d$, находим

$$D = \frac{2}{d}.$$

Подставив это выражение в формулу для D, получаем

$$F_1 = \frac{dR}{R-d}.$$

13.55. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оси. За линзой, перпендикулярно к оптической оси, помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно поместить зеркало, чтобы лучи, отраженные от него, пройдя вторично через линзу, стали параллельными?

Для того чтобы лучи, пройдя линзу, были параллельными, необходимо, чтобы они исходили из источника, лежащего в фокальной плоскости линзы, т. е. изображение S'' источника, даваемое плоским

зеркалом, должно находиться в фокусе линзы (рис. 365). Используя формулу линзы и учитывая, что $d = 2F$, находим

$$f = \frac{Fd}{d - F} = 2F.$$

Из чертежа ясно, что зеркало должно находиться на расстоянии x от S', т. е. от фокуса линзы:

$$x = \frac{f - F}{2} = \frac{F}{2};$$

$$L = F + x = 1{,}5F.$$

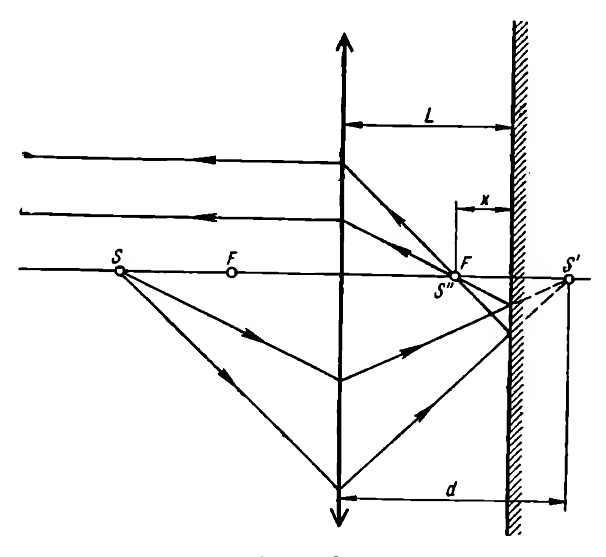


Рис. 365

13.56. Плоская поверхность плоско-вогнутой линзы с фокусным расстоянием F посеребрена. На расстоянии d_1 от линзы со стороны вогнутой поверхности расположен точечный источник света S (рис. 366). Где будет находиться изображение источника?

На плоско-вогнутую линзу с фокусным расстоянием F падает пучок лучей, выходящий из точки S, расположенной на главной оптической оси на расстоянии d_1 от линзы. Выберем из этого потока луч SO, идущий на оптический центр, и произвольный луч SB и проследим ход лучей в данной системе. Луч SO пройдет через линзу не преломляясь и, отразившись от посеребренной поверхности, пойдет назад вдоль линии SO. Второй луч, преломившись в линзе, падает на посеребренную поверхность так, как если бы он выходил из точки S_1. Графически положение точки S_1 находится с помощью оптической оси l, параллельной лучу SB. После преломления второй луч должен

своим продолжением попасть в побочный фокус F_1. Точка S_1 находится на пересечении луча с главной оптической осью. Расстояние S_1 от линзы можно найти из уравнения линзы: $-1/F = 1/d_1 - 1/f_1$; $f_1 = d_1F/(F + d_1)$.

Пройдя через линзу, луч SB отразится от зеркальной поверхности под тем же углом, под каким он падал. Направление отраженного луча будет таким, как если бы он выходил из точки S_2, которая является изображением S_1 в плоском зеркале. Расстояние от точки S_2 до зеркала (в случае тонкой линзы) $d_2 = f_1$.

Далее, отраженный луч еще раз преломится в линзе и даст окончательное изображение S_3 в точке его пересечения с продолжением луча SO. Ход этого луча построен с помощью побочной оси II, про-

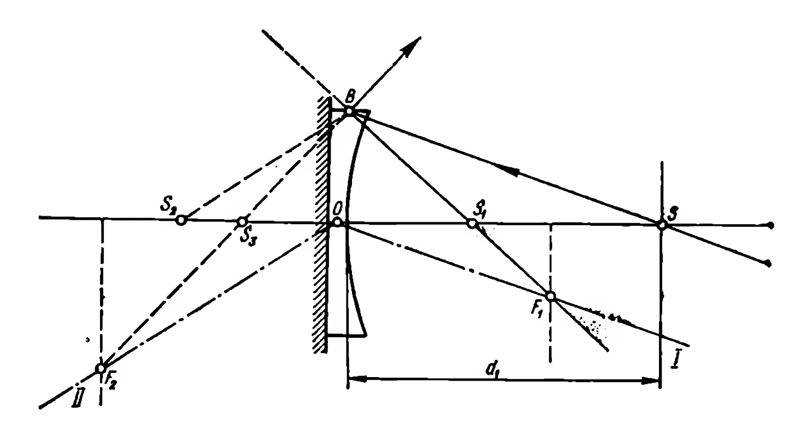


Рис. 366

веденной параллельно S_2B. Используя еще раз формулу рассеивающей линзы (считая изображение в зеркале S_2 предметом для рассеивающей линзы), найдем $-1/F = 1/d_2 - 1/f_2$, откуда

$$f_2 = \frac{d_2F}{d_2 + F} = \frac{f_1F}{f_1 + F} = \frac{\dfrac{d_1F^2}{F + d_1}}{F + \dfrac{d_1F}{F + d_1}} = \frac{d_1F}{F + 2d_1}.$$

13.57. На высоте $h = 5$ м на расстоянии $l = 10$ м от вертикальной стены подвешена лампа силой света $I = 100$ кд. Определить освещенности горизонтальной поверхности и стены в точке A (рис. 367) и сравнить их между собой.

Принимаем лампу за точечный источник света. Освещенность горизонтальной поверхности в точке A можно определить по формуле

$$E_1 = \frac{I}{r^2}\cos\alpha_1,$$

где r — расстояние от источника до точки, в которой определяется освещенность; I — сила света; α_1 — угол падения лучей на поверхность AB. Из рисунка следует, что

$$\cos\alpha_1 = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2+l^2}}.$$

Таким образом,

$$E_1 = \frac{Ih}{(h^2+l^2)\sqrt{h^2+l^2}} = 0{,}36 \text{ лк}.$$

Освещенность вертикальной стены в точке A

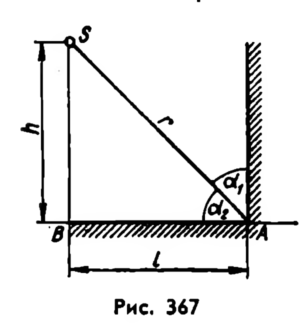


Рис. 367

$$E_2 = \frac{I}{r^2}\cos\alpha_2,$$

где α_2 — угол падения лучей на вертикальную поверхность.

Из рисунка видно, что

$$\cos\alpha_2 = \frac{l}{r} = \frac{l}{\sqrt{h^2+l^2}},$$

так что

$$E_2 = \frac{Il}{(h^2+l^2)\sqrt{h^2+l^2}} = 0{,}72 \text{ лк}.$$

Для сравнения освещенностей найдем отношение

$$\frac{E_2}{E_1} = 2.$$

13.58. Раскаленная чугунная болванка диаметром 10 см и длиной 40 см создает на расстоянии 5 м в направлении, перпендикулярном к оси болванки, освещенность, равную 1 лк. Определить силу света и яркость в данном направлении.

Размеры болванки намного меньше расстояния r, на котором измерена освещенность E. Это позволяет принять раскаленную болванку за точечный источник света. Тогда сила света может быть найдена из соотношения

$$E = \frac{I}{r^2},$$

откуда

$$I = Er^2 = 25 \text{ кд}.$$

Яркость поверхности $B = \frac{I}{S}$, где S — (в данном случае) продольная площадь сечения болванки по диаметру, так как наблюдателю болванка представляется как светящийся прямоугольник. Подставляя данные, получим

$$B = \frac{25}{0{,}1 \cdot 0{,}4} = 625 \text{ кд/м}^2.$$

13.59. Над центром круглого стола радиуса r на высоте $H = r$ подвешена лампа (рис. 368). Зная, что освещенность центра стола равна E_0, найти среднюю освещенность.

Освещенность

$$E = \frac{\Phi}{s} = \frac{I\Omega}{s},$$

где Φ — световой поток, падающий на поверхность стола; I — сила света; Ω — телесный угол, в котором распространяется поток Φ; s — площадь стола.

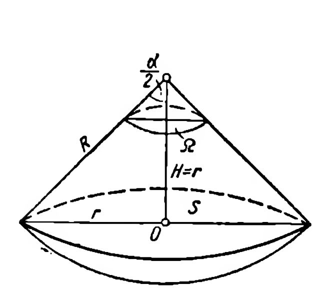


Рис. 368

Рис. 369

Телесный угол

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = \frac{\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)}{R^2},$$

где S — площадь поверхности сегмента. Так как $r = H$, то $\alpha = 90°$ и

$$\Omega = 0{,}5\,(\pi/2 - 1) \approx 0{,}285 \text{ ср.}$$

Учитывая, что $s = \pi r^2$ и $E_0 = \frac{I}{H^2} = \frac{I}{r^2}$, получаем

$$E = \frac{I\Omega}{\pi r^2} = \frac{\Omega}{\pi} E_0 \approx 0{,}091 E_0.$$

13.60. Освещенность листа бумаги, находящегося на столе на расстоянии 3 м от лампы в 300 свечей, равна 30 лк. Какой световой поток падает на лист, если его размеры $0{,}2 \times 0{,}15$ м и если считать освещенность во всех точках листа одинаковой? На какой высоте над столом висит лампа? Под каким углом падают лучи на поверхность бумаги?

Из формулы освещенности

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha,$$

где I — сила света; r — расстояние до точки, в которой определяется освещенность; α — угол падения лучей, находим

$$\cos\alpha = \frac{Er^2}{I} = 0{,}9.$$

Из рис. 369 видно, что

$$h = r\cos\alpha = 2{,}7 \text{ м}.$$

Световой поток Φ может быть определен из формулы $E = \frac{\Phi}{S}$, откуда $\Phi = ES = 9$ лм.

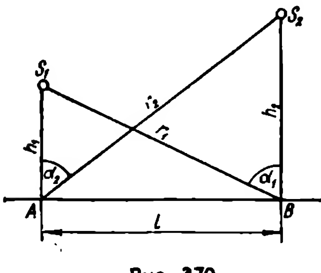


Рис. 370

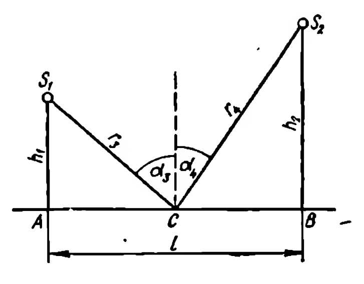


Рис. 371

13.61. Расстояние между источниками света S_1 и S_2 силой I_1 и I_2 равно l. Источники размещены на высотах h_1 и h_2 соответственно над освещаемой поверхностью. Определить освещенности в точках A, B (рис. 370) и точке C (рис. 371), если точка C лежит на средине расстояния между A и B.

Освещенность в точке A $E_A = E_{A1} + E_{A2}$, где E_{A1} и E_{A2} — освещенности, создаваемые в точке A каждым источником отдельно. Используя закон освещенности, находим

$$E_A = \frac{I_1}{h_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2}\cos\alpha_2 = \frac{I_1}{h_1^2} + \frac{I_2}{(h_2^2 + l^2)}\,\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + l^2}}.$$

Аналогично,

$$E_B = \frac{I_2}{h_2^2} + \frac{I_1}{r_1^2}\cos\alpha_1 = \frac{I_2}{h_2^2} + \frac{I_1}{(h_1^2 + l^2)}\,\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + l^2}};$$

$$E_C = \frac{I_1}{r_3^2}\cos\alpha_3 + \frac{I_2}{r_4^2}\cos\alpha_4 = \frac{I_1}{\left(h_1^2 + \frac{l^2}{4}\right)}\,\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + \frac{l^2}{4}}} + \frac{I_2}{\left(h_2^2 + \frac{l^2}{4}\right)}\,\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + \frac{l^2}{4}}}.$$

13.62. Точечный источник света помещен между экраном и идеально отражающим зеркалом на расстоянии r_1 от экрана. Расстояние между экраном и зеркалом l. Сила света источника — I. Чему равна освещенность экрана в точке, на которую свет падает нормально? Плоскости зеркала и экрана параллельны.

Освещенность в точке A экрана (рис. 372) создается источником света S и его изображением (мнимым источником) S':

$$E = E_1 + E_2.$$

Мнимый источник S' находится на таком же расстоянии от зеркала, что и источник S. Следовательно,

$$r_2 = 2(l - r_1) + r_1 = 2l - r_1.$$

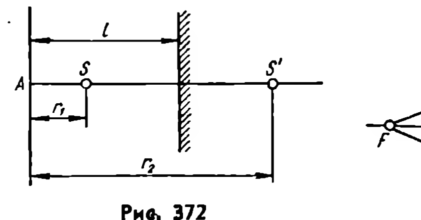


Рис. 372

Рис. 373

Используя формулу освещенности, получим

$$E = \frac{I}{r_1^2} + \frac{I}{r_2^2} = I\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{(2l - r_1)^2}\right).$$

13.63. В главном фокусе собирающей линзы находится точечный источник, освещающий экран (рис. 373). Сила света источника — I, фокусное расстояние линзы — F. Найти освещенность экрана в точке A.

Освещенность

$$E = \frac{\Phi}{S},$$

где Φ — поток, прошедший через линзу; S — площадь экрана, на которую падает этот поток. Вследствие того, что источник находится в фокусе, S равна площади линзы, и освещенность экрана равна освещенности поверхности линзы, которая находится на расстоянии F от источника света. Следовательно,

$$E = \frac{I}{F^2}.$$

13.64. Определить освещенность, создаваемую точечным источником S в точке A горизонтальной поверхности, отстоящей от источника на расстояние h, если на расстоянии l от источника поместить плоское зеркало, расположенное под углом γ к поверхности (рис. 374).

Освещенность в точке A будет создаваться источником S и его изображением в плоском зеркале S'. Полная освещенность в этой точке

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I}{h^2} + \frac{I}{r^2}\cos\alpha.$$

Из $\Delta ASS'$ очевидно:

$$\angle ASS' = 180° - \gamma;$$
$$r^2 = h^2 + (2l)^2 - 4lh\cos(180° - \gamma) = h^2 + 4l^2 + 4lh\cos\gamma.$$

Величина угла α может быть найдена из соотношения

$$\frac{r}{\sin(180° - \gamma)} = \frac{2l}{\sin\alpha};$$
$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{4l^2\sin^2\gamma}{r^2}}.$$

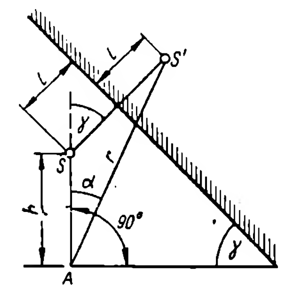


Рис. 374

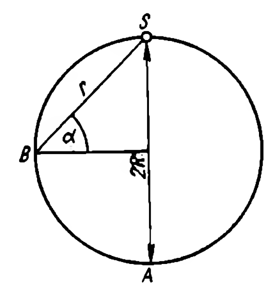


Рис. 375

Таким образом, освещенность в точке A

$$E = I\left[\frac{1}{h^2} + \frac{\sqrt{1 - \frac{4l^2\sin^2\gamma}{h^2 + 4l^2 + 4lh\cos\gamma}}}{h^2 + 4l^2 + 4lh\cos\gamma}\right].$$

13.65. В верхней точке полого шара помещен точечный источник света S (рис. 375). Сила света источника — I, радиус шара — R. Определить освещенность в точках A, B и среднюю освещенность шара.

Согласно формуле освещенности

$$E_A = \frac{I}{(2R)^2} = \frac{I}{4R^2}; \quad E_B = \frac{I}{r^2}\cos\alpha.$$

Из рисунка очевидно, что $r^2 = 2R^2$, $\alpha = 45°$, следовательно,

$$E_B = \frac{I}{2R^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{I}{4R^2}\sqrt{2}.$$

Средняя освещенность $E_0 = \Phi/S$, где Φ — световой поток, падающий на внутреннюю поверхность сферы; S — площадь поверхности сферы.

Учитывая, что в данном случае $\Omega = 2\pi$, находим

$$\Phi = \Omega I = 2\pi I; \quad E_0 = \frac{2\pi I}{4\pi R^2} = \frac{I}{2R^2}.$$

13.66. Точечный источник M освещает экран с помощью собирающей линзы (рис. 376). Сила света источника — I, фокусное расстояние линзы — F, расстояние от источника до линзы — d, расстояние от экрана до линзы — l. Найти освещенность в точке A (считать, что $d > F$).

Рассмотрим пучок лучей в малом телесном угле Ω. Искомая освещенность

$$E = \frac{I\Omega}{s'},$$

где I — сила света; s' — площадь экрана, на которую падают лучи, распространяющиеся в пределах телесного угла Ω. Учитывая, что $\Omega = s/d^2$, получаем $E = Is/d^2s'$, причем $\frac{s}{s'} = \left(\frac{f}{f-l}\right)^2$.

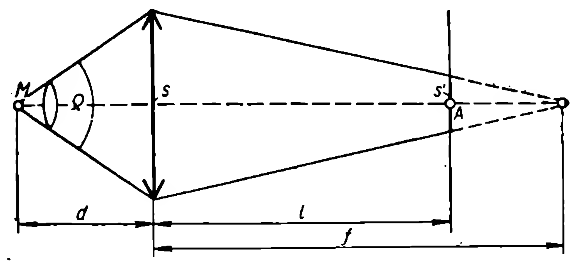


Рис. 376

Воспользовавшись формулой линзы $f = dF/(d-F)$, находим освещенность в точке A

$$E = \frac{I}{d^2}\left(\frac{f}{f-l}\right)^2 = I\left(\frac{F}{dF + lF - dl}\right)^2.$$

13.67. Диаметр объектива телескопа — d_1, диаметр зрачка глаза человека — d_2. Во сколько раз телескоп увеличивает видимую яркость звезд?

Ход лучей в телескопической системе представлен на рис. 377. Освещенности объектива телескопа 1 и зрачка 2 равны соответственно

$$E_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{4\Phi_1}{\pi d_1^2}; \quad E_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{4\Phi_2}{\pi d_2^2}.$$

Из рисунка видно, что $\Phi_1 = \Phi_2$, так что

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

13.68. Некоторый предмет при неизменных условиях освещения фотографируется в одном случае с большого, а в другом — с малого расстояния. Как будут различаться освещенности фотопластинки в этих случаях? В каком случае выдержка должна быть больше?

Освещенность фотопластинки определяется световой энергией, пропущенной объективом, и отношением площадей фотографируемого предмета и его изображения. Световая энергия пропорциональна телесному углу, под которым виден объектив из точки O предмета, т. е. $W \sim \Omega$. В свою очередь, $\Omega = S/d^2$, где S — площадь отверстия

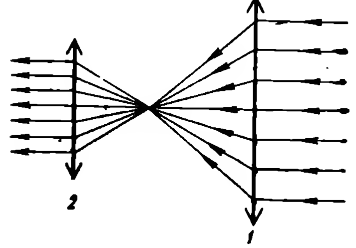


Рис. 377

Рис. 378

объектива; d — расстояние от предмета до объектива (рис. 378). Следовательно,

$$W \sim \frac{S}{d^2}.$$

Из рис. 379 следует, что уменьшение линейных размеров предмета, даваемое объективом фотоаппарата, равно

$$\frac{h}{H} = \frac{f}{d},$$

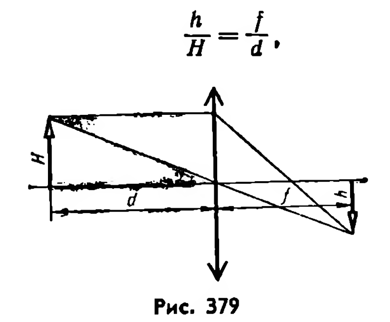


Рис. 379

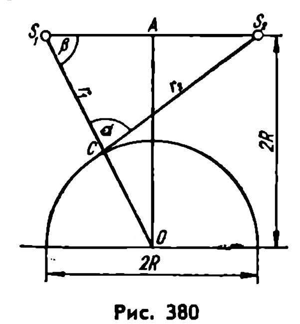


Рис. 380

так что

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{f^2}{d^2},$$

где S_1 — площадь предмета; S_2 — площадь изображения. Таким образом, освещенность изображения

$$E \sim \frac{WS_1}{S_2} \sim \frac{Sd^2}{d^2 f^2} = \frac{S}{f^2},$$

т. е. освещенность изображения обратно пропорциональна квадрату расстояния от изображения до объектива.

Изображение более удаленного предмета лежит ближе к объективу, чем изображение близкого предмета. Следовательно, освещенность изображения удаленного предмета всегда больше освещенности изображения близкого предмета. Поэтому при фотографировании близкого предмета нужно делать бо́льшую выдержку.

13.69. Полусфера радиуса R (рис. 380) освещается двумя одинаковыми лампами, подвешенными на высоте $2R$ над поверхностью земли симметрично относительно полусферы и отстоящими друг от друга также на расстояние $2R$. Определить освещенность полусферы в точках, находящихся на минимальном расстоянии от одного из источников, если полный световой поток, создаваемый каждой лампой, равен Φ.

Точка C, отстоящая на минимальном расстоянии от одного из источников, лежит на линии, соединяющей источник S_1 с центром полусферы.

Освещенность в точке C

$$E = \frac{I}{r_1^2} + \frac{I}{r_2^2}\cos\alpha,$$

где I — сила света источников; r_1 и r_2 — расстояния источников от точки C; α — угол падения лучей от источника S_2.

Учитывая, что $I = \Phi/4\pi$, получаем

$$E = \frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\cos\alpha\right).$$

Из $\triangle S_1OA$:

$$(S_1O)^2 = (2R)^2 + R^2 = 5R^2;$$

$$r_1 = S_1O - R = R\sqrt{5} - R = 1{,}24R;$$

$$\cos\beta = \frac{S_1A}{S_1O} = \frac{R}{R\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Из $\triangle S_1CS_2$:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4R^2 - 4r_1R\cos\beta;$$

$$r_2^2 = 6R^2\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 3{,}31R^2;$$

$$4R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 4R^2}{2r_1r_2} = 0{,}188.$$

Окончательно получаем

$$E = \frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{1{,}54R^2} + \frac{0{,}188}{3{,}31R^2}\right).$$

13.70. В главном фокусе вогнутого зеркала помещен точечный источник света. Радиус кривизны зеркала — R. На расстоянии L ($L > R$) от источника помещен экран, расположенный перпендику-

лярно к главной оптической оси зеркала. Во сколько раз освещенность в центре светового пятна, получающегося на экране, больше, чем освещенность в том же месте экрана, создаваемая точечным источником света в отсутствие зеркала?

В отсутствие зеркала освещенность экрана

$$E = \frac{I}{L^2},$$

где I — сила света источника; L — расстояние от источника до экрана.

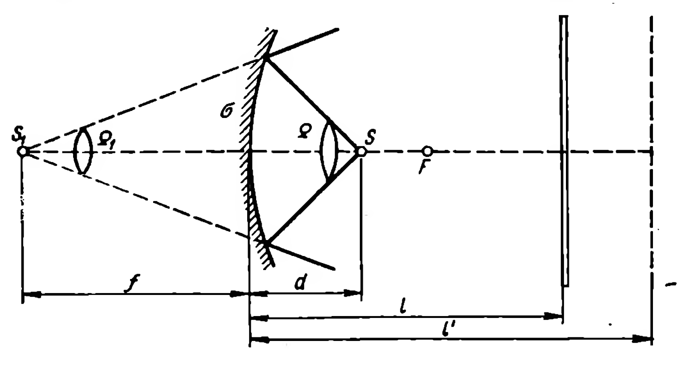


Рис. 381

При наличии зеркала освещенность экрана создается не только прямыми лучами от источника, но и лучами, отраженными от зеркала. Согласно условию задачи источник света находится в фокусе зеркала, так что от зеркала отражается параллельный пучок лучей, и дополнительная освещенность такая же, как освещенность самого зеркала. Следовательно, освещенность при наличии зеркала

$$E_1 = E + \frac{I}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = E + \frac{4I}{R^2},$$

откуда

$$\frac{E_1}{E} = 1 + \left(\frac{2L}{R}\right)^2.$$

13.71. Точечный источник света S находится на расстоянии d (меньшем фокусного расстояния) от вогнутого сферического зеркала радиуса R. Найти освещенность в центре экрана, расположенного на расстоянии l от поверхности зеркала, если освещенность на расстоянии l' равна E' (рис. 381).

Освещенность в центре экрана $E = E_1 + E_2$, где E_1 — освещенность, создаваемая лучами, идущими непосредственно от источника; E_2 — освещенность, создаваемая лучами, отраженными от зеркала.

Для нахождения освещенности E_2 необходимо знать, где находится изображение источника. Учитывая, что согласно условию задачи

изображение будет мнимым, из формулы сферического зеркала $2/R = 1/d - 1/f$ находим

$$f = \frac{dR}{R - 2d}.$$

Световой поток, распространяющийся от источника в телесном угле Ω, после отражения идет в телесном угле Ω_1, вершина которого находится в точке S_1.

Для определения силы света I_1 изображения примем, что конусы с вершинами в точках S и S_1 вырезают на поверхности зеркала одинаковые малые площадки, так что

$$\Omega d^2 = \Omega_1 f^2.$$

Если потери световой энергии при отражении не учитывать, из закона сохранения световой энергии получим

$$I\Omega = I_1\Omega_1,$$

или

$$I_1 = I\frac{\Omega}{\Omega_1} = I\frac{f^2}{d^2} = I\frac{R^2}{(R-2d)^2}.$$

На расстоянии l от зеркала освещенность в центре экрана

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I}{(l-d)^2} + \frac{I_1}{(l+f)^2} = I\left[\frac{1}{(l-d)^2} + \frac{R^2}{(R-2d)^2(l+f)^2}\right].$$

На расстоянии l' освещенность в центре экрана

$$E' = \frac{I}{(l'-d)^2} + \frac{I_1}{(l'+f)^2} = I\left[\frac{1}{(l'-d)^2} + \frac{R^2}{(R-2d)^2(l'+f)^2}\right].$$

Из последних двух уравнений, учитывая, что $f = dR/(R-2d)$, находим

$$E = E'\,\frac{\dfrac{1}{(l-d)^2} + \dfrac{R^2}{[R(l+d)-2ld]^2}}{\dfrac{1}{(l'-d)^2} + \dfrac{R^2}{[R(l'+d)-2l'd]^2}}.$$

13.72. На оси выпуклого сферического зеркала находится точечный источник света S. Расстояние между зеркалом и источником равно $R/2$ (рис. 382). Определить освещенность E площадки, находящейся на расстоянии R от зеркала, если освещенность площадки на расстоянии $2R$ равна E_0. Зеркало считать идеально отражающим.

Освещенность площадки $E = E_1 + E_2$, где E_1 — освещенность, создаваемая лучами, идущими непосредственно от источника; E_2 — освещенность, создаваемая лучами, отраженными от зеркала.

Положение изображения S_1 находим, воспользовавшись формулой линзы

$$f = \frac{dF}{d - F} = \frac{\frac{R}{2}\left(-\frac{R}{2}\right)}{\frac{R}{2} - \left(-\frac{R}{2}\right)} = -\frac{R}{4},$$

где d — расстояние от источника S до зеркала; f — расстояние от изображения S_1 до зеркала; F — фокусное расстояние зеркала. Освещенность площадки, находящейся на расстоянии R от зеркала,

$$E = \frac{I}{(R-d)^2} + \frac{I_1}{(R+f)^2} = \frac{4I}{R^2} + \frac{16I_1}{25R^2},$$

где I — сила света источника; I_1 — сила света изображения.

Освещенность площадки, находящейся на расстоянии $2R$ от зеркала,

$$E_0 = \frac{I}{(2R-d)^2} + \frac{I_1}{(2R+f)^2} = \frac{4I}{9R^2} + \frac{16I_1}{81R^2}.$$

При идеальном отражении



$$I\Omega = I_1\Omega_1.$$

Учитывая, что для малых телесных углов $\Omega d^2 = \Omega_1 f^2$, получаем

$$I_1 = I\frac{\Omega}{\Omega_1} = I\frac{f^2}{d^2} = \frac{1}{4}I.$$

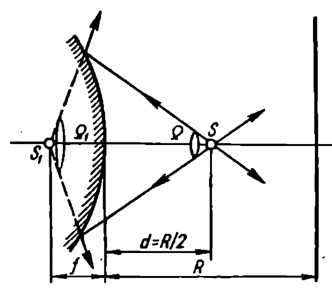


Рис. 382

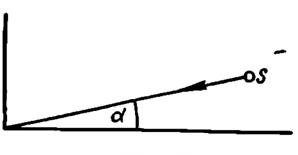


Рис. 383

Окончательно выражения для E и E_0 могут быть представлены в виде

$$E = \frac{4I}{R^2}\left(1 + \frac{1}{25}\right) = \frac{4I}{R^2}\frac{26}{25};$$

$$E_0 = \frac{4I}{R^2}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{81}\right) = \frac{4I}{R^2}\frac{10}{81},$$

откуда

$$E \approx 8{,}4E_0.$$

13.73. Солнце стоит под углом $\alpha = 10°$ к горизонту. Определить отношение освещенностей вертикальной и горизонтальной площадок в этих условиях.

Освещенность вертикальной площадки (рис. 383) $E_в = E_0 \cos\alpha$, где E_0 — освещенность площадки, перпендикулярной к лучам. Освещенность горизонтальной площадки $E_г = E_0 \sin\alpha$. Таким образом,

$$\frac{E_в}{E_г} = \operatorname{ctg}\alpha = 5{,}671.$$

14. Волновая оптика

Интерференция света. Интерференцией называется усиление или ослабление света в результате сложения двух (или нескольких) световых волн с одинаковыми периодами и с постоянной разностью фаз. Интерференция свойственна каждому волновому движению.

Оптическая длина пути

$$L = nl,$$

где n — показатель преломления; l — геометрическая длина пути.

Оптическая разность хода Δ двух лучей, один из которых проходит путь длиной l_1 в среде с показателем преломления n_1, а другой — путь l_2 в среде с показателем преломления n_2,

$$\Delta = n_1 l_1 - n_2 l_2.$$

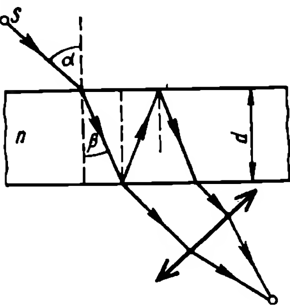


Рис. 384

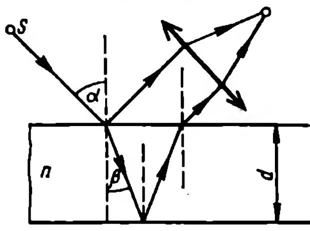


Рис. 385

Условие максимального усиления света:

$$\Delta = \pm k\lambda \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где λ — длина волны.

Условие максимального ослабления света:

$$\Delta = \pm (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если интерференция наблюдается в тонких плоскопараллельных пластинках или пленках (находящихся в воздухе) в проходящем свете (рис. 384), то оптическая разность хода интерферирующих волн определяется как

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha},$$

или

$$\Delta = 2dn\cos\beta,$$

где d — толщина пленки; n — показатель преломления вещества пленки; α — угол падения; β — угол преломления.

Если интерференционные полосы наблюдаются в отраженном свете (рис. 385), то для определения разности хода следует учесть изменение разности хода лучей на $\lambda/2$ при отражении света от более

плотной среды. Формулы для разности хода имеют в этом случае вид:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\Delta = 2d \cos \beta + \frac{\lambda}{2}.$$

Радиусы светлых колец Ньютона (в проходящем свете) определяются формулой $r_k^с = \sqrt{kR\lambda}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; радиусы темных колец — формулой $r_k^т = \sqrt{(2k-1) R \frac{\lambda}{2}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где R — радиус кривизны линзы.

В отраженном свете расположение светлых и темных колец обратно их расположению в проходящем свете.

Дифракция света — явления отклонения светового луча от прямолинейности, наблюдаемые при распространении света вблизи резких краев непрозрачных или прозрачных тел, сквозь узкие отверстия и вообще в среде с резкими неоднородностями. Дифракция свойственна каждому волновому движению.

При дифракции на плоской решетке направления, в которых наблюдаются максимумы света, определяются из условия

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $d = a + b$ — постоянная решетки; a — ширина щели; b — расстояние между щелями; φ — угол между нормалью к поверхности решетки и направлением дифрагирующих лучей; k — порядок спектра.

Разрешающая сила дифракционной рещетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

где $\Delta\lambda$ — наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda + \Delta\lambda$), при которой эти линии могут быть видны раздельно в спектре, полученном посредством данной решетки.

Разрешающая сила R решетки тем больше, чем больше штрихов N содержит решетка и чем больше порядковый номер k дифракционного максимума:

$$R = kN.$$

При дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке направления, в которых имеет место дифракционный максимум, определяются уравнением Вульфа — Брегга

$$2d \sin \vartheta = k\lambda,$$

где d — расстояние между атомными плоскостями; ϑ — угол между направлением рентгеновских лучей, падающих на кристалл, и гранью кристалла.

Энергия кванта света (фотона) определяется формулой

$$E = h\nu,$$

где h — постоянная Планка; ν — частота колебаний.

Связь между энергией фотона, вызывающего внешний фотоэффект, и максимальной кинетической энергией вылетающих электронов дается формулой Эйнштейна

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2},$$

где A — работа выхода электрона из металла; m — масса электрона. Если $v = 0$, то $h\nu_{кр} = A$, где $\nu_{кр}$ — частота, соответствующая красной границе фотоэффекта.

Световое давление

$$p = \frac{E}{c}(1 + \rho),$$

где E — количество энергии, падающей на единицу поверхности за единицу времени; ρ — коэффициент отражения света; c — скорость света в вакууме.

14.1. Точечный источник монохроматического света излучает мощность P_0 на длине волны λ. На каком максимальном расстоянии этот источник будет замечен человеком, если глаз реагирует на световой поток, равный N_0 фотонов в секунду? Диаметр зрачка — d.

Полная мощность P_0 точечного источника излучается в пределах телесного угла, равного 4π ср. В глаз, находящийся на расстоянии R от источника, попадает излучение мощностью

$$P = P_0 \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{P_0}{16} \frac{d^2}{R^2}.$$

Учитывая, что энергия одного кванта $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, находим число квантов, попадающих ежесекундно в глаз человека:

$$N = \frac{P}{E} = \frac{P_0 d^2 \lambda}{16R^2 hc}.$$

По условию задачи, глаз реагирует на свет, если $N = N_0$, следовательно,

$$R = \sqrt{\frac{P_0 d^2 \lambda}{16 N_0 hc}} = \frac{d}{4}\sqrt{\frac{P_0 \lambda}{N_0 hc}}.$$

14.2. Сколько длин волн монохроматического света с частотой колебаний $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$ уложится на пути длиной $l = 2{,}4$ мм: 1) в вакууме; 2) в стекле; 3) в алмазе?

Оптическая длина пути $L = nl$, где n — показатель преломления среды, в которой распространяется луч; l — геометрическая длина пути.

Таким образом, число длин волн, уложившихся на отрезке пути l,

$$N = \frac{L}{\lambda} = \frac{nl\nu}{c}.$$

В вакууме $N_1 = 4 \cdot 10^3$.
В стекле $N_2 = 6 \cdot 10^3$.
В алмазе $N_3 = 9{,}7 \cdot 10^3$.

14.3. В некоторую точку пространства приходят когерентные лучи с геометрической разностью хода $l = 1{,}2$ мкм, длина волны λ которых в вакууме — 600 нм. Определить, что происходит в этой точке вследствие интерференции, когда лучи проходят в воздухе, воде, скипидаре.

Оптическая разность хода в перечисленных средах равна соответственно:

$$\Delta_1 = ln_1 \quad (n_1 = 1);$$
$$\Delta_2 = ln_2 \quad (n_2 = 1{,}33);$$
$$\Delta_3 = ln_3 \quad (n_3 = 1{,}5),$$

где n_1, n_2, n_3 — показатели преломления воздуха, воды, скипидара соответственно. Условием интерференционного максимума является равенство оптической разности хода целому числу длин волн. Таким образом,

$$\frac{\Delta_1}{\lambda} = \frac{ln_1}{\lambda} = 2;$$

$$\frac{\Delta_2}{\lambda} = \frac{ln_2}{\lambda} = 2{,}66$$ (близко к полуцелому числу длин волн, т. е. к условию минимума);

$$\frac{\Delta_3}{\lambda} = \frac{ln_3}{\lambda} = 3.$$

В первом и в третьем случае наблюдается усиление света, во втором — ослабление света.

14.4. На пути одного из интерферирующих лучей помещена тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная светлая полоса смещается в положение, первоначально занимаемое шестой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает на пластинку перпендикулярно. Показатель преломления пластинки $n = 1{,}6$, длина волны $\lambda = 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м. Какова толщина пластинки?

Пластинка изменяет разность хода интерферирующих лучей на величину

$$\Delta = nd - d,$$

где n — показатель преломления пластинки; d — толщина пластинки.

С другой стороны, при внесении пластинки произошло смещение интерференционной картины на $k = 5$ полос. Следовательно,

$$\Delta = k\lambda,$$

или

$$d(n - 1) = k\lambda,$$

откуда

$$d = \frac{k\lambda}{n - 1} = 6{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

14.5. В точку A на экране, отстоящем от источника S монохроматического света длиной волны λ на расстоянии L (рис. 386), приходят два луча: луч SA — непосредственно от источника S — и луч SCA, отраженный в точке C от зеркала, параллельного лучу SA. Расстояние от луча SA до плоскости зеркала — d. Определить, что будет наблюдаться в точке A, если $\lambda = 0{,}5$ мкм, $L = 1$ м, $d = 5$ мм.

Построим мнимое изображение S_1 источника S в зеркале. Источники S и S_1 являются когерентными, поэтому при сложении волн, пришедших от этих источников, на экране будет возникать интерференционная картина. Оптическая разность хода лучей $\Delta = \Delta L + \frac{\lambda}{2}$, где $\Delta L = L_1 - L$ — геометрическая разность хода лучей (оба луча распространяются в воздухе); $\lambda/2$ — дополнительная разность хода, обусловленная изменением фазы колебаний на π при отражении от более плотной среды.

Из рисунка очевидно, что $h = 2d$ и

$$L_1 = \sqrt{L^2 + h^2} = L\sqrt{\left(\frac{h}{L}\right)^2 + 1}.$$

Тогда

$$\Delta L = L\left[\sqrt{\left(\frac{h}{L}\right)^2 + 1} - 1\right].$$

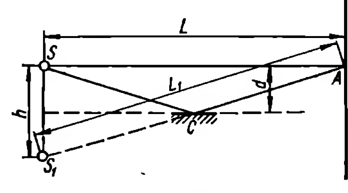


Рис. 386

Величина $h/L \ll 1$, поэтому можно считать, что

$$\left[\left(\frac{h}{L}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{L}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\Delta = \frac{L}{2}\left(\frac{h}{L}\right)^2 + \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{L} + \frac{\lambda}{2}.$$

Если оптическая разность хода $\Delta = k\lambda$, получаем интерференционный максимум.

Если $\Delta = 2(k+1)\lambda/2$, получаем интерференционный минимум. Согласно данным задачи

$$\frac{\frac{h^2}{2L} + \frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{h^2}{L\lambda} + 1 = 8 \cdot 10^9 + 1.$$

На оптической разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, значит, в точке A будет интерференционный минимум.

14.6. На мыльную пленку ($n = 1{,}33$) падает белый свет под углом 45°. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ($\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м)?

Мыльную пленку можно рассматривать как плоскопараллельную пластинку. Из пучка параллельных лучей, падающих на нее, выделим луч, падающий под углом α на границу раздела воздух — вода (рис. 387). В точках A, B и C падающий луч частично преломляется, частично отражается. Отраженные лучи $SABC$ и SAD падают параллельно на собирающую линзу L (роль линзы может играть и глаз человека), пересекаются в ее фокусе и интерферируют между собой. Отражение в точке A происходит от более оптически плотной среды, чем та, в которой идет падающий луч. Поэтому фаза колебаний

луча SA при отражении в точке A изменяется на π рад, следовательно, происходит потеря полуволны.

Как видно из рисунка, оптическая разность хода

$$\Delta = (AB + BC) n_2 - ADn_1 + \frac{\lambda}{2},$$

где n_1 — показатель преломления воздуха; n_2 — показатель преломления воды.

Очевидно, что $AB = d/\cos\beta$; $AD = AC\sin\alpha = 2AK\sin\alpha = 2d\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\alpha$, где d — толщина пленки; α — угол падения; β — угол преломления. В соответствии с этим

$$\Delta = \frac{2dn_2}{\cos\beta} - 2dn_1\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\alpha + \frac{\lambda}{2} = \frac{2dn_2}{\cos\beta}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\sin\beta\sin\alpha\right) + \frac{\lambda}{2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1};\quad \sin\alpha = \sin\beta\frac{n_2}{n_1},$$

получаем

$$\Delta = \frac{2dn_2}{\cos\beta}(1 - \sin^2\beta) + \frac{\lambda}{2} = 2dn_2\cos\beta + \frac{\lambda}{2}.$$

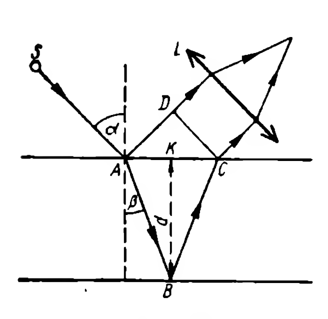


Рис. 387

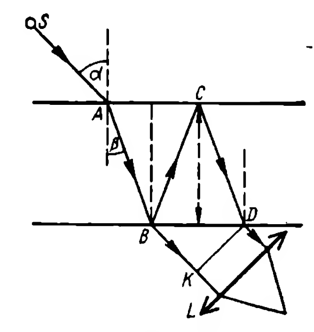


Рис. 388

Условием интерференционного максимума является равенство оптической разности хода четному числу длин полуволн: $\Delta = k\lambda$, таким образом,

$$2dn_2\cos\beta + \frac{\lambda}{2} = k\lambda;\quad d = \frac{\frac{2k-1}{2}\lambda}{2n_2\cos\beta}.$$

Для наименьшей толщины $k = 1$, т. е. $d = \lambda/4n_2\cos\beta$. Из закона преломления находим

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha = 0{,}5316;\quad \beta = 32^\circ\,7';\quad d = 0{,}13\cdot 10^{-6}\text{ см}.$$

14.7. На пленку ($n_2 = 1{,}4$) под углом $\alpha = 52°$ падает белый свет. При какой толщине пленка в проходящем свете будет казаться красной? Длина волны красного света $\lambda = 6{,}7 \cdot 10^{-7}$ м.

Луч от источника S падает на пластинку, частично преломляясь и отражаясь в точках A, B, C и D (рис. 388).

Отражение луча в точке C не сопровождается потерей полуволны. Следовательно, оптическая разность хода лучей $SABK$ и $SABCD$ (см. задачу 14.6)

$$\Delta = 2BCn_2 - BKn_1.$$

Сделав выкладки, аналогичные тем, которые были сделаны в упомянутой выше задаче, получим

$$\Delta = 2dn_2 \cos\beta = 2d\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha},$$

где d — толщина пленки; n_2 — показатель преломления пленки; α — угол падения; β — угол преломления луча.

Условием максимума, т. е. условием того, что пленка будет казаться окрашенной, является

$$2d\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha} = k\lambda.$$

Для минимальной толщины пленки $k = 1$, так что

$$d = \frac{\lambda}{2\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha}} = 2{,}89 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$$

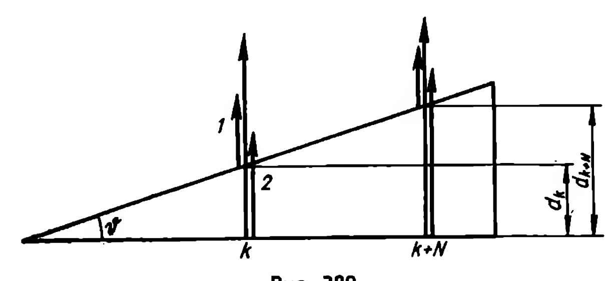


Рис. 389

14.8. На стеклянный клин нормально его грани падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}66$ мкм. Число интерференционных полос на 1 см $N = 10$. Определить преломляющий угол клина.

Параллельный пучок лучей, отражаясь от верхней и нижней граней клина, интерферирует, образуя устойчивую картину. Так как интерференция на клине наблюдается при малых преломляющих углах клина, лучи, отраженные от верхней и нижней граней, можно считать параллельными (лучи *1* и *2* на рис. 389). Оптическая разность хода двух лучей складывается из разности оптических длин путей этих лучей $2dn \cos\beta$ и половины длины волны, представляющей собой добавочную разность хода, возникающую при отражении от оптически более плотной среды.

Таким образом, условие интерференционного минимума может быть записано в виде

$$\Delta = 2d_k n \cos\beta + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

где n — показатель преломления стекла; d_k — толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру k; β — угол преломления; λ — длина волны.

Учитывая, что угол падения $\alpha = 0$, а $\cos\beta = 1$, можно записать

$$2d_k n = k\lambda.$$

Пусть темной полосе номер $k+N$ соответствует толщина d_{k+N}. Согласно условию на расстоянии l укладывается число интерференционных полос $N = 10$. Из рисунка очевидно, что

$$\sin\vartheta = \frac{d_{k+N} - d_k}{l}.$$

Вследствие малости угла ϑ можно считать, что $\sin\vartheta \approx \vartheta$ и

$$\vartheta = \frac{d_{k+N} - d_k}{l} = \frac{\dfrac{k+N}{2n}\lambda - \dfrac{k}{2n}\lambda}{l} = \frac{N\lambda}{2nl} = 2{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

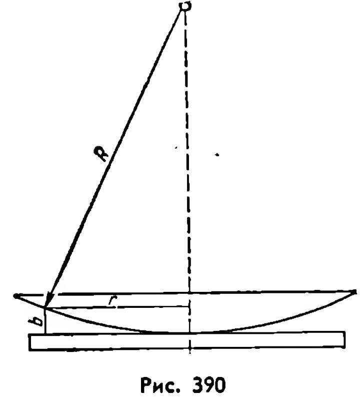


Рис. 390

14.9. Кольца Ньютона наблюдаются при отражении света от соприкасающихся друг с другом плоскопараллельной толстой стеклянной пластинки и плоско-выпуклой линзы с большим радиусом кривизны. Роль тонкой пленки, от которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой. Расстояние между светлыми кольцами Ньютона с номерами m и n равно l. Радиус кривизны линзы — R. Найти длину волны монохроматического света, падающего нормально на установку. Наблюдения проводятся в отраженном свете.

Найдем радиусы колец Ньютона, получающихся при падении света по нормали к пластинке. В этом случае угол падения $\alpha = 0$, $\cos\beta = 1$ и оптическая разность хода равна удвоенной толщине зазора (показатель преломления воздуха $n = 1$) плюс $\lambda/2$ вследствие того, что отражение происходит от более оптически плотной среды (от пластинки). Из рис. 390 следует, что $R^2 = (R-b)^2 + r^2 \approx R - 2Rb + r^2$, где R — радиус кривизны линзы; r — радиус кольца Ньютона (ввиду малости величины воздушного зазора b мы пренебрегаем величиной b^2 по сравнению с $2Rb$).

Из вышеприведенного выражения находим $b = r^2/2R$. Таким образом,

$$\Delta = 2b + \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

В точках, для которых $\Delta = k\lambda$, возникнут максимумы, а в точках, для которых $\Delta = (2k+1)\lambda/2$,— минимумы интенсивности. Следовательно, радиусы светлых колец Ньютона будут определяться формулой

$$r_k^{\text{c}} = \sqrt{(2k-1) R \frac{\lambda}{2}} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

радиусы темных колец — формулой

$$r_k^{\text{т}} = \sqrt{kR\lambda} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Расстояние между светлыми кольцами с номерами m и n

$$l = r_m^{\text{c}} - r_n^{\text{c}} = \sqrt{(2m-1) R \frac{\lambda}{2}} - \sqrt{(2n-1) R \frac{\lambda}{2}}.$$

Путем несложных преобразований получим формулу

$$l^2 = R\lambda \left[m + n - 1 - \sqrt{(2m-1)(2n-1)}\right],$$

откуда

$$\lambda = \frac{l^2}{R\left[m + n - 1 - \sqrt{(2m-1)(2n-1)}\right]}.$$

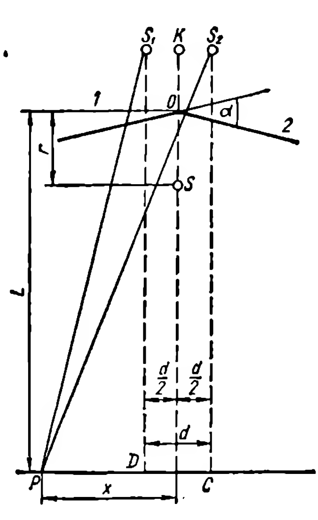


Рис. 391

14.10. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм, падающим нормально. Найти толщину воздушного слоя между линзой и стеклянной пластинкой в том месте, где наблюдается пятое темное кольцо в отраженном свете.

Пусть толщина воздушного зазора в том месте, где наблюдается пятое темное кольцо, равна b. Тогда разность хода лучей $\Delta = 2b + \lambda/2$. Условие интерференционного минимума: $\Delta = (2k+1)\lambda/2$, следовательно,

$$2b + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2};$$

$$2b = k\lambda;$$

$$b = \frac{k\lambda}{2} = 1{,}5 \text{ мкм}.$$

14.11. Угол между зеркалами Френеля равен α (рис. 391). На зеркала падает свет от источника S, расположенного на расстоянии r от линии пересечения зеркал. Длина световых волн — λ. Отраженный от зеркал свет дает интерференционную картину на экране, отстоящем на расстояние L от линии пересечения зеркал. Каково расстояние между интерференционными полосами на экране?

По законам отражения от плоского зеркала лучи, испускаемые источником S и отраженные от зеркала 1, как бы исходят из мни-

мого источника S_1. Аналогично лучи, отраженные от зеркала 2, можно рассматривать исходящими из мнимого источника S_2, являющегося изображением источника S в зеркале 2. Мнимые источники взаимно когерентны.

Согласно условию задачи лучи распространяются в воздухе, значит, оптическая разность хода равна геометрической. Определим разность хода лучей S_1P и S_2P. Из прямоугольных треугольников S_2CP и S_1DP находим

$$\left.\begin{aligned}(PS_1)^2 = (DS_1)^2 + (DP)^2;\\ (PS_2)^2 = (CS_2)^2 + (CP)^2.\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Как следует из решения задачи 13.14, $OK = r$; $S_1S_2 = d = 2r\sin\alpha$, поэтому уравнения (*) могут быть представлены в виде

$$(PS_1)^2 = (L+r)^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2;$$

$$(PS_2)^2 = (L+r)^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2.$$

Вычитая почленно из второго уравнения первое, получаем

$$(PS_2)^2 - (PS_1)^2 = 2dx,$$

или

$$(PS_2 - PS_1)(PS_2 + PS_1) = 2dx.$$

Величина $\Delta = PS_2 - PS_1$ представляет собой искомую разность хода лучей S_1P и S_2P. Вследствие малости d по сравнению с $(L+r)$ можно считать, что $PS_2 + PS_1 \approx 2(L+r)$. Таким образом,

$$\Delta = \frac{dx}{L+r}.$$

Пусть в точке P на экране наблюдается k-й интерференционный максимум. Условием этого максимума является: $\Delta = k\lambda$, т. е. $k\lambda = dx/(L+r)$, и расстояние между интерференционными полосами

$$\Delta x = \frac{x}{k} = \frac{\lambda(L+r)}{d} = \frac{\lambda(L+r)}{2r\sin\alpha}$$

14.12. Каков тупой угол бипризмы Френеля, если при расстоянии r от источника S (рис. 392) до бипризмы и при расстоянии l от бипризмы до экрана интерференционные полосы света с длиной волны λ отстоят друг от друга на расстоянии Δx? Показатель преломления материала призмы равен n.

Отклоняющие углы у основания бипризмы малы, угол падения лучей на бипризму тоже мал, вследствие чего все лучи отклоняются бипризмой на одинаковый угол

$$\alpha = (n-1)\gamma.$$

В результате образуются две волны, исходящие из мнимых источников S_1 и S_2, лежащих в одной плоскости с S.

Расстояние между источниками

$$d = 2r\sin\alpha \approx 2r\alpha = 2r(n-1)\gamma.$$

Расстояние от источников до экрана

$$L = l + r.$$

Разность хода лучей от источников, расстояние между которыми равно d и которые отстоят от экрана на $l + r$, равна

$$\Delta = \frac{dx}{l+r},$$

где x — ширина интерференционной полосы. Условие интерференционного максимума: $\Delta = k\lambda$, следовательно,

$$k\lambda = \frac{dx}{l+r} = \frac{2r(n-1)\gamma x}{l+r}.$$

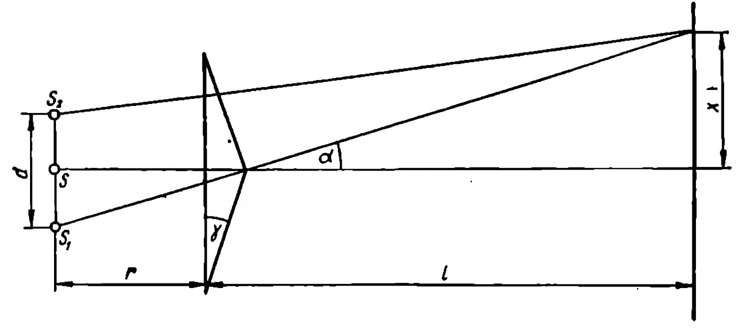


Рис. 392

Расстояние между интерференционными полосами

$$\Delta x = \frac{x}{k} = \frac{\lambda(l+r)}{2r(n-1)\gamma}.$$

Таким образом, тупой угол бипризмы

$$\beta = 180^\circ - 2\gamma = \pi - \frac{\lambda(l+r)}{2r(n-1)\Delta x}.$$

14.13. На поверхность стеклянного объектива нанесена тонкая пленка, показатель преломления которой $n_2 = 1{,}2$ («просветляющая» пленка). Какова наименьшая толщина этой пленки, при которой произойдет максимальное ослабление отраженного света в средней части видимого спектра?

Условие того, что отраженные от верхней и нижней поверхностей пленки волны гасят друг друга, запишется (для пленки минимальной толщины) следующим образом:

$$2d = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{n_2},$$

где λ/n_2 — длина волны в пленке; d — толщина пленки. В средней части спектра длина волны зеленого света $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-5}$ см. Таким образом,

$$d = 1{,}15 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$$

14.14. Чему равна постоянная дифракционной решетки, если для того чтобы увидеть красную линию ($\lambda = 0,7$ мкм) в спектре третьего порядка, зрительную трубу пришлось установить под углом $\alpha = 48° 36'$ к оси коллиматора? Какое число штрихов нанесено на 1 см длины этой решетки? Свет падает на решетку нормально (рис. 393).

Условием получения дифракционного максимума является: $d \sin \alpha = k\lambda$, где $d = a + b$ — постоянная дифракционной решетки; a — ширина щели; b — расстояние между щелями; α — угол отклонения лучей; k — порядок спектра; λ — длина волны. Отсюда

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \alpha} = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Число штрихов на 1 см решетки

$$n = \frac{1}{d} = 3570.$$

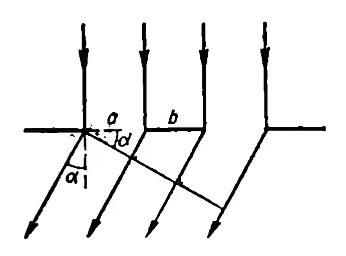


Рис. 393

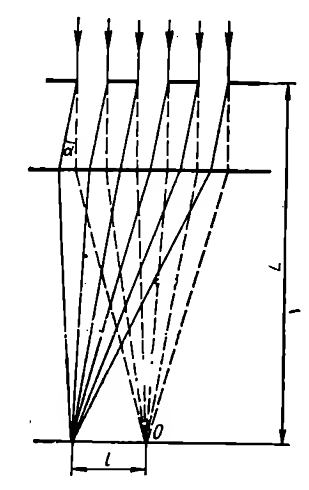


Рис. 394

14.15. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия ($\lambda_1 = 6,7 \times 10^{-5}$ см) спектра второго порядка?

Для того чтобы произошло наложение спектров, необходимо, чтобы совпадали углы отклонения накладывающихся лучей, т. е.

$$d \sin \alpha = k_1\lambda_1;$$
$$d \sin \alpha = k_2\lambda_2.$$

Таким образом,

$$k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2;$$
$$\lambda_2 = \frac{k_1\lambda_1}{k_2} = 4,46 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

14.16. Определить число штрихов на 1 см дифракционной решетки, если при нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 600$ нм решетка дает первый максимум на расстоянии $l = 3,3$ см от центрального. Расстояние от решетки до экрана $L = 110$ см (рис. 394).

Число штрихов на 1 см решетки определяем по формуле $n = 1/d$, где период решетки d найдем из формулы $d \sin \alpha = k\lambda$ (α —

угол, под которым наблюдается k-й максимум; k — порядок максимума).

Ввиду того что для максимума 1-го порядка угол α мал, можно принять $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = l/L$, следовательно, уравнение дифракционной решетки может быть переписано в виде $dl/L = k\lambda$, откуда

$$d = \frac{k\lambda L}{l}.$$

Таким образом, число штрихов на 1 см длины решетки

$$n = \frac{l}{k\lambda L} = 500.$$

14.17. На дифракционную решетку в направлении нормали к ее поверхности падает монохроматический свет. Период решетки равен 2 мкм. Какого наибольшего порядка дифракционный максимум дает эта решетка в случае красного ($\lambda_1 = 0{,}7$ мкм) и фиолетового ($\lambda_2 = 0{,}45$ мкм) света?

Порядок дифракционного максимума $k = \dfrac{d\sin\alpha}{\lambda}$, где d — постоянная решетки; α — угол отклонения лучей; λ — длина волны монохроматического света.

Так как $\sin\alpha \leqslant 1$, то $k \leqslant d/\lambda$. Подставив числовые значения, получим

$$k_1 \leqslant 2{,}86; \quad k_2 \leqslant 4{,}44.$$

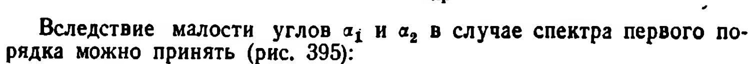
Если учесть, что порядок максимумов является целым числом, найдем, что для красного света $k_{1\,\text{макс}} = 2$, а для фиолетового $k_{2\,\text{макс}} = 4$.

14.18. На дифракционную решетку, содержащую $n = 500$ штрихов на 1 мм, нормально падает белый свет. Спектр проектируется на экран помещенной вблизи решетки линзой. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана $L = 4$ м. Границы видимого света: $\lambda_{\text{кр}} = 780$ нм, $\lambda_{\text{ф}} = 400$ нм.

Рис. 395

Запишем уравнение дифракционной решетки для случая дифракции красных и фиолетовых лучей:

$$d\sin\alpha_1 = k\lambda_{\text{ф}};$$
$$d\sin\alpha_2 = k\lambda_{\text{кр}}.$$



Вследствие малости углов α_1 и α_2 в случае спектра первого порядка можно принять (рис. 395):

$$\sin\alpha_1 \approx \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{l_1}{L};$$
$$\sin\alpha_2 \approx \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{l_2}{L}.$$

Таким образом,

$$\frac{dl_1}{L} = k\lambda_ф;$$

$$\frac{dl_2}{L} = k\lambda_{кр},$$

и длина спектра

$$\Delta l = l_2 - l_1 = \frac{kL}{d}(\lambda_{кр} - \lambda_ф) = knL(\lambda_{кр} - \lambda_ф) = 76 \text{ см}.$$

14.19. На грань кристалла падает параллельный пучок рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 0{,}147$ нм. Расстояние между атомными плоскостями кристалла $d = 0{,}28$ нм. Под каким углом к плоскости грани наблюдается дифракционный максимум второго порядка?

Согласно формуле Вульфа — Брэгга $2d \sin \vartheta = k\lambda$, где d — расстояние между атомными плоскостями; ϑ — угол между падающим лучом и плоскостью грани кристалла; k — порядок максимума; λ — длина волны,

$$\sin \vartheta = \frac{k\lambda}{2d} = 0{,}262;$$

$$\vartheta = 15° \, 12'.$$

14.20. Какое наименьшее число штрихов должна содержать решетка, чтобы в спектре первого порядка можно было разделить две желтые линии натрия с длинами волн $\lambda_1 = 589$ нм, $\lambda_2 = 589{,}6$ нм? Какова длина такой решетки, если постоянная решетки $d = 10$ мкм?

Разрешающая способность дифракционной решетки определяется формулой $\lambda/\Delta\lambda = kN$, где N — общее число щелей решетки; k — порядок спектра; λ, $\lambda + \Delta\lambda$ — длины двух близких спектральных линий, еще разрешаемых решеткой.

Общее число щелей

$$N = \frac{\lambda}{k\,\Delta\lambda} = \frac{\lambda_1}{k(\lambda_2 - \lambda_1)} = 982.$$

Длина решетки

$$L = dN = 9{,}8 \text{ мм}.$$

14.21. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла $\lambda_{кр} = 275$ нм. Найти работу выхода электрона из этого металла и максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны 180 нм.

Работа выхода электрона $A = h\nu_{кр} = hc/\lambda_{кр} = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж $=$ $= 4{,}5$ эВ, где h — постоянная Планка; $\nu_{кр}$ — частота света, соответствующая красной границе фотоэффекта.

Согласно уравнению Эйнштейна $E = A + mv^2/2$, где $E = h\nu =$ $= hc/\lambda$ — энергия фотона (ν — частота света, которым освещается металл; c — скорость света); m — масса покоя электрона; v — его максимальная скорость.

Уравнение Эйнштейна может быть переписано в виде

$$h\frac{c}{\lambda} = h\frac{c}{\lambda_{кр}} + \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{кр}}\right)} = 9,1 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

14.22. Найти частоту света, вырывающего из поверхности металла электроны, полностью задерживающиеся обратным потенциалом в 2В. Фотоэффект у этого металла начинается при частоте падающего света $\nu_{кр} = 6 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$. Найти работу выхода электрона из этого металла.

Работа выхода

$$A = h\nu_{кр} = 2,48 \text{ эВ}.$$

Чтобы задержать вылетающие электроны, необходимо приложить тормозящее электрическое поле $eU = mv^2/2$, где e — заряд электрона; U — разность потенциалов, пройденная электроном. Таким образом, $h\nu = A + eU$, откуда

$$\nu = \frac{A + eU}{h} \approx 1,09 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

14.23. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых из поверхности серебра: 1) ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda_1 = 0,155$ мкм; 2) γ-лучами с длиной волны $\lambda_2 = 0,001$ нм.

Максимальная скорость фотоэлектронов может быть определена из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта: $h\nu = A + E_к$, где $h\nu$ — энергия фотона; h — постоянная Планка; ν — частота света; A — работа выхода; $E_к$ — кинетическая энергия электрона.

Кинетическая энергия электрона может быть определена или по классической формуле

$$E_к = \frac{m_0 v^2}{2},$$

где m_0 — масса покоя электрона; v — его скорость; или по релятивистской формуле

$$E_к = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

где $E_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя электрона; $\beta = v/c$ (c — скорость света).

Скорость фотоэлектронов зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект. Если энергия фотона много меньше энергии покоя электрона, скорость электрона будет много меньше скорости света, и может быть применена формула классической механики; если же энергия фотона сравнима с энергией покоя электрона, должна быть применена релятивистская формула.

Энергия покоя электрона

$$E_0 = m_0 c^2 = 8,199 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,51 \text{ МэВ}.$$

Энергии фотонов в случаях 1) и 2) соответственно равны:

$$E_1 = h\nu_1 = h\frac{c}{\lambda_1} = 1{,}28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 8 \text{ эВ};$$

$$E_2 = h\nu_2 = h\frac{c}{\lambda_2} = 1{,}99 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 1{,}24 \text{ МэВ}.$$

Таким образом, в случае 1) может быть применена классическая формула, а в случае 2) — релятивистская:

$$E_1 = A + \frac{m_0 v_1^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(E_1 - A)}{m_0}} = 1{,}08 \cdot 10^6 \text{ м/с},$$

$$E_2 = A + E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

В данном случае работа выхода из серебра $A = 0{,}75 \cdot 10^{-18}$ Дж $=$ $= 4{,}7$ эВ пренебрежимо мала по сравнению с энергией фотона, следовательно, можно записать

$$E_2 = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Сделав преобразования, найдем

$$\beta = \frac{\sqrt{(2E_0 + E_2)E_2}}{E_0 + E_2} = 0{,}95,$$

откуда

$$v_2 = c\beta = 2{,}85 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

14.24. На поверхность площадью $S = 3$ см^2 за время $t = 5$ мин падает свет, энергия которого $W = 20$ Дж. Определить световое давление на поверхность, если она: а) полностью поглощает лучи, б) полностью отражает лучи.

Световое давление определяется по формуле $p = \frac{E_0}{c}(1 + \rho)$, где E_0 — энергия излучения, падающего на единицу площади за единицу времени; c — скорость света в вакууме; ρ — коэффициент отражения.

Очевидно, что $E_0 = \frac{W}{St}$, где S — площадь поверхности, на которую падает свет; t — время.

а) Если поверхность полностью поглощает лучи, то $\rho = 0$ и

$$p_1 = \frac{E_0}{c} = \frac{W}{Sct} = 7{,}4 \cdot 10^{-7} \text{ Па}.$$

б) Если поверхность полностью отражает лучи, то $\rho = 1$ и

$$p_2 = \frac{2E_0}{c} = \frac{2W}{Sct} = 14{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ Па}.$$

14.25. Монохроматический пучок света ($\lambda = 490$ нм), падая нормально на поверхность, производит давление на нее, равное $9{,}81 \times \times 10^{-7}$ Н/м². Сколько квантов света падает ежесекундно на единицу площади этой поверхности? Коэффициент отражения света $\rho = 0{,}50$.

Давление, производимое светом,

$$p = \frac{E_0}{c}(1 + \rho),$$

откуда

$$E_0 = \frac{pc}{1 + \rho}.$$

Если энергия одного кванта $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, то количество квантов света, падающих ежесекундно на единицу поверхности,

$$N = \frac{E_0}{E} = \frac{pc\lambda}{hc(1 + \rho)} = \frac{p\lambda}{h(1 + \rho)} = 2{,}5 \cdot 10^{21}.$$

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ МИКРОЧАСТИЦ

15. Элементы специальной теории относительности

Постулаты Эйнштейна. 1. Никакие эксперименты, проводимые в данной лабораторной инерциальной системе, не позволяют различить, находится эта система в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Физические процессы во всех инерциальных системах протекают одинаково и не зависят от выбора системы отсчета, т. е. инвариантны по отношению к преобразованиям из одной инерциальной системы в другую.

2. В отличие от всех других скоростей, меняющихся при переходе от одной системы координат к другой, скорость света в вакууме c не зависит ни от движения источника света, ни от движения наблюдателя. Она одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является инвариантом.

Примечание. Все нижеприведенные положения относятся к инерциальным системам.

Преобразования Лоренца. Пусть система координат x', y', z', t' движется относительно системы x, y, z, t со скоростью v, направленной вдоль общей для обеих систем оси OX. Переход от одной системы к другой осуществляется посредством преобразований Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; y' = y; \; z' = z; \; t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta = v/c$.

Относительность одновременности. Пусть в системе K происходят события A и B в одной и той же точке $x_A = x_B$. Допустим, кроме того, что оба события происходят одновременно, так что $t_A = t_B$. При переходе к другой системе эти события также будут одновременными.

Однако если события A и B произошли не в одной, а в двух разных точках x_A и x_B данной системы K, то в другой системе K' эти события оказываются неодновременными. Интервал времени между событиями в системе K'

$$t'_A - t'_B = \frac{x_B - x_A}{c\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}}.$$

Замедление времени. Парадокс часов. Пусть в системе, движущейся с субсветовой скоростью относительно наблюдателя, измерен

промежуток времени Δt_0 (собственное время). В лабораторной системе, где наблюдатель неподвижен, часы покажут при этом промежуток времени Δt. Оба значения связаны соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т. е. движущиеся часы идут медленнее неподвижных. Таким образом, при движении с субсветовой скоростью течение времени замедляется.

Закон сложения скоростей. Пусть тело движется со скоростью u относительно некоторой системы координат. В свою очередь, эта система движется со скоростью v относительно наблюдателя так, что обе скорости лежат на одной прямой. Результирующая скорость тела относительно наблюдателя

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{vu}{c^2}}.$$

Из этой формулы видно, что результирующая скорость не может превысить скорость света. Действительно, даже при $v = u = c$ получаем $w = c$.

Сокращение длины. Пусть в системе, движущейся с субсветовой скоростью относительно лабораторной системы, измерена длина l_0 тела вдоль направления скорости (собственная длина). В лабораторной системе, где наблюдатель неподвижен, измеренная длина тела равна l. Оба значения связаны соотношением

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2},$$

т. е. длина тела сокращается в направлении движения. В направлении, перпендикулярном движению, сокращения длины не происходит. В промежуточном случае сокращение происходит вдоль проекции на направление движения.

Изменение массы. Масса тела, скорость которого приближается к скорости света, возрастает по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где m_0 — масса покоя.

Импульс частицы с массой покоя m_0, движущейся с субсветовой скоростью v,

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Полная энергия тела с массой покоя m_0, движущегося с субсветовой скоростью v,

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Величина $m_0c^2 = E_0$ называется энергией покоя тела.

Кинетическая энергия тела

$$E_к = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Изменение массы тела (или системы тел) на величину Δm соответствует изменению энергии тела (или системы тел) на величину

$$\Delta E = c^2\,\Delta m.$$

Эффект Доплера. Воспринимаемая неподвижным наблюдателем частота ν света, приходящего от движущегося источника, связана с собственной частотой ν_0 излучаемого света следующими соотношениями.

1. Угол между скоростью источника и направлением наблюдения равен 90° (поперечный эффект Доплера):

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Этот эффект обусловлен увеличением периода колебаний в движущемся источнике света по сравнению с неподвижным источником.

2. Угол между скоростью источника и направлением наблюдения равен 0° (взаимное удаление) или 180° (взаимное сближение).

В первом случае (красное смещение)

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Во втором случае (фиолетовое смещение)

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Кинетическая энергия частицы с зарядом ze, прошедшей ускоряющую разность потенциалов U,

$$E_к = zeU.$$

Под субсветовыми, или релятивистскими, скоростями понимают скорости $v > 0{,}14c$. При $v = 0{,}14c$ ошибка, вызванная использованием нерелятивистских формул для вычисления механических величин, не превышает 1%. При $v \approx 0{,}42c$ ошибка достигает 10%.

15.1. Ракета движется относительно неподвижного наблюдателя на Земле со скоростью $v = 0{,}99c$. Найти, как изменятся линейные размеры тел и плотность вещества в ракете (по линии движения) для неподвижного наблюдателя; какое время пройдет по часам неподвижного наблюдателя, если по часам, движущимся вместе с ракетой, прошел один год.

Размеры тел вдоль линии движения составят (для земного наблюдателя)

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1-\left(\frac{0{,}99c}{c}\right)^2} \approx 0{,}14l_0.$$

Плотность вещества в ракете для земного наблюдателя

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{lS\sqrt{1-(0{,}99)^2}},$$

где V — объем; S — сечение предмета, перпендикулярное к линии движения. Так как поперечные (по отношению к линии движения) размеры тел не меняются, то

$$V = l_0 S\sqrt{1-\beta^2};$$

$$\rho = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}\, l_0 S\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

В рассматриваемом случае

$$\rho = \frac{\rho_0}{1-(0{,}99)^2} \approx 50{,}2\rho_0.$$

Время полета ракеты с точки зрения земного наблюдателя

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-(0{,}99)^2}} \approx \frac{1}{0{,}14} \approx 7{,}1 \text{ года}.$$

15.2. Какая энергия выделилась бы при полном превращении 1 г вещества в излучение?

По формуле Эйнштейна

$$E_0 = m_0 c^2 = 9 \cdot 10^{13} \text{ Дж}.$$

15.3. Какому изменению массы соответствует изменение энергии на 4,19 Дж?

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \approx 4{,}65 \cdot 10^{-17} \text{ кг}.$$

15.4. Найти изменение энергии, соответствующее изменению массы на 1 а. е. м.

$$\Delta E = c^2 \Delta m = 1{,}49 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} \approx 931{,}5 \text{ МэВ}.$$

15.5. Какому изменению массы соответствует энергия, вырабатываемая за 1 ч электростанцией мощностью $2{,}5 \cdot 10^6$ кВт?

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = 10^{-4} \text{ кг}.$$

15.6. Серпуховский ускоритель разгоняет протоны до кинетической энергии 76 ГэВ. Найти: 1) массу, 2) скорость ускоренного протона.

1) Полная энергия ускоренного протона $E_к + E_0 = mc^2$. Разделив обе части этого равенства на $E_0 = m_0c^2$, найдем

$$\frac{m}{m_0} = \frac{E_к + E_0}{E_0}; \quad m = \left(1 + \frac{E_к}{E_0}\right) m_0.$$

Так как E_0 для протона равно 0,938 ГэВ (см. задачу 15.20) и $E_к = 76$ ГэВ, то

$$m = \left(1 + \frac{76}{0,938}\right) m_0 \approx 82 m_0,$$

2) $$E_к + E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда

$$\beta^2 = 1 - \frac{E_0^2}{(E_к + E_0)^2} = \frac{2E_0 E_к + E_к^2}{(E_0 + E_к)^2}$$

и

$$v = \frac{c}{E_0 + E_к} \sqrt{E_к (2E_0 + E_к)}.$$

В данном случае $E_к = 76$ ГэВ, $E_0 = 0,938$ ГэВ и $v \approx 0,9999c$.

15.7. Две ракеты движутся равномерно и прямолинейно с относительной скоростью $v = 0,6c$. Какое время пройдет для наблюдателя во второй ракете за 8 ч, прошедших для наблюдателя в первой ракете? Как изменится промежуток времени между двумя событиями во второй ракете с точки зрения наблюдателя, находящегося в первой ракете?

Так как обе ракеты являются равноправными инерциальными системами отсчета, то для наблюдателя во второй ракете пройдет тоже 8 ч.

Очевидно, что

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t_1}{\sqrt{1-(0,6)^2}} = 10 \text{ ч}.$$

15.8. Две ракеты движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = v_2 = \frac{3c}{4}$ по отношению к неподвижному наблюдателю. Найти скорость сближения ракет по классической и релятивистской формулам сложения скоростей.

По классической формуле

$$w = v_1 + v_2 = \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c = \frac{3}{2}c,$$

что противоречит постулату теории относительности, утверждающему, что скорость любого тела не может превышать скорость света в вакууме.

По релятивистской формуле

$$w = \frac{3c/4 + 3c/4}{1 + 9c^2/16c^2} = 0,96c.$$

15.9. Найти скорость частицы, если ее кинетическая энергия составляет половину энергии покоя.

$$E_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = \frac{m_0 c^2}{2};$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2}{3}; \quad v = 2,22 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

15.10. Найти скорость космической частицы, если ее полная энергия в k раз превышает энергию покоя.

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = km_0c^2; \quad v = \frac{c}{k}\sqrt{k^2-1}.$$

Как видно из формулы, даже при больших значениях k (когда можно пренебречь единицей по сравнению с k) $v \to c$, оставаясь всегда меньше c.

15.11. Найти скорость кванта света, испущенного звездой, движущейся к Земле со скоростью v.

Скорость кванта света равна c. Скорость его приближения к Земле равна

$$\frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = c.$$

15.12. При какой скорости кинетическая энергия любой элементарной частицы равна ее энергии покоя?

$$E_к = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2,$$

т. е.

$$m = 2m_0$$

или

$$m_0/\sqrt{1-\beta^2} = 2m_0.$$

Отсюда

$$v \approx 0{,}866c.$$

Рис. 396

15.13. Найти в системе наблюдателя угол между диагоналями квадрата, движущегося со скоростью 0,9c в направлении, параллельном одной из сторон (рис. 396).

Продольный размер сократится в отношении

$$\frac{l_0}{l} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}81}} \approx \frac{1}{0{,}44}.$$

Поперечный размер сохранится. Поэтому

$$\alpha = 2\beta = 2\,\mathrm{arctg}\,0{,}44 \approx 48°.$$

15.14. Протон летит к северу со скоростью $v_p = 0{,}7c$, альфа-частица — к югу со скоростью $v_\alpha = 0{,}2c$. Куда движется центр масс этой системы?

Центр масс движется в сторону частицы с бо́льшим импульсом. Для протона

$$m_pv_p = \frac{m_0 \cdot 0{,}7c}{\sqrt{1-0{,}49}} \approx m_0c.$$

Для альфа-частицы

$$m_\alpha v_\alpha = \frac{4m_0 \cdot 0{,}2c}{\sqrt{1-0{,}04}} \approx 0{,}8\, m_0c.$$

Следовательно, центр массы движется к северу, туда же, куда и протон.

15.15. Насколько увеличится масса частицы, заряд которой равен ze, после прохождения ускоряющей разности потенциалов U?

Согласно задаче 15.6 увеличение массы

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{zeU}{m_0c^2} = \frac{m_0c^2 + zeU}{m_0c^2}$$

или, если обозначить $m - m_0 = \Delta m$,

$$\Delta m = \frac{E_k}{c^2} = \frac{zeU}{c^2}.$$

15.16. Частица с массой покоя m_0 и зарядом ze влетает со скоростью v в тормозящее электрическое поле. Какую разность потенциалов она сможет преодолеть?

Очевидно, частица будет двигаться против сил поля до тех пор, пока ее кинетическая энергия $E_к$ не перейдет в потенциальную zeU, где U — искомая разность потенциалов. Поэтому

$$E_к = mc^2 - m_0c^2 = zeU,$$

откуда

$$U = \frac{(m - m_0)\,c^2}{ze}.$$

Для протона со скоростью $v = 0{,}9c$ ($z = 1$):

$$m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2{,}29m_0;$$

$$U = \frac{1{,}29m_0c^2}{e} = 1209\ \text{МВ}.$$

15.17. Доказать, что при малых скоростях релятивистская формула кинетической энергии переходит в классическую.

Релятивистская формула кинетической энергии:

$$E_к = m_0c^2\left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Разложим выражение $(1-\beta^2)^{-1/2}$ по формуле бинома Ньютона: $(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$ и отбросим члены более высокой степени, чем β^2, в силу их малости ($v \ll c$). Тогда

$$E_к \approx m_0c^2\left[1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right] = \frac{m_0v^2}{2}.$$

15.18. Скорость частицы с массой покоя m_0 составляет kc, где $k < 1$. Найти, во сколько раз увеличится масса частицы.

Известно, что $m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Если $v = kc$, то

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}.$$

Например, если $v = 0{,}99c$, то $m/m_0 \approx 7$.

15.19. Масса движущейся частицы в n раз больше ее массы покоя. Найти полную и кинетическую энергии частицы, если ее масса покоя — m_0.

$$E = mc^2 = nm_0c^2;$$

$$E_к = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(n - 1).$$

15.20. Выразить в джоулях и мегаэлектронвольтах энергии покоя электрона, протона, атомной единицы массы, массы в один килограмм.

Энергия покоя частицы с массой m_0 равна m_0c^2.

Для электрона

$$E_{e0} = 8{,}2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}.$$

Так как 1 Мэв $= 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж, то

$$E_{e0} \approx 0{,}51 \text{ МэВ}.$$

Для протона

$$E_{p0} = 15 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} \approx 938 \text{ МэВ}.$$

Для 1 а. е. м.

$$E_{а.\,е.\,м\,0} = 14{,}91 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} \approx 931{,}5 \text{ МэВ}.$$

Для 1 кг

$$E_{кг0} = 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж} \approx 5{,}6 \cdot 10^{29} \text{ МэВ}.$$

15.21. Солнце излучает ежеминутно энергию $E = 6{,}6 \cdot 10^{21}$ кВтч. Считая излучение Солнца постоянным, найти, за какое время масса Солнца уменьшится вдвое (1 кВтч $= 3{,}6 \cdot 10^6$ Дж).

Уменьшение массы Солнца за 1 мин равно

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} \approx 26{,}4 \cdot 10^{10} \text{ кг};$$

$$t = \frac{M^*_{Солнца}}{2\Delta m} \approx 7 \cdot 10^{12} \text{ лет}.$$

15.22. Мощность излучения Солнца $\approx 4 \cdot 10^{26}$ Вт. Насколько уменьшается ежесекундно масса Солнца? С каким ускорением двигалось бы Солнце и какую скорость оно приобрело бы за 1 год, если бы весь свет испускался только в одном направлении («фотонный двигатель»)?

Уменьшение массы Солнца за 1 с

$$\frac{E}{c^2} = 4{,}44 \cdot 10^9 \text{ кг}.$$

---

* См. Приложение 3.

Импульс этого излучения

$$mv = p = \frac{E}{c} = 1{,}33 \cdot 10^{18}\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Так как $\Delta(mv) = F\,\Delta t$, то, полагая $\Delta t = 1$ с, найдем, что сила, действующая на Солнце со стороны такого «фотонного двигателя», $F = 1{,}33 \cdot 10^{18}$ Н. Под действием этой силы Солнце приобрело бы ускорение

$$a = \frac{F}{m} = 6{,}7 \cdot 10^{-13}\ \text{м/с}^2.$$

За 1 год ($\approx 3 \cdot 10^7$ с) Солнце приобрело бы скорость

$$v = at \approx 2 \cdot 10^{-5}\ \text{м/с}.$$

15.23. Найти энергию гамма-излучения, возникающего при аннигиляции электрона и позитрона.

Масса покоя электрона равна 0,51 МэВ (см. задачу 15.20). Так как массы электрона и позитрона одинаковы, то энергия результирующего гамма-излучения равна 1,02 МэВ.

15.24. Мю-мезоны, экспериментально обнаруживаемые на дне глубоких шахт, образуются в земной атмосфере и успевают до распада пролететь расстояние $S = 6 \cdot 10^3$ м при скорости $v = 0{,}995\,c$. Найти время жизни мю-мезона Δt для земного наблюдателя и собственное время жизни мю-мезона Δt_0.

$$\Delta t = \frac{S}{v} \approx 2 \cdot 10^{-5}\ \text{с};$$

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - (0{,}995)^2} \approx 2 \cdot 10^{-6}\ \text{с}.$$

15.25. Определить импульс протона, масса которого равна массе покоя изотопа ^{4}He. Какую ускоряющую разность потенциалов должен был пройти протон, чтобы приобрести этот импульс?

Имеем (см. задачу 15.6)

$$m = 4m_0; \quad v = \frac{c}{E_к + E_0}\sqrt{E_к(2E_0 + E_к)} = \frac{c}{4E_0}\sqrt{3E_0(2E_0 + 3E_0)} = \frac{c\sqrt{15}}{4} \approx 0{,}982c.$$

Приращение массы (см. задачу 15.15)

$$\Delta m = m - m_0 = 4m_0 - m_0 = 3m_0 = \frac{eU}{c^2};$$

$$U = \frac{3m_0c^2}{e} \approx 2{,}8 \cdot 10^9\ \text{В}.$$

Импульс

$$p = mv \approx 4m_0 \cdot 0{,}98c \approx 19{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{кгм/с}^2.$$

15.26. На сколько процентов изменятся продольные размеры протона и электрона после прохождения ими разности потенциалов $U = 10^6$ В?

Кинетическая энергия обеих частиц $E_к = 1$ МэВ. По релятивистской формуле

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = zeU,$$

где e — элементарный заряд; z — число элементарных зарядов частицы. В случае протона и электрона $z = 1$. Отсюда

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0c^2}{eU + m_0c^2}.$$

Продольные размеры частиц равны

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2},$$

а относительное изменение продольных размеров

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{l_0 - l}{l} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = \frac{eU}{eU + m_0c^2}.$$

Для электрона $m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ, для протона $m_0c^2 = 938$ МэВ;

$$\left(\frac{\Delta l}{l}\right)_e = 66{,}1\%; \quad \left(\frac{\Delta l}{l}\right)_p \approx 0{,}1\%.$$

15.27. Какова должна быть энергия частицы, чтобы ее продольный размер стал в k раз меньше поперечного?

Обозначим $k = \frac{l_0}{l} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; кинетическая энергия частицы равна

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = m_0c^2(k-1).$$

15.28. Какова должна быть энергия частицы с массой покоя m_0, чтобы ее собственное время стало в n раз меньше лабораторного?

Обозначим собственное время через t_0, лабораторное — через t. Из соотношений $t = nt_0$ и $t = t_0/\sqrt{1-\beta^2}$ находим

$$n = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Кинетическая энергия частицы

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = m_0c^2(n-1).$$

15.29. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Т по окружности радиуса $r = 10$ см. Найти скорость электрона.

На электрон действует сила Лоренца $mv^2/r = evB$. Из этой формулы и из релятивистского выражения для импульса $p = m_0v/\sqrt{1-\beta^2}$ находим

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{eBr/m_0c}{\sqrt{1 + (eBr/m_0c)^2}}.$$

Так как

$$eBr/m_0c = 1{,}76,$$

то

$$\beta = 0{,}871 \text{ и } v = \beta c = 2{,}61 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

15.30. Какова должна быть кинетическая энергия частицы с массой покоя m_{01}, чтобы ее масса была бы такой же, как и масса частицы с массой покоя m_{02}, ускоренной до энергии $E_{к2}$?

Если массы двух частиц одинаковы, то одинаковы и их полные энергии:

$$E_{к1} + m_{01}c^2 = E_{к2} + m_{02}c^2.$$

Отсюда

$$E_{к1} = E_{к2} + c^2 (m_{02} - m_{01}).$$

15.31. Частицы с зарядами z_1e и z_2e и с массами покоя m_{01} и m_{02} соответственно прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов, после чего масса частицы *1* составила $1/к$ массы частицы *2*. Найти разность потенциалов.

Полная энергия частиц *1* и *2* равна соответственно

$$E_1 = \frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_1c^2; \quad E_2 = \frac{m_{02}c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_2c^2.$$

Так как $m_1 = m_2/k$, то $E_1 = E_2/k$, или $m_{01}c^2 + z_1eU = \frac{1}{k}(m_{02}c^2 + z_2eU)$. Отсюда

$$U = \frac{(m_{02} - km_{01})\, c^2}{e\,(kz_1 - z_2)}$$

$\left(\text{при условии, что } k \neq \frac{z_2}{z_1}\right)$.

15.32. Пара протон — антипротон может образоваться при соударении протона с энергией $E_к \approx 6$ ГэВ с неподвижным протоном. Найти, каковы должны быть наименьшие одинаковые энергии встречных протонных пучков для осуществления этой реакции.

Энергии протона 6 ГэВ соответствует скорость (см. задачу 15.6)

$$v = \frac{c}{E_0 + E_к}\sqrt{E_к\,(2E_0 + E_к)} \approx 0{,}99c,$$

если принять $E_0 \approx 0{,}938$ ГэВ.

При релятивистском сложении скоростей обоих пучков должна получиться скорость не меньше вышеуказанной величины, иначе реакция не произойдет:

$$\frac{v' + v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \geqslant 0{,}99c,$$

откуда $v' \approx 0{,}87c$. Кинетические энергии встречных протонов с такой скоростью

$$E_к = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(0{,}87)^2}} - m_0c^2 \approx 0{,}965 \text{ ГэВ.}$$

15.33. В космических лучах встречаются протоны с энергией порядка 10^{10} ГэВ. Если диаметр Галактики равен примерно 10^5 световых лет, то сколько времени потребуется протону, чтобы пройти сквозь Галактику, с точки зрения наблюдателя, связанного с Галактикой, и «с точки зрения протона»?

Обозначим массу протона (в энергетических единицах) через E_0, время в системе, связанной с наблюдателем, — через t и «собственное» время протона — через t_0. Тогда

$$\frac{E_к}{E_0} = \frac{mc^2 - m_0c^2}{m_0c^2}.$$

Так как $m_0c^2 \approx 1$ ГэВ, то, пренебрегая этой величиной по сравнению с 10^{10} ГэВ, находим, что

$$\frac{E_к}{E_0} \approx \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{10^{10}}{1} = 10^{10}.$$

В то же время отношение величин t и t_0 также равно $1/\sqrt{1-\beta^2}$. Поэтому

$$\frac{E_к}{E_0} = \frac{t}{t_0} = 10^{10}.$$

С точки зрения наблюдателя, связанного с Галактикой, скорость протона лишь незначительно отличается от скорости света, и поэтому с этой точки зрения протону для пересечения Галактики практически нужно затратить столько же времени, сколько и кванту света, т. е. 10^5 лет. Однако в системе, связанной с протоном (как видно из последнего соотношения), время течет медленнее в 10^{10} раз. Поэтому протону для пересечения Галактики потребуется $10^5/10^{10} = 10^{-5}$ лет $\approx$ ≈ 5 мин.

16. Элементы атомной физики

Атомная физика изучает свойства и строение электронной оболочки атома. Явления в этой области характеризуются рядом особенностей.

Атомизм. Любое вещество состоит из частиц — атомов, которые, в свою очередь, состоят из электронов, протонов и нейтронов. Электрический заряд также образуется из элементарных зарядов, равных $1{,}59 \cdot 10^{-19}$ Кл каждый. Устойчивыми носителями элементарного положительного заряда являются протон и позитрон, носителем элементарного отрицательного заряда является электрон. Кванты, или фотоны, являются элементарными частицами электромагнитного поля (которое представляет собой одну из форм существования материи).

Дискретность физических величин. Большинство физических величин, характеризующих движение микрочастиц в атомах, меняется дискретно, т. е. скачком. Сюда относятся энергия, момент количества движения и другие. Размеры этих скачков различны, но во всех случаях связаны с фундаментальной константой — постоянной Планка h, равной $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Корпускулярно-волновой дуализм. Все элементарные частицы и их образования обладают одновременно как корпускулярными, так и волновыми свойствами («корпускула» означает частица). Это относится как к собственно частицам (электроны, позитроны, протоны, нейтроны, ядра, атомы), так и к квантам, которые также можно рассматривать одновременно как волны и как частицы. Согласно гипотезе де Бройля, каждая микрочастица характеризуется волной, длина и частота которой связаны с импульсом и энергией частицы соотношениями

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}; \quad \nu = \frac{E}{h},$$

где $p = mv$ — импульс частицы.

Эта волна, называемая волной де Бройля, не является электромагнитной волной и не имеет аналога среди всех видов волн, изучаемых в классической физике.

Если ввести так называемый волновой вектор $\vec{k}$, модуль которого равен $2\pi/\lambda$, и использовать обозначения $\hbar = h/2\pi$, $\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$ и $\omega = 2\pi\nu$, то оба вышеприведенных соотношения можно записать в симметричной форме

$$E = \hbar\,\omega; \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

С другой стороны, квантам электромагнитного излучения (фотонам) можно приписать массу и импульс, как если бы они были частицами. Для них справедливы соотношения

$$\lambda = \frac{h}{p_ф} = \frac{h}{m_ф c}; \quad \nu = \frac{E}{h}.$$

Входящая в вышеприведенное соотношение электромагнитная масса фотона $m_ф$ вычисляется по релятивистской формуле

$$m_ф = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2},$$

а импульс фотона $p_ф$ — по формуле

$$p_ф = m_ф c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Если скорость микрочастицы близка к скорости света (ультрарелятивистская частица), то связанная с ней длина волны вычисляется по релятивистской формуле

$$\lambda = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 v} = \frac{hc}{\sqrt{2E_0E_к + E_к^2}} \approx \frac{hc}{E_к},$$

где $\beta = v/c$; $E_к$ — кинетическая энергия частицы; $E_0 = m_0c^2$.

Постулаты Бора. Согласно упрощенной модели атома Резерфорда — Бора атом состоит из положительно заряженного ядра с зарядом Ze (Z — атомный номер), вокруг которого по круговым орбитам движутся электроны. Каждый из электронов несет отрицательный заряд e. Для движения по окружности электрон должен обладать центростремительным ускорением. Это ускорение электрону сообщает кулоновская сила взаимодействия электрона с ядром:

$$m\frac{v^2}{r} = \varkappa\frac{Ze \cdot e}{r^2}. \qquad (*)$$

Здесь m — масса электрона; r — радиус орбиты; $\varkappa = 1/4\pi\varepsilon_0$, где ε_0 — электрическая постоянная.

Однако ускоренное движение заряженной частицы есть переменный ток (постоянный ток — это равномерное и прямолинейное движение зарядов). Переменный ток создает в пространстве переменное электромагнитное поле, на которое должна расходоваться энергия электрона. По этой причине, с классической точки зрения, энергия электрона на орбите должна уменьшаться и он, в конце концов, должен упасть на ядро. В действительности этого не происходит. Чтобы согласовать этот факт (и другие, необъяснимые с классических позиций, факты) с теорией, Бор ввел следующие, экспериментально подтвержденные, постулаты:

1. Условие стационарности. Электрон в атоме может находиться только в некоторых определенных устойчивых состояниях, которые называются стационарными. Находясь в стационарных состояниях, атом не излучает (этим постулатом утверждается неприменимость классической теории).

2. Условие квантования. Из всех возможных состояний в атоме реализуются только те, для которых момент количества движения электрона на орбите (орбитальный момент) равен целому числу постоянных Планка h, деленных на 2π:

$$M = mrv = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar;\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (**)$$

Здесь $h/2\pi = \hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Интересно, что при выполнении этого условия длина орбиты оказывается равной $2\pi r = nh/mv = n\lambda$. Это означает, что вдоль боровской орбиты укладывается целое число длин волн электрона. Таким образом, получаются как бы стоячие волны.

3. Условие частот. Атом излучает только при переходе из одного дискретного состояния в другое. Если обозначить энергию атома в начальном состоянии через E_i, а в конечном — через E_f, то разность энергий начального и конечного состояний будет излучена в виде фотона с частотой ν:

$$E_i - E_f = h\nu.$$

Радиусы стационарных орбит. Из формул (*) и (**) следует:

$$r_n = \frac{r^2m^2v^2}{\varkappa Ze^2m} = \frac{n^2\hbar^2}{\varkappa Ze^2m} = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi me^2Z},$$

т. е. радиусы пропорциональны квадрату целого числа n и могут принимать лишь избранные значения, каждое из которых соответствует определенному значению n. Иначе говоря, радиусы орбит квантованы.

Энергия электрона в атоме. Полная энергия электрона в атоме слагается из кинетической энергии $E_к$ движения на орбите и потенциальной энергии W кулоновской силы притяжения к ядру. Потенциальная энергия электрона с зарядом e в поле ядра с зарядом Ze отрицательна, и ее значение в точке, находящейся на расстоянии r от ядра,

$$W = -\varkappa\frac{Ze \cdot e}{r} = -\varkappa\frac{Ze^2}{r}.$$

Кинетическая энергия электрона на орбите согласно (*)

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{\varkappa}{2}\frac{Ze^2}{r},$$

Полная энергия электрона на орбите

$$E = E_к + W = -\frac{\varkappa}{2}\frac{Ze^2}{r} = -\frac{\varkappa^2 me^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{me^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2},$$

т. е. она принимает только некоторые разрешенные значения, зависящие от целого числа n. Таким образом, энергия электрона в атоме квантована.

С ростом n энергия растет (ее абсолютное значение уменьшается). На большом расстоянии от ядра (математически, при $r \to \infty$) энергия становится равной нулю. Она изображается (так же, как и потенциальная энергия силы тяготения) в виде потенциальной ямы, с той разницей, что здесь электрон может находиться лишь на определенных дискретных энергетических уровнях (ступеньках) $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, в то время как в гравитационной потенциальной яме тело может находиться на любом уровне.

Когда энергия электрона в атоме становится равной нулю, электрон может уйти из атома (этот процесс называется ионизацией атома). Для ионизации атома, т. е. для извлечения электрона из «потенциальной ямы», электрону нужно сообщить энергию, равную полной отрицательной энергии электрона в атоме:

$$E_{ион} = -E = \frac{\varkappa}{2}\frac{Ze^2}{r} = \frac{me^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

Возбужденные атомы. В стабильных атомах электроны находятся в наинизших энергетических состояниях. Если атому сообщить энергию, то электрон, приобретая добавочную энергию, переходит на более удаленную от ядра орбиту. Такое состояние атома называется возбужденным. Через малый промежуток времени $\sim 10^{-8}$с* атом спонтанно возвращается в основное стабильное состояние, испуская при этом фотон согласно вышеприведенному условию частот.

Спектр атома водорода. Совокупность энергетических уровней атома называется его спектром. Если атом водорода переходит из k-го состояния, характеризуемого энергией E_k, в n-е состояние, характеризуемое энергией E_n, то при этом испускается фотон с энергией $E_k - E_n = \frac{\varkappa^2 me^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$ (для водорода $Z = 1$).

Так как энергия испускаемого кванта зависит от целых чисел n и k, спектр атома будет состоять из отдельных линий, каждая из которых отвечает определенной длине волны (или частоте) излучения.

В спектроскопии принято характеризовать излучение так называемыми волновыми числами $\tilde{\nu}$. Волновое число показывает, сколько

---

* Существуют атомы, которые способны оставаться длительное время в возбужденном состоянии. Они называются метастабильными.

длин волн укладывается на отрезке длиной 1 м, и измеряется в $м^{-1}$. Из этого определения вытекает, что

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}.$$

С помощью волновых чисел предыдущую формулу можно представить в виде

$$\tilde{\nu} = \frac{E_k - E_n}{hc} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Эта формула называется формулой Бальмера. Множитель перед скобкой называется постоянной Ридберга, обозначается R (или Ry) и равен $1{,}1 \cdot 10^7$ $м^{-1}$. Эта формула хорошо описывает все линии спектра водорода.

При переходах с внешних орбит на первую орбиту ($n = 1$, $k = 2, 3, 4, \ldots$) получается серия линий, называемая серией Лаймана (рис. 397). При переходах на вторую орбиту ($n = 2$, $k = 3, 4, 5, \ldots$) получается серия Бальмера, при переходах на третью орбиту ($n = 3$, $k = 4, 5, 6, \ldots$) — серия Пашена и т. д.

К сожалению, теория Бора не в состоянии описать ни основное состояние атома водорода, ни более сложные многоэлектронные атомы. Для этих целей создана квантовая (волновая) механика.

Квантовые числа. Принцип Паули. Введенное выше целое число n характеризует энергетическое состояние (уровень энергии) электрона в атоме и называется главным квантовым числом.

Каждому энергетическому состоянию электрона в атоме водорода, характеризуемому данным значением главного квантового числа n (кроме случая $n = 1$), отвечает несколько подсостояний, которые обладают одним и тем же значением n, но отличаются друг от друга значением орбитального момента количества движения, принадлежащего данному подсостоянию. Модуль этого орбитального момента равен $\hbar\sqrt{l(l-1)}$. Число l называется орбитальным квантовым числом и может принимать n значений от 0 до $n - 1$. Например, уровню с $n = 1$ отвечает одно подсостояние с $l = 0$, уровню с $n = 5$ принадлежит 5 подсостояний с $l = 0, 1, 2, 3, 4$ и т. д.

Если поместить атом во внешнее магнитное поле, то оказывается, что проекция орбитального момента на направление магнитного поля тоже квантуется. Если орбитальное квантовое число подсостояния равно l, то этому подсостоянию могут принадлежать $2l + 1$ различных проекций орбитального момента, отличающихся друг от друга на $\hbar$, а именно: $l\hbar$, $(l-1)\hbar$, $\ldots$, $2\hbar$, $\hbar$, 0, $-\hbar$, $-2\hbar$, $\ldots$, $-(l-1)\hbar$, $-l\hbar$. Числа l, $l-1$, $l-2$, $\ldots$, 0, $\ldots$, $-(l-2)$, $-(l-1)$, $-l$ называются магнитными квантовыми числами и обозначаются m_l. Например, подсостояние с орбитальным квантовым числом $l = 3$ в магнитном поле распадается на $2l + 1 = 7$ состояний со значениями магнитного квантового числа $m_l = 3; 2; 1; 0; -1; -2; -3$. В отсутствие магнитного поля все эти семь состояний сливаются воедино.

Наконец, укажем, что электрон обладает еще собственным моментом количества движения (как если бы он вращался вокруг собственной оси), который называется спином (от английского *spin* — веретено). Спин тоже квантуется. Он может быть направлен либо в ту же

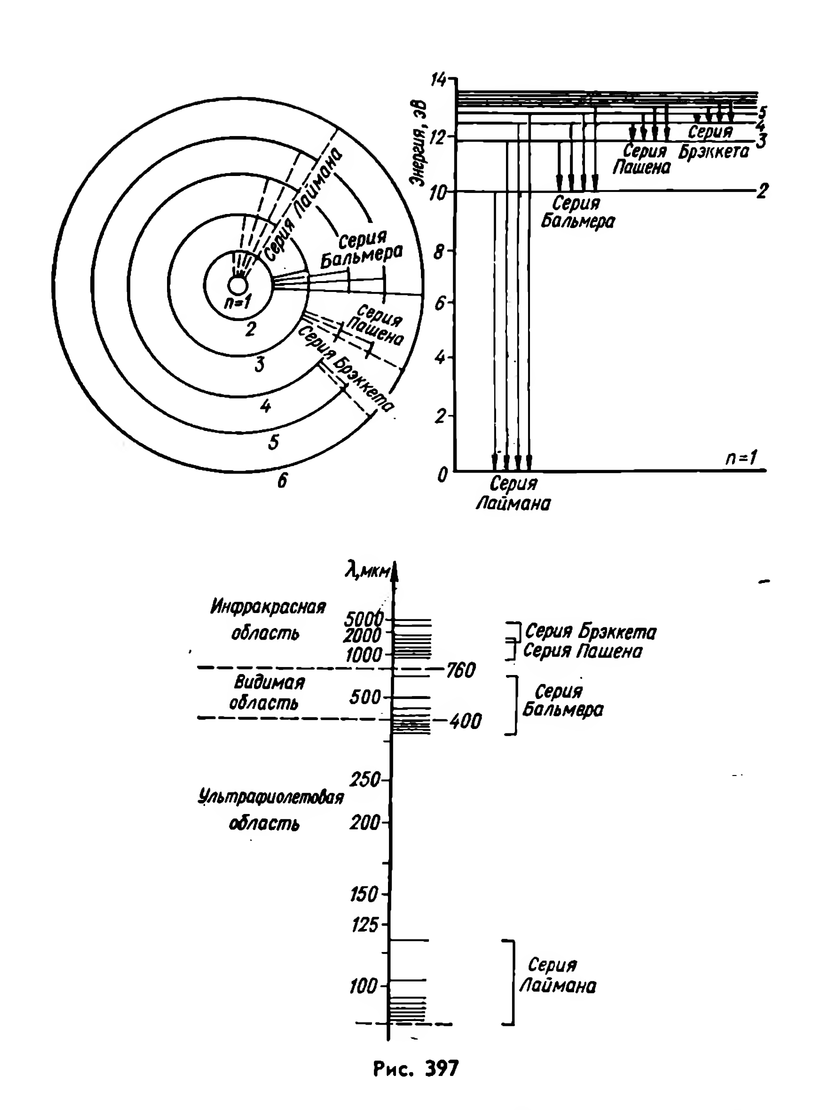


Рис. 397

сторону, куда и орбитальный момент, либо в противоположную сторону. В связи с этим спин может равняться либо $\frac{1}{2}\hbar$, либо $-\frac{1}{2}\hbar$. Числа $1/2$ и $-1/2$ являются значениями спинового квантового числа, которое обозначается буквой m_s и может принимать только эти два значения.

Таким образом, состояние каждого электрона определяется четырьмя квантовыми числами: n, l, m_l и m_s, причем:

$$n = 1, 2, 3 \ldots;$$
$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1;$$
$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l;$$
$$m_s = \pm 1/2.$$

Полное число возможных состояний в атоме водорода для электрона с главным квантовым числом n равно $2n^2$, как будет показано ниже. Все эти состояния обнаруживаются лишь при энергетическом возбуждении атома, при возмущении его внешними полями или в многоэлектронных атомах, где некоторые из этих состояний (стационарные состояния) частично заполняются электронами.

Вырождение. Тот факт, что одному энергетическому уровню принадлежит несколько квантовых состояний, называется вырождением, а сам уровень называется вырожденным. В рассмотренном случае одиночного атома каждый уровень с определенным значением главного квантового числа n является $2n^2$-кратно вырожденным. Меньше всех вырожден наинизший стационарный уровень энергии с $n = 1$, так как для него $l = n - 1 = 0$, $m_l = 0$ и на нем может находиться не более 2-х электронов (с взаимно противоположными спинами, как это имеет место в случае атома гелия).

Состояния с различными l часто обозначаются не цифровыми значениями l, а начальными буквами английских слов, характеризующих ту или иную спектральную серию линий. Так, например, состояние с $l = 0$ обозначается буквой s от английского слова *sharp* — резкий (характеризующего резкость линий спектральной серии). Группа из трех состояний с $l = 1$ обозначается буквой p — от английского слова *principal* (главная серия) и называется p-оболочкой. Группа из пяти состояний с $l = 2$ обозначается буквой d от слова *diffuse* (расплывчатые линии) и называется d-оболочкой и т. д.

При электронных переходах во внешних оболочках излучаются кванты инфракрасного, видимого и ультрафиолетового света; при переходах во внутренних оболочках, близких к ядру, излучаются кванты более высокой энергии (рентгеновские).

Волновая функция. Выше уже упоминалось, что микрочастицам присуща корпускулярно-волновая двойственность. В частности, экспериментально найдено, что электроны обнаруживают не только корпускулярные, но и волновые свойства (дифракция, интерференция, туннельный эффект). Рассматривая состояние движущегося электрона как волновой процесс, можно представить себе, что эта волна характеризуется некоторой величиной, аналогичной амплитуде обычного волнового процесса. Эта величина, часто обозначаемая буквой ψ, называется волновой функцией. Подобно амплитуде обычного волнового процесса она может принимать как положительные, так и отрицательные значения или равняться нулю. В отличие же от обычной амплитуды она может принимать также комплексные значения.

Волновая функция ψ вычисляется с помощью волнового уравнения, найденного Э. Шредингером и являющегося основным законом движения в квантовой механике, аналогично второму закону Ньютона в классической механике. Каждое возможное состояние электрона в атоме, определяемое квантовыми числами n, l, m_l, m_s, описывается волновой функцией $\psi_{nlm_lm_s}$.

Физическая интерпретация квадрата волновой функции. В отличие от классической механики и теории Бора, рассматривавших траекторию микрочастицы (например, электрона) как определенную линию, на которой можно точно определить координату и импульс электрона, квантовая механика может лишь указать, насколько вероятно местонахождение электрона в некотором малом объеме ΔV, расположенном в том или ином месте атома. Оказывается, что вероятность обнаружения электрона в объеме ΔV выражается произведением $\psi^2 \Delta V$. Разделив это выражение на ΔV, мы найдем, что величину ψ^2 можно рассматривать как плотность вероятности нахождения электрона в данной области пространства. (Если ψ — комплексная величина, то под ее квадратом понимают квадрат ее модуля $|\psi|^2$, который всегда является действительным положительным числом).

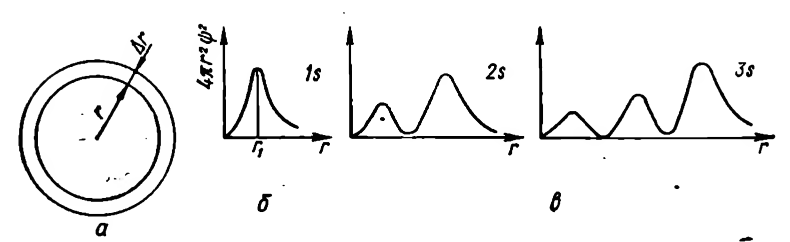


рис. 398

Если волновая функция ψ меняется со временем, то меняется и вероятность нахождения электрона в той или иной области пространства. Структура же самого электрона при этом совершенно не затрагивается и его можно во многих случаях рассматривать как точечный заряд.

Физический смысл боровских орбит и квантовых чисел. Вероятность обнаружения электрона меняется в зависимости от радиуса атома. Рассмотрим основное (невозбужденное) состояние атома водорода, отвечающее квантовым числам $n = 1$, $l = 0$, т. е. $1s$-состояние. Выделим в атоме тонкий сферический слой (рис. 398, *а*), заключенный между сферами с радиусами r и $r + \Delta r$, где Δr — малая величина. Объем этого слоя равен $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$. Вероятность обнаружения электрона в слое пропорциональна $4\pi r^2 \psi^2$, и ее зависимость от радиуса изображена кривой на рис. 398, *б*, имеющей максимум. Оказывается, что этот максимум расположен на расстоянии $r_1 = 529$ нм от центра, т. е. совпадает с радиусом первой боровской орбиты. Таким образом, в отличие от теории Бора, согласно которой электрон находится на расстоянии r_1 от ядра, квантовая механика утверждает, что на этом расстоянии существует лишь наибольшая вероятность нахождения электрона.

Такое пространственное распределение вероятности, плотность которого максимальна в районе боровской орбиты, мы будем в дальнейшем называть «электронным облаком».

Для $1s$-состояния электронное облако сферически симметрично. Сферически симметричными являются также и все прочие s-состояния, принадлежащие энергетическим уровням $n = 2,3$ . . . , т. е. $2s$, $3s$ $\cdots$ состояния, так как в этих состояниях орбитальный момент количества движения отсутствует и орбитальное квантовое число $l = 0$. Как вид-

но из рис. 398, *в*, вероятности обнаружения электрона в этих состояниях имеют соответственно 2,3 и больше максимумов.

Если орбитальное квантовое число $l \neq 0$, то электронные облака теряют сферическую симметрию и приобретают форму размытых эллипсов различных конфигураций.

Кроме того, как указывалось выше, каждому значению l принадлежит еще $2l + 1$ магнитных квантовых чисел m_l. От этих чисел зависят ориентации эллипсов в пространстве.

Таким образом, квантовые числа n, l и m_l характеризуют соответственно размеры, форму и пространственную ориентацию электронных облаков.

Наконец, спиновое квантовое число m_s, которое принимает всего два значения $\left(\pm \frac{1}{2}\right)$, характеризует параллельную или антипараллельную ориентацию спина электрона по отношению к орбитальному моменту.

Многоэлектронные атомы. Принцип Паули. Как сказано выше, каждое энергетическое состояние электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами n, l, m_l и m_s, т. е. волновой функцией $\psi_{nlm_lm_s}$. Оказывается, что в атоме не может быть двух электронов, у которых были бы одинаковые значения всех четырех квантовых чисел. Другими словами, одинаковые волновые функции не могут локализоваться в одной и той же области пространства. Это утверждение называется принципом Паули.

Пользуясь принципом Паули, можно подсчитать, какое максимальное число электронов может находиться на различных энергетических уровнях и подуровнях в атоме.

Очевидно, что число электронов в атоме, обладающих тремя одинаковыми квантовыми числами n, l и m_l, равно двум, так как четвертое квантовое число m_s может иметь только два значения $+1/2$ и $-1/2$.

Число электронов в атоме, обладающих двумя одинаковыми квантовыми числами n и l, но различными m_l, определяется так: при данном значении l квантовое число m_l может иметь $2l + 1$ различных значений. Учитывая еще два возможных значения числа m_s, найдем, что в атоме может одновременно быть $2(2l + 1)$ электронов с одинаковыми квантовыми числами n и l. Другими словами, s-электронов ($l = 0$) может быть только $2(2 \cdot 0 + 1) = 2$, p-электронов ($l = 1$) может быть $2(2 \cdot 1 + 1) = 6$, d-электронов ($l=3$) может быть 10 и т. д.

Число атомных электронов, имеющих одно и то же главное квантовое число n, а все остальные квантовые числа — различные, определяется, исходя из того, что при данном значении числа n число l может принимать n значений: 0, 1, 2, . . . , $n - 1$. Так как каждому значению l соответствует $2(2l + 1)$ электронов, полное число электронов с одинаковым n равно

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2[1 + 3 + 5 + \cdots + (n - 1)] = 2n^2.$$

Отсюда видно, что для главного квантового числа $n = 1$ максимальное число электронов в атоме равно 2, для $n = 2$ оно равно 8, для $n = 3$ равно 18 и т. д.

Совокупность электронов, обладающих одним и тем же главным квантовым числом n, называется слоем и обозначается прописными буквами (считая от ядра): слой с $n = 1$ называется K-слоем, слой с $n = 2$ называется L-слоем. Далее идут M, N, O-слои и т. д.

Совокупность электронов, имеющих одинаковые квантовые числа n и l, называется оболочкой.

В оболочке электроны распределяются по подоболочкам, каждая из которых соответствует определенному значению орбитального квантового числа l (s-, p-, ... подоболочки). Сказанное выше иллюстрируется таблицей (с. 493).

Принципы построения системы элементов Д. И. Менделеева. Наиболее устойчивое состояние электрона в атоме — это состояние с минимальной энергией. Поэтому электронную структуру невозбужденного атома водорода, содержащего 1 электрон ($Z = 1$), можно записать как $1s^1$, где число слева обозначает главное квантовое число, буква s соответствует $l = 0$ и показатель означает число электронов, связанных в данном состоянии.

В следующем по порядку атоме гелия ($Z = 2$) второй электрон также находится на уровне $1s$, но имеет противоположно направленный спин. Электронная структура гелия записывается как $1s^2$. Этими двумя элементами заполняется ближайший к ядру K-слой и тем самым завершается построение первого периода системы элементов.

У лития ($Z = 3$) первые 2 электрона заполняют K-слой, а третий электрон располагается на низшем уровне $2s$ L-слоя. Электронная структура лития записывается как $1s^2 2s^1$. Структура бериллия ($Z = 4$) записывается $1s^2 2s^2$, структура бора ($Z = 5$) $1s^2 2s^2 2p^1$ и т. д. до неона ($Z = 10$), структура которого имеет вид $1s^2 2s^2 2p^6$. Этим элементом завершается L-слой. M-слой начинается с натрия ($Z = 11$) с электронной структурой $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ и заканчивается аргоном ($Z = 18$), имеющим структуру $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$.

Дальнейшее заполнение электронных уровней несколько отклоняется от вышеописанной простой схемы по той причине, что в многоэлектронных атомах внешние электроны не только притягиваются к ядру, но и отталкиваются близкорасположенными к ядру электронами, т. е. последние экранируют внешние электроны от ядра. Это экранирование оказывается неодинаковым для электронов с различными значениями орбитального квантового числа l. Таким образом, порядок заполнения электронных состояний в многоэлектронных атомах зависит не только от n, но и от l и поэтому несколько нарушается. Нарушения эти тем больше, чем дальше расположены электроны от ядра, т. е. чем сильнее экранирующий эффект.

Соотношения неопределенности. Согласно квантовомеханическим представлениям одни и те же микрообъекты в одних случаях ведут себя, как частицы, а в других,— как волны. Некоторые свойства микрочастиц вообще не могут быть описаны ни корпускулярной, ни волновой картинами, а требуют введения совершенно новых понятий.

В частности, в классической физике всякое макроскопическое тело, движущееся вдоль оси X, в любой момент времени занимает определенное место (под «местом» понимается координата x центра тяжести) и обладает определенным импульсом $p_x = mv_x$.

В случае микрочастиц, обладающих волновыми свойствами, такое описание состояния частицы оказывается невозможным. Действительно, пусть координата x микрочастицы определена с точностью до Δx,

Распределение электронов в атоме по слоям и оболочкам

Слой	Оболочка	Квантовые числа				Максимальное число электронов	
		n	l	m_l	m_s	в оболочке	в слое
K	1s	1	0	0	±1/2	2	2
L	2s	2	0	0	±1/2	2	8
	2p		1	−1 0 +1	±1/2 ±1/2 ±1/2	6	
M	3s	3	0	0	±1/2	2	18
	3p		1	−1 0 +1	±1/2 ±1/2 ±1/2	6	
	3d		2	−2 −1 0 +1 +2	±1/2 ±1/2 ±1/2 ±1/2 ±1/2	10	
N	4s	4	0	0	±1/2	2	32
	4p		1	−1 0 +1	±1/2 ±1/2 ±1/2	6	
	4d		2	−2 −1 0 +1 −2	±1/2 ±1/2 ±1/2 ±1/2 ±1/2	10	
	4f		3	−3 −2 −1 0 +1 +2 +3	±1/2 ±1/2 ±1/2 ±1/2 ±1/2 ±1/2 ±1/2	14	

т. е. частица находится где-то между x и $x+\Delta x$. Тогда волновая функция, описывающая частицу, отлична от нуля лишь на протяжении отрезка, приблизительно равного Δx, и поэтому ограничена в пространстве. Можно показать, что всякая ограниченная волна не является гармонической, а представляет собой результат наложения (суперпозиции) бесконечно большого числа различных синусоидальных волн, которые благодаря интерференции взаимно погашаются во всем пространстве, кроме участка Δx, образуя на этом участке так называемый волновой пакет. Очевидно, что такой волновой пакет обладает не одной определенной длиной волны λ (и, следовательно, определенным импульсом p), а набором импульсов, заключающихся в пределах от p_x до $p_x + \Delta p_x$. Соотношения неопределенности, впервые найденные В. Гейзенбергом, утверждают, что

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h$$

и, соответственно, для движения вдоль осей Y и Z,

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geqslant h; \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geqslant h,$$

где h — постоянная Планка.

Из этих соотношений видно, что чем меньше Δx, т. е. чем точнее определяется координата частицы, тем больше Δp_x, т. е. тем более неопределенным становится импульс частицы. Справедливо и обратное утверждение: если бы удалось точно определить скорость частицы ($\Delta p_x \to 0$), то это означало бы, что координату частицы вообще определить нельзя, так как в этом случае $\Delta x \to \infty$ и местонахождение частицы можно было бы ожидать в любой точке пространства. Так как, в силу соотношения неопределенностей, Δx и Δp_x не могут одновременно равняться нулю, то отсюда следует, что у микрочастиц принципиально невозможно одновременно найти точные значения координаты и импульса.

Подобные соотношения неопределенности существуют и между другими парами физических величин, относящихся к микрочастицам. Например, если микрочастица в течение времени Δt находится в нестационарном состоянии (скажем, на возбужденном уровне), то энергия E этого состояния может быть определена лишь с точностью до ΔE, так как

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqslant h.$$

Отсюда, между прочим, вытекает, как следствие, 1-й постулат Бора: если частица находится в состоянии с точным значением энергии E ($\Delta E = 0$), то она будет находиться в этом состоянии неопределенно долгое время, так как в этом случае $\Delta t \to \infty$. Это и будет стационарное состояние.

Прохождение микрочастиц через потенциальный барьер (туннельный эффект). Если мы имеем две области пространства, в которых потенциальная энергия меньше, чем на поверхности, разделяющей эти области, мы говорим, что области разделены потенциальным барьером (рис. 399) высотой U.

Пусть микрочастица массой m, полная энергия которой равна E, движется слева направо к потенциальному барьеру, который для простоты берется прямоугольным. Согласно квантовой механике на гра-

нице двух областей, где имеет место скачок потенциала, дебройлевская волна микрочастицы частично отражается, а частично проникает внутрь второй области, наподобие световой волны на границе двух сред с различными показателями преломления. Обозначим отношение интенсивности отраженных частиц к интенсивности падающих через R, а отношение интенсивности проходящих частиц к интенсивности падающих — через D. Величина R называется коэффициентом отражения, а D — коэффициентом прозрачности (или просто прозрачностью) барьера. Очевидно, что $R + D = 1$.

С точки зрения классической механики при $E > U$ должно иметь место полное прохождение: $R = 0$, $D = 1$, т. е. барьер должен быть полностью прозрачен. Однако для микрочастиц это не так, и даже при $E > U$ имеет место частичное отражение так же, как это происходит со световыми волнами на границе двух сред.

При $E < U$ с точки зрения классической механики барьер непроницаем и должно происходить полное отражение: $D = 0$, $R = 1$. Согласно же квантовой механике и здесь некоторая доля частиц проходит сквозь барьер во вторую область, так, что $D \neq 0$. Это явление называется туннельным эффектом. Для прямоугольного потенциального барьера шириной l

$$D = D_0 e^{-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}},$$

рис. 399

где D_0 — множитель, близкий к 1.

Например, если $U - E \approx 1$ эВ, $m \approx 10^{-30}$ кг (масса электрона) и $l = 10^{-10}$ м, то $D \approx e^{-1,045} = 0,29$. Если же взять $l = 5 \cdot 10^{-10}$ м, то $D \approx e^{-5,2} = 0,005$; при $l = 10^{-9}$ м $D = e^{-10,45} = 4,54 \cdot 10^{-8}$.

Туннельный эффект обнаруживается при радиоактивном распаде, в явлениях холодной эмиссии электронов, в электронной структуре твердого тела и др. (см. ниже).

Микрочастица в одномерной прямоугольной потенциальной яме. Пусть микрочастица свободно движется в пределах потенциальной ямы шириной l, ограниченной полностью отражающими бесконечно высокими потенциальными стенками. В промежутке $0 < x < l$ потенциал $U = 0$, а в точках $x = 0$ и $x = l$ $U = \infty$ (рис. 400). В такой яме падающая и отраженная дебройлевские волны, связанные с микрочастицей, образуют стоячую волну. Длина λ этой волны такова, что на ширине ямы l укладывается всегда целое число n полуволн, так что $\lambda_n = 2l/n$, где $n = 1, 2, 3 \ldots$. При этом в точках $x = 0$ и $x = l$ всегда расположены узлы.

Энергия микрочастицы, движущейся в такой яме,

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_n^2} = \frac{n^2h^2}{8ml^2}.$$

Очевидно, что энергия принимает только некоторые разрешенные значения, пропорциональные квадрату целого числа n, т. е. энергия частицы квантована. Спектр энергий частицы в прямоугольной яме с бесконечно высокими стенками также представлен на рис. 400.

Вероятность найти частицу в том или ином месте потенциальной ямы определяется выражением $\sin^2 \frac{\pi n x}{l}$ (полученным путем решения уравнения Шредингера), которое графически представлено на том же рисунке для $n = 1, 2, 3, 4$. Как видно из рисунка, в наинизшем энергетическом состоянии ($n = 1$), частицу можно с наибольшей ве-

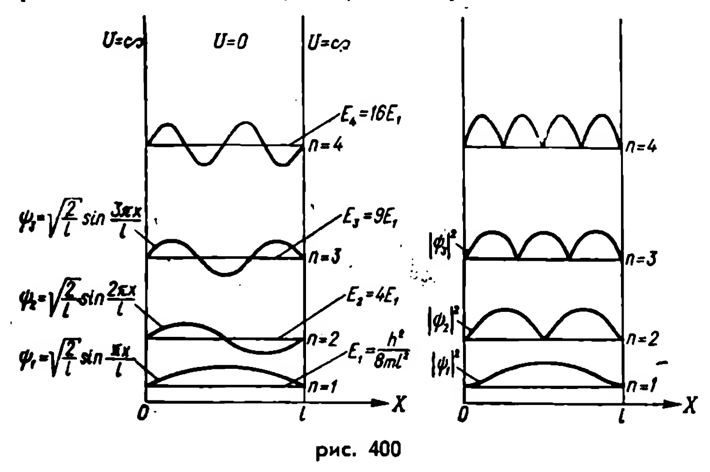


рис. 400

роятностью найти в середине ямы (в то время как с классической точки зрения все положения частицы равновероятны). При увеличении энергии частицы (т. е. при увеличении n) количество дискретных максимумов вероятности возрастает, и при очень больших n максимумы практически сливаются и частицу можно с равной вероятностью найти в любом месте ямы, что соответствует макроскопической картине.

Модель свободных электронов в металлах. Согласно этой модели в металле равномерно распределен газ, состоящий из свободных электронов, способных перемещаться по всему объему и обладающих одинаковой потенциальной энергией — U_0. Выходу электронов из металла препятствует потенциальный скачок на его поверхности, называемый работой выхода w.

Эта простейшая модель позволяет объяснить множество электрических, магнитных и тепловых свойств твердых тел.

Элементарные ячейки. Распределение Ферми — Дирака. Согласно квантовой механике импульсы электронов должны отличаться друг от друга по крайней мере на Δp. Эту величину можно найти из соотношений неопределенности, полагая, что кристалл имеет форму куба с ребром L и что неопределенность положения электрона вдоль какой-либо оси равна размеру L кристалла в направлении той же оси:

$$\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = \frac{h}{L}.$$

Введем систему координат, где в качестве осей взяты составляю-

щие радиус-вектора импульса электрона p_x, p_y, p_z (так называемое пространство импульсов). Минимальная неопределенность импульса электрона равна объему элементарной ячейки в трехмерном пространстве импульсов:

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{h^3}{L^3} = \frac{h^3}{V}.$$

Каждой ячейке соответствует некоторое квантовое состояние, т. е. конец каждого радиус-вектора импульса находится внутри элементарной ячейки, и она может вместить не более двух электронов с противоположными спинами. Весь объем V разбивается на такие элементарные ячейки и их число определяет все возможные состояния электронов. Вероятность заполнения этих ячеек электронами называется функцией распределения f_F Ферми — Дирака. Для заполненных ячеек $f_F = 1$, для пустых $f_F = 0$. Квантовая статистика дает для f_F выражение

$$f_F = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1},$$

графически изображенное на рис. 401, *а*. Здесь E — энергия, соответствующая заполняемой ячейке, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, E_F — так называемая энергия Ферми, равная энергии наивысшего заполненного состояния при абсолютном нуле (т. е. максимальная энергия свободных электронов при $T = 0$). Если число свободных электронов в металле — N, то поскольку на каждом уровне может находиться по 2 электрона, при $T = 0$ заполнено всего $N/2$ уровней, верхний из которых является уровнем Ферми, а все вышележащие состояния свободны. Геометрический образ поверхности уровня Ферми для свободных электронов в импульсном пространстве — это сфера радиуса p. На ее поверхности лежат концы радиус-векторов импульсов двух электронов максимальной энергии, а импульсы всех прочих электронов заключены внутри сферы. Можно показать, что

$$p_F = h\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3}; \quad E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}$$

(n — концентрация свободных электронов).

Что касается распределения по энергиям, то число свободных электронов в единице объема, энергия которых лежит в пределах между E и $E + \Delta E$, равно

$$\Delta N = \frac{4\pi}{h^3} \frac{\sqrt{2mE}\,\Delta E}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

и изображено на рис. 401, *б*.

Вырождение электронного газа. Для электронного газа $n \approx 10^{29}\text{м}^{-3}$, $m \approx 10^{-30}$ кг. При этом $E_F \approx 10$ эВ. Молекулы обычного газа имели бы такую энергию при $T \approx 10^5$ К, т. е. при температуре, когда существование твердого тела невозможно. Газ, свойства которого

резко отличаются от свойств обычного газа, называется вырожденным.

Распределение Максвелла — Больцмана. Температура вырождения. В случае обычного газа, состоящего из молекул с массой $m \gg 10^{-27}$ кг с концентрацией $n \ll 10^{27}$ м$^{-3}$ при температурах, превышающих некоторую температуру вырождения T_k, выполняется условие

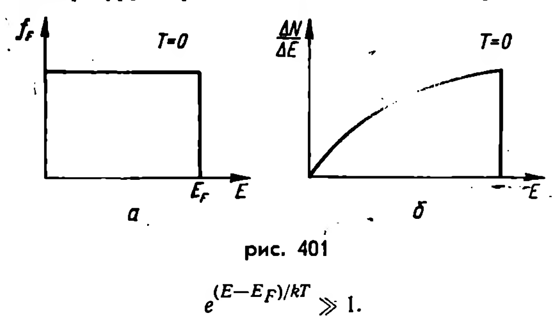


рис. 401

$$e^{(E-E_F)/kT} \gg 1.$$

При этом вырождение снимается и функция f принимает форму

$$f_M = e^{\frac{E_F-E}{kT}} = Ae^{-\frac{E}{kT}}$$

(рис. 402, *а*), называемую классическим распределением Максвелла — Больцмана. Распределение молекул по энергиям соответственно тоже меняется (рис. 402, *б*). Эти классические распределения справедливы для обычных молекулярных идеальных газов при температурах выше температуры вырождения T_k. Для большинства обычных газов $T_k \approx h^2 n^{2/3}/km$ и настолько низка, что квантовые свойства не успевают проявиться, поскольку газ еще до достижения этой температуры превращается в жидкость.

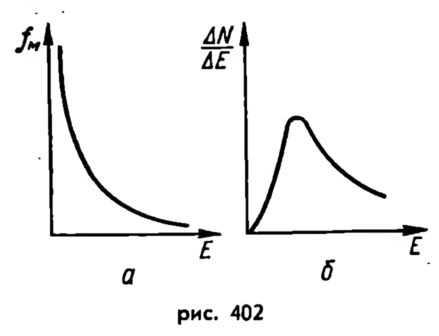


рис. 402

В полупроводниках концентрация электронного газа составляет $10^{18} \div 10^{24}$ м$^{-3}$. Поэтому он в большинстве случаев является невырожденным и подчиняется классической статистике Максвелла—Больцмана.

Влияние температуры на распределение электронов. Когда температура металла становится выше 0 K, электроны могут подвергнуться тепловому возбуждению и перейти на свободные уровни выше уровня Ферми. Если выполняется условие $kT \ll E_F$, то возбуждаются лишь электроны узкой полосы шириной порядка kT, непосредственно прилегающей к уровню Ферми, а электроны более глубоких

уровней остаются незатронутыми. В этой полосе на месте ушедших электронов появляются свободные состояния — так называемые дырки,— которые ведут себя, как носители положительных зарядов (см. ниже).

Из рис. 403, *а* видно, что при тепловом возбуждении электроны покидают полосу с энергией $E < E_F$ и переходят на полосу выше

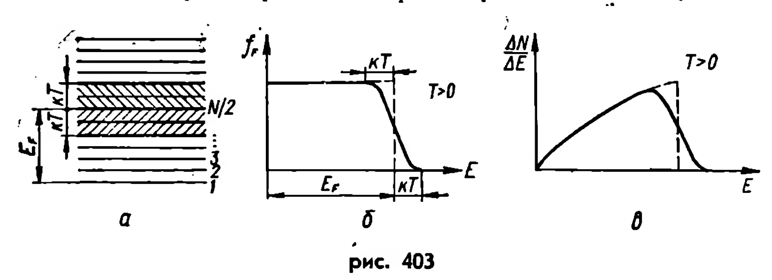


рис. 403

уровня Ферми E_F. Обе полосы одинаковой ширины, так как выражают одно и то же число электронов. Это число приближенно равно $kTN/2E_F = \Delta N$. При комнатной температуре $kT \approx 0{,}025$ эВ, $E_F = 3 \div 10$ эВ, так что $\Delta N/N \approx 0{,}01$. Иначе говоря, тепловому возбуждению подвергается лишь незначительная часть электронов вблизи уровня Ферми, так что состояние электронного газа, в том числе и положение уровня Ферми, в целом почти не зависит от температуры.

Функция распределения Ферми — Дирака при $T > 0$ показана на рис. 403, *б*. На рис. 403, *в* представлено изменение распределения электронов по энергиям при $T > 0$.

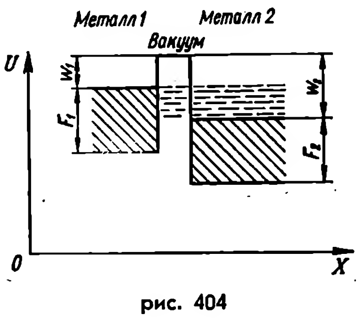


рис. 404

Контактная разность потенциалов. Если привести в соприкосновение два металла различной природы (например, медь и цинк), то между ними установится разность потенциалов, называемая контактной разностью. Для этого необходимо, чтобы металлы обладали потенциальными ямами различной глубины (рис. 404) и различными работами выхода w_1 и w_2. Для определенности допустим, что $w_1 < w_2$. Тогда уровень Ферми в металле 1 окажется выше относительно нулевого уровня $0X$, чем уровень Ферми в металле 2. Вследствие этого будет происходить туннельный переход электронов из металла 1 на свободные уровни металла 2. При этом металл 2 будет заряжаться отрицательно, а металл 1 — положительно. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока верхние заполненные уровни (т. е. уровни Ферми) обоих металлов не сравняются. В результате между обоими металлами установится внешняя разность потенциалов, равная $(w_2 - w_1)/e$, где e — заряд электрона.

Зонная теория твердого тела. В твердом теле расстояния между атомами настолько малы, что каждый из них находится под влиянием электромагнитного поля соседних атомов. При этом уровни энергии каждого атома несколько смещаются относительно своего первоначального положения и каждый из них расщепляется на $2l+1$ подуровней. На каждом таком подуровне может находиться по 2 электрона с противоположными спинами.

Кроме этого, если в данной системе (кристалле) содержится N одинаковых атомов, то каждый из уровней атома повторяется N раз. Однако, поскольку у близкорасположенных атомов уровни смещаются, кристалл будет содержать N близко прилегающих друг к другу подуровней, каждый из которых $(2l+1)$-кратно вырожден. Таким образом, каждый из уровней изолированного атома дает в кристалле совокупность $(2l+1)N$ подуровней, расстояние между которыми $\approx 10^{-22}$ эВ.

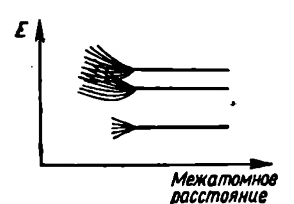


рис. 405

Наконец, благодаря туннельному эффекту, позволяющему внешним электронам близкорасположенных атомов мигрировать от атома к атому, уменьшается степень локализации (т. е. время пребывания Δt) электронов на определенных атомах. Вследствие соотношения неопределенности ширина уровней ΔE возрастает, они перекрываются между собой, и электроны как бы обобществляются, образуя электронный газ.

По всем этим причинам уровни энергии изолированных атомов, при объединении последних в кристаллы, превращаются в сплошные полосы, или зоны, шириной порядка электронвольт (рис. 405).

Все вышесказанное относится преимущественно к валентным электронам. Состояния электронов внутренних оболочек атома почти не изменяются.

Энергетические зоны могут быть отделены друг от друга зонами запрещенных энергий, ширина которых определяет характер данного кристалла (см. ниже). Так как каждая зона содержит ограниченное число уровней, то в ней может разместиться лишь ограниченное число электронов. Отсутствие одного из электронов в заполненной зоне, т. е. «дырка», воспринимается как наличие единичного положительного заряда, способного передвигаться под действием внешнего электрического поля. Во многих телах проводимость определяется именно дырками.

По характеру заполнения зон электронами и взаимного расположения зон вещества можно разделить на следующие группы.

Пусть зона целиком заполнена электронами. Над ней расположена запрещенная зона шириной $\Delta E_0 \gg 1-2$ эВ, а еще выше — свободная зона проводимости (рис. 406, *а*). Под действием внешнего электрического поля электроны не смогут приобретать добавочную энергию (так как все уровни заняты), и поэтому электрического поля (т. е. направленного движения электронов) не будет, несмотря на наличие свободных электронов, способных двигаться по всему телу. Такие вещества называются изоляторами.

Если ширина запрещенной зоны не превышает $\Delta E_0 \approx 1-2$ эВ (рис. 406, *б*), то при температуре $T > 0\,K$ некоторое число электро-

нов, расположенных у верхнего края заполненной зоны, может приобрести энергию, достаточную для преодоления запрещенной зоны и перехода в свободную зону проводимости. Тогда последняя окажется частично заполненной зоной, где существует электронная проводимость, а в заполненной (валентной) зоне появятся дырки, создающие дырочную проводимость. С ростом температуры число электронов в верхней зоне и дырок в нижней зоне быстро возрастает, проводимость тела сильно увеличивается, и оно приближается в этом отношении к проводникам. Такие вещества называются полупроводниками.

В некоторых веществах заполненная и свободная зоны либо прилегают вплотную друг к другу (рис. 406, *в*), либо даже перекрываются. При этом получается множество свободных уровней, благодаря чему электроны могут приобретать добавочную энергию. Под

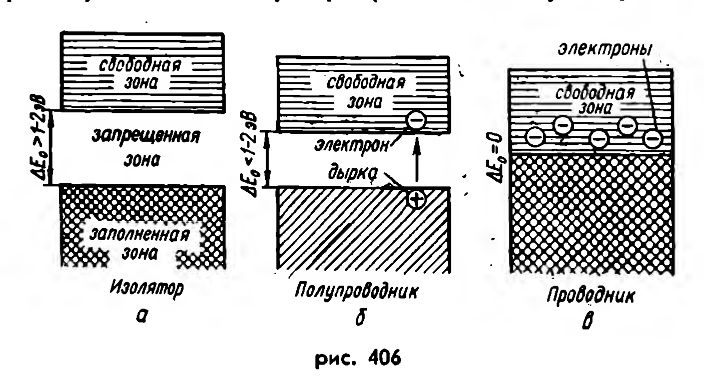


рис. 406

действием внешнего электрического поля электроны ускоряются и создается преимущественное движение электронов в одну сторону, т. е. возникает электрический ток. Такие вещества называются проводниками.

Резонансное взаимодействие атомов с электромагнитным излучением. Лазер. Пусть мы имеем вещество, часть атомов которого находится в возбужденном состоянии $E_в$ в результате поглощения падающего пучка электромагнитного излучения. Изолированные возбужденные атомы спонтанно переходят на более низкие энергетические уровни независимо друг от друга, так что испускаемый ими свет некогерентен. Однако если на возбужденный атом упадет фотон с частотой $\nu = (E_в - E_0)/h$ (резонансная частота), то время пребывания атома в возбужденном состоянии резко уменьшится и он будет излучать фотон с теми же направлением, частотой и фазой, что и первичный (индуцирующий) фотон. Таким образом, посредством индуцированного когерентного испускания квантов другими возбужденными атомами первичный или спонтанно испущенный квант может быть многократно размножен.

В условиях равновесия число n невозбужденных атомов или молекул среды больше числа n^* возбужденных молекул. Такая ситуация называется нормальной заселенностью энергетических уровней (рис. 407, *а*). Если каким-либо способом добиться того, чтобы n^* было

больше n (это состояние называется инверсной заселенностью, рис. 407, *б*), то за счет индуцированного излучения в световой пучок добавляется больше фотонов, чем он теряет на возбуждение атомов, и излучение будет не ослабляться, а усиливаться.

Среда с инверсной заселенностью энергетических уровней, обеспечивающая усиление проходящего через него излучения, называется активной средой.

Если активную среду поместить между двумя параллельными зеркалами (одно из которых делается полупрозрачным для выпуска излучения), то образуется система, называемая активным оптическим резонатором. Световая волна, распространяющаяся в активной среде перпендикулярно зеркалам, многократно отражается от них, пройденный ею в активной среде путь значительно возрастает и соответственно возрастает усиление.

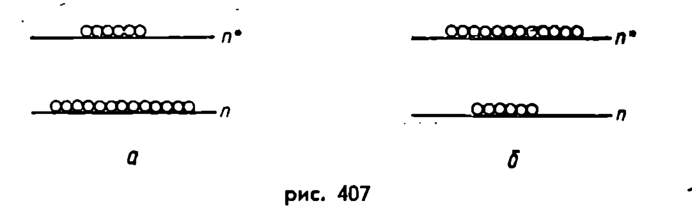


рис. 407

Пользуясь аналогией с генераторами радиодиапазона, состоящими из резонансного колебательного контура, электронной усилительной лампы и источника питания, можно сказать, что в данном случае мы имеем резонатор, в котором возбуждаются незатухающие электромагнитные колебания, активную среду, обеспечивающую усиление излучения и источник энергии, создающий инверсную заселенность в активной среде. Условием возникновения незатухающих колебаний является (как и в случае генератора радиоволн) положительная обратная связь между колебательной системой и активной средой. Для осуществления такой обратной связи необходимо, чтобы колебания системы и колебания, приходящие по каналу обратной связи, совпадали по фазе, о чем упоминалось выше. Описанная система представляет собой, таким образом, генератор когерентного излучения, называемый оптическим квантовым генератором (ОКГ) или лазером.

Инверсная заселенность достигается путем использования вспомогательных источников излучения, газового разряда и др. Генерация возникает, когда инверсная заселенность достигает некоторого порогового значения, определяемого потерями энергии в резонаторе, и продолжается до тех пор, пока бóльшая часть энергии возбуждения атомов не превратится в энергию излучения.

Резонансное взаимодействие ядер с электромагнитным излучением Эффект Мёссбауэра. При поглощении резонансного гамма-кванта атомным ядром, находящимся в невозбужденном состоянии E_0, ядро переходит в возбужденное состояние с энергией $E_в$. В отличие от резонансного поглощения квантов атомом, энергия возбужденного состояния ядра гораздо больше, чем энергия возбуждения атома. Поэтому гамма-квант, испускаемый ядром при его переходе в невозбужденное состояние, имеет гораздо бóльшую энергию, чем квант

света, испускаемый атомом. Согласно закону сохранения импульса процесс испускания кванта сопровождается отдачей. Если в случае испускания светового кванта малой энергии отдачей можно пренебречь, то при испускании высокоэнергетического гамма-кванта заметная часть энергии уходит на отдачу, т. е. переходит в кинетическую энергию ядра (или атома). Вследствие этого энергия испущенного кванта будет меньше, чем $E_в - E_0$, на величину энергии отдачи E_r.

То же самое получается и при поглощении кванта, т. е. часть его энергии, равная E_r, обязательно должна перейти в кинетическую энергию ядра или атома. Поэтому для поглощения кванта он должен иметь энергию $E_в - E_0 + E_r$, т. е. условие резонанса нарушается. Это нарушение, однако, не очень резкое, так как энергия возбужденного уровня, согласно соотношению неопределенности, имеет некоторый разброс ΔE (называемый естественной шириной возбужденного уровня), так что даже при $E_r \neq 0$ возможно некоторое резонансное поглощение (или испускание) гамма-квантов. Кроме того, вследствие теплового движения атомов, одни из них движутся в ту же сторону, что и испускаемый квант, а другие — в противоположную. В первом случае энергия кванта будет больше, а во втором — меньше энергии кванта, испущенного неподвижным атомом, на величину ΔE_d. Эта величина называется доплеровским уширением линии и еще больше размывает ширину резонанса.

В отличие от вышесказанного, если поглощающий атом жестко связан с кристаллом как одно целое, то отдачу воспринимает вся масса кристалла. Тогда энергия отдачи E_r практически равна нулю и резонансное поглощение (или излучение) очень остро возрастает при резонансной частоте $(E_в - E_0)/h$. Это и есть эффект Мёссбауэра. Характерным для него является необычайно узкий пик, т. е. высокая монохроматичность испускаемых (или поглощаемых) гамма-квантов (относительный разброс энергии $\Delta E/E \approx 10^{-12}$). Это свойство лежит в основе многочисленных применений эффекта Мёссбауэра в физике и технике.

16.1. Найти массу фотона: 1) красных лучей видимого света ($\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м); 2) рентгеновских лучей ($\lambda = 0{,}25 \cdot 10^{-10}$ м); 3) гамма-лучей ($\lambda = 1{,}24 \cdot 10^{-12}$ м).

1) $m = \dfrac{h\nu}{c^2} = \dfrac{h}{\lambda c} = 3{,}2 \cdot 10^{-36}$ кг.

2) $m = \dfrac{h}{\lambda c} = 8{,}8 \cdot 10^{-32}$ кг.

3) $m = \dfrac{h}{\lambda c} = 1{,}8 \cdot 10^{-30}$ кг.

16.2. Определить энергию, массу и импульс фотона с $\lambda = 0{,}016 \cdot 10^{-10}$ м.

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1{,}24 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = 1{,}38 \cdot 10^{-30} \text{ кг.}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = 4{,}1 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

16.3. Мощность ртутной горелки — 125 Вт. Найти, сколько квантов с длиной волны $\lambda = 6123 \cdot 10^{-10}$ м испускается ежесекундно, если интенсивность этой линии составляет 2% интенсивности дуги. К. п. д. горелки — 80%.

Энергия излучения данной волны составляет $125 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}02 = 2$ Дж. Энергия кванта $E = hc/\lambda$. Число квантов в секунду равно

$$\frac{2}{E} = \frac{2\lambda}{hc} = 6{,}2 \cdot 10^{18}.$$

16.4. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 5200 \cdot 10^{-10}$ м?

Из формулы $\frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda}$ имеем

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{\lambda m}} = 9{,}2 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

16.5. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 5200 \times 10^{-10}$ м?

$$mv = \frac{h}{\lambda}; \quad v = \frac{h}{\lambda m} = 1400 \text{ м/с}.$$

16.6. Какую энергию должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе покоя электрона?

$$E = m_l c^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0{,}51 \text{ МэВ}.$$

16.7. Излучение состоит из фотонов с энергией $6{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж. Найти частоту колебаний и длину волны в вакууме для этого излучения.

Частота $\nu = \frac{E}{h} = 9{,}7 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$.

Длина волны $\lambda = \frac{c}{\nu} = 31 \cdot 10^{-8}$ м.

16.8. Скорость распространения фиолетовых лучей с частотой $\nu = 7{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц в воде равна $v = 2{,}23 \cdot 10^8$ м/с. Насколько изменятся частота и длина волны этих лучей при переходе из воды в вакуум?

Частота электромагнитных колебаний при переходе из среды в среду не меняется. Длина волны меняется по формуле

$$\lambda_{вак} = \frac{c}{\nu}; \quad \lambda_{ср} = \frac{v}{\nu},$$

откуда

$$\lambda_{вак} - \lambda_{ср} = \frac{c - v}{\nu} = 1{,}03 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

16.9. Насколько энергия квантов фиолетового излучения ($\nu_ф = 7{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц) больше энергии квантов красного света ($\nu_{кр} = 4 \cdot 10^{14}$ Гц)?

$$E_ф - E_{кр} = h(\nu_ф - \nu_{кр}) = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{14} = 23 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

16.10. Сколько фотонов зеленого излучения с длиной волны $\lambda = 520$ нм в вакууме будут иметь энергию 10^{-3} Дж?

Энергия одного такого кванта равна hc/λ. Число квантов равно

$$\frac{10^{-3}\lambda}{hc} = 26 \cdot 10^{14}.$$

16.11. В атоме водорода электрон перешел на уровень с главным квантовым числом n, причем радиус орбиты изменился в q раз. Найти частоту испущенного кванта.

По формуле Бальмера $\nu = Rc\,(1/n^2 - 1/k^2)$. Так как $n^2/k^2 = r_n/r_k = r_n/qr_n$, то

$$\nu = \frac{Rc}{n^2}\left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right) = \frac{Rc}{n^2}\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

16.12. Определить энергию, массу и импульс фотона, длина волны которого $\lambda = 500$ нм.

Энергия $E = \frac{hc}{\lambda} = 2{,}48$ эВ.

Масса $m_ф = \frac{E}{c^2} = \frac{h}{c\lambda} = 4{,}4 \cdot 10^{-36}$ кг.

Импульс $p_ф = \frac{h}{\lambda} = 1{,}3 \cdot 10^{-27}$ Дж · с/м.

16.13. Каким импульсом обладает электрон, движущийся со скоростью $v = 0{,}8c$?

Импульс электрона

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = 3{,}64 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

16.14. Каким импульсом обладает фотон с частотой $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц? Какова масса этого фотона?

Импульс фотона

$$p = \frac{h\nu}{c} = 1{,}1 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Масса фотона

$$m_ф = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = 3{,}7 \cdot 10^{-36} \text{ кг}.$$

16.15. Найти импульс и массу фотона с длиной волны $\lambda = 600$ нм.

Частота фотона

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14} \text{с}^{-1}.$$

Импульс и масса этого фотона такие же, как и в предыдущей задаче.

16.16. Сравнить отношение длин волн де Бройля для электрона и шарика с массой $m_ш = 1$ г, имеющих одинаковые скорости.

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v}; \quad \lambda_ш = \frac{h}{m_ш v}; \quad \frac{\lambda_ш}{\lambda_e} = \frac{m_e}{m_ш} = 9{,}1 \cdot 10^{-28}.$$

16.17. Найти длину волны де Бройля: 1) для электронов, прошедших разность потенциалов 1; 100; 1000 В; 2) для электрона, летящего со скоростью 10^8 см/с; 3) для шарика с массой 1 г, движущегося со скоростью 1 см/с.

1) Из формул $\lambda = h/mv$ и $mv^2/2 = eU$ получаем $\lambda = h/\sqrt{2meU}$.

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2emU}} = 12{,}25 \cdot 10^{-10} \text{ м};$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{100}} = 1{,}225 \cdot 10^{-10} \text{ м};$$

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1000}} = 0{,}338 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

2) $\lambda = h/mv$; релятивистскую поправку (см. следующую задачу) можно не учитывать, так как $\beta = v/c \approx 0{,}3 \cdot 10^{-2}$; при этом

$$\lambda \approx 7{,}3 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

3) $\lambda_{ш} = 6{,}63 \cdot 10^{-29}$ м.

16.18. Найти зависимость между длиной волны де Бройля релятивистской частицы и ускоряющим потенциалом U. Масса частицы—m, заряд — e.

Так как частица релятивистская, то ее масса возрастает в отношении

$$\frac{m}{m_0} = \frac{E_0 + E_к}{E_0} = \frac{m_0c^2 + eU}{m_0c^2}.$$

Скорость релятивистской частицы с массой покоя m_0 и зарядом e, прошедшей ускоряющую разность потенциалов U, равна (см. задачу 15.6)

$$v = \frac{c}{E_0 + E_к}\sqrt{E_к(2E_0 + E_к)}.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{hc}{\sqrt{eU(2m_0c^2 + eU)}} \approx \frac{hc}{eU} \quad (\text{при } eU \gg m_0c^2).$$

16.19. Найти длину волны де Бройля для электрона, кинетическая энергия которого равна 1 МэВ.

Такую энергию электрон приобрел бы, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ МВ. Согласно задаче 16.18 длина волны де Бройля для электрона, прошедшего такую разность потенциалов, что его энергия превышает его массу покоя (0,51 МэВ), вычисляется по релятивистской формуле

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{eU(2m_0c^2 + eU)}}.$$

Выразим h в единицах МэВ $\cdot$ c. Очевидно, что

$$h = 4{,}14 \cdot 10^{-21} \text{ МэВ} \cdot c.$$

Выразим и прочие энергии через МэВ. Тогда

$$\lambda = 8{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ м}.$$

16.20. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 200$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 0{,}0202 \cdot 10^{-10}$ м и заряд e, численно равный заряду электрона. Найти ее массу.

Из формулы $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ имеем

$$m = \frac{h^2}{2E\lambda^2} = \frac{h^2}{2eU\lambda^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг (протон)}.$$

16.21. α-Частица движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $r = 0{,}83$ см. Напряженность поля $H = 0{,}025$ Т. Найти длину волны де Бройля для этой α-частицы.

По формуле Лоренца $mv^2/r = zevH$. Отсюда

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{zeHr} = 10^{-11} \text{ м}.$$

16.22. Найти радиусы первой и второй боровских орбит электрона в атоме водорода ($z = 1$) и скорости электрона на них.

1) Используем формулу (при $n = 1$)

$$r_1 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2} = 5{,}29 \cdot 10^{-11} \text{ м};$$

$$r_2 = n^2 r_1 = 4r_1 = 21{,}16 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

2) Из формулы $mvr = n\hbar$ находим

$$v_1 = \frac{\hbar}{mr_1} = 2{,}13 \cdot 10^6 \text{ м/с};$$

$$v_2 = \frac{n\hbar}{mr_2} = \frac{2\hbar}{4mr_1} = \frac{v_1}{2} = 1{,}06 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

16.23. Найти энергию ионизации атома водорода (т. е. минимальную энергию, необходимую, чтобы оторвать электрон от атома).

У водорода в нормальном состоянии $Z = 1$, $n = 1$, и полная энергия электрона на первой орбите

$$E_1 = -\frac{me^4}{8\pi\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{\varkappa e^2}{2r_1} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}.$$

Так как на большом удалении от ядра (на бесконечности) энергия электрона равна нулю, то для того чтобы «поднять» электрон из потенциальной ямы (в которой он находится на «глубине» E_1) до нулевого уровня, необходимо затратить энергию ионизации $|E_{\text{ион}}| = |-E_1|$, т. е.

$$E_{\text{ион}} = 2{,}18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = \frac{2{,}18 \cdot 10^{-18}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 13{,}6 \text{ эВ}.$$

(При вычислении $E_{\text{ион}}$ значение r_1 взято из задачи 16.22).

16.24. Найти длину волны де Бройля для электрона, движущегося по первой боровской орбите в атоме водорода.

Согласно данным задачи 16.22

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 3{,}4 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

16.25. Сколько квантов различных энергий могут испустить атомы водорода, если их электроны находятся на третьей орбите?

При переходе с третьей орбиты на вторую, со второй на первую и с третьей на первую могут быть испущены кванты трех различных энергий.

16.26. Как изменилась кинетическая энергия электрона в атоме при излучении фотона с длиной волны $\lambda = 4860 \cdot 10^{-10}$ м?

$$\Delta E_{\text{к}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 2{,}56 \text{ эВ}.$$

16.27. Атомарный водород при облучении его моноэнергетическим пучком электронов испускает свет с длиной волны 0,1221 мкм. Найти энергию электронов и определить, в которое из возбужденных состояний переходит атом при ударе электрона.

По условию частот $E_n - E_1 = E_к$, где $E_к$ — кинетическая энергия пучка, переводящая атом водорода в n-е состояние. Используя, кроме того, соотношение $\lambda = \frac{c}{\nu}$, находим, что энергия налетающего электрона

$$E_{к.\ мин} = \frac{hc}{\lambda} = 10{,}2\ эВ.$$

Чтобы ответить на вопрос, в котором из возбужденных состояний находился атом, надо вычислить квантовое число n. Так как энергия (отрицательная) основного состояния (см. задачу 16.23) $E_1 = -E_{ион} = -13{,}6$ эВ, то энергия n-го возбужденного состояния

$$E_n = E_1 + E_{к.\ мин} = -3{,}4\ эВ.$$

Так как

$$E_1 = -\frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 h^2}; \quad E_n = -\frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 h^2 n^2},$$

то $\frac{E_1}{E_n} = n^2 = 4$; $n = 2$ (первое возбужденное состояние).

16.28. Найти энергию электрона на третьей и на n-й орбитах атома водорода.

Так как энергии соседних орбит относятся как квадраты целых чисел, то, используя результаты задачи 16.27, находим

$$E_3 = \frac{E_1}{3^2} = \frac{-13{,}6}{9} = -1{,}51\ эВ.$$

В общем виде можно записать

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{13{,}6}{n^2}\ эВ.$$

За пределами атома, где $n \to \infty$, $E_n \to 0$, как это и должно быть.

16.29. Квант света выбивает фотоэлектрон из атома водорода. Найти скорость электрона вдали от ядра.

Энергия налетающего кванта частично расходуется на вырывание электрона из атома (ионизацию) и частично — на кинетическую энергию освободившегося электрона:

$$h\nu = E_{ион} + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2(h\nu - E_{ион})}{m}}.$$

16.30. Частота головной линии серии Лаймана водорода в спектре галактики равна ν. С какой скоростью удаляется эта галактика от Земли?

Частота головной линии серии Лаймана в случае неподвижного источника ($n = 1$, $k = 2$) равна

$$\nu_0 = c\tilde{\nu} = cR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3cR}{4}.$$

В результате того, что источник излучения удаляется от Земли со скоростью v, возникает эффект Доплера. Изменение наблюдаемой частоты света определяется формулой

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}},$$

откуда

$$v = c\,\frac{9R^2c^2 - 16\nu^2}{9R^2c^2 + 16\nu^2}.$$

17. Элементы ядерной физики

Ядерная физика изучает строение атомных ядер, ядерные превращения и ядерные реакции.

Ядра состоят из протонов, несущих единичный положительный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, и нейтронов, не обнаруживающих электрического заряда. Протоны и нейтроны вместе называются нуклонами (от слова *nucleus* — ядро). Число протонов Z в ядре называется атомным номером и является основной характеристикой, определяющей индивидуальность элемента. Заряд ядра равен Ze Кл.

Изотопы. Ядра с одинаковым числом Z протонов и различными числами N нейтронов являются разновидностями одного и того же химического элемента и называются изотопами.

Массовое число. Полное число нуклонов в ядре называется массовым числом A:

$$A = Z + N.$$

Масса ядра. Дефект массы. Масса стабильного ядра $m_я$ всегда меньше суммы масс образующих его протонов и нейтронов на величину Δm. Эта величина называется дефектом массы.

Масса ядра измеряется в атомных единицах массы (а. е. м.) или в мегаэлектронвольтах (МэВ). 1 а. е. м. равна 1/12 массы атома углерода-12 и составляет $1{,}6604 \cdot 10^{-27}$ кг или 931,4812 МэВ ($\approx 931{,}5$ МэВ).

В таблицах обычно приводятся массы атомов $M_А$, которые связаны с массами ядер соотношением

$$m_я = M_А - Zm_e,$$

где m_e — масса электрона. Поэтому дефект массы ядра выражается следующим образом:

$$\Delta m_я = ZM_{^1_1H} + Nm_н - M_А = \frac{E_B}{c^2}.$$

Здесь $M_{{}_1H}$ — масса атома водорода (протон + электрон); $m_н$ — масса нейтрона; M_A — масса атома (протоны + электроны); c — скорость света. При вычислениях по этой формуле масса всех Z электронов входит в первое и третье слагаемое с противоположными знаками и поэтому сокращается.

Энергия связи. Величина $E_B = c^2 \Delta m$ называется энергией связи ядра. Она представляет собой энергию, которая выделилась при слиянии отдельных нуклонов в ядро и которую надо затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны.

Для указания индивидуального ядра (нуклида) его условно обозначают ${}^A_Z X$, где X — символ элемента (например, дейтерий ${}^2_1H$; кобальт ${}^{59}_{29}Co$ и т. д.).

Радиус ядра. Радиус ядра — условная величина, так как далеко не все ядра имеют сферическую форму и, кроме того, неясно, что следует понимать под поверхностью ядра, поскольку она образуется непрерывно движущимися нуклонами. Средний радиус сферического ядра приближенно вычисляют по формуле

$$R = r_0 A^{1/3},$$

где $r_0 \approx 1,4 \cdot 10^{-13}$ см.

Радиоактивность. Ядра некоторых (преимущественно тяжелых) элементов самопроизвольно распадаются, испуская при этом α-частицы (ядра гелия-4), β-частицы (электроны β^- или позитроны β^+) и γ-кванты.

При α-радиоактивности заряд ядра уменьшается на 2 единицы, а масса — на 4 единицы, например:

$${}^A_Z X \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}X + {}^4_2He;$$

$${}^{226}_{88}Ra \xrightarrow{\alpha} {}^{222}_{86}Rn + {}^4_2He.$$

При β-распаде заряд ядра увеличивается на единицу, а масса остается неизменной, например:

$${}^A_Z X \xrightarrow{\beta^-} {}_{Z+1}^{A}X + e^-;$$

$${}^{40}_{19}K \xrightarrow{\beta^-} {}^{40}_{20}Ca + e^-.$$

При γ-распаде превращения элементов не происходит, но внутренняя энергия ядра уменьшается:

$${}^A_Z X \xrightarrow{\gamma} {}^A_Z X + h\nu.$$

Продукты распада могут быть, в свою очередь, радиоактивными.

Период полураспада. Время, по истечении которого начальное число I_0 атомов радиоактивного элемента (или начальная масса) уменьшается вдвое, называется периодом полураспада $T_{1/2}$ и измеряется экспериментально. Иногда в таблицах приводится не период

полураспада, а так называемая постоянная распада λ. Они связаны соотношением

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Закон радиоактивного распада. Количество ядер, еще не распавшихся к данному моменту времени t, равно

$$J = J_0 e^{-\lambda t},$$

где J_0 — исходное количество ядер в момент $t = 0$.

Активность. Число радиоактивных распадов в единицу времени называется активностью. Для долгоживущих радиоактивных элементов с большим периодом полураспада удельная активность (активность единицы массы) вычисляется по формуле

$$\lambda N = \lambda L/M,$$

где L — число Авогадро; M — атомная масса радиоактивного элемента, в а. е. м.; N — число ядер в 1 кг этого элемента. Единицей активности в СИ является 1 распад в секунду. На практике активность часто измеряется в кюри (Ки). 1 Ки представляет собой активность, создаваемую 1 г радия совместно с продуктами его распада, и равен $3,7 \cdot 10^{10}$ распадов в секунду.

Активность C образца с массой m кг, атомной массой M а. е. м. и периодом полураспада $T_{1/2}$с определяется формулой

$$C = \frac{m\lambda L}{M} = \frac{4,17 \cdot 10^{26} \cdot m}{MT_{1/2}} \text{ расп/с} = \frac{1,13 \cdot 10^{16} m}{MT_{1/2}} \text{ Ки}.$$

Ядерная реакция — взаимодействие двух (или более) частиц, приводящее к появлению новых частиц. Например, при облучении азота $^{14}_{7}N$ альфа-частицами $^{4}_{2}He$ возникают ядра кислорода и водорода, т. е. происходит ядерная реакция. Эту реакцию можно записать в виде

$$^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H,$$

или сокращенно

$$^{14}_{7}N\,(\alpha,\ p)\,{}^{17}_{8}O.$$

Энергия ядерной реакции

$$Q = 931,5\left(\sum M_i - \sum M_k\right) \text{ МэВ},$$

где $\sum M_i$ — сумма масс частиц, вступающих в ядерную реакцию; $\sum M_k$ — сумма масс образующихся частиц (выраженных в а. е. м.).

Если $Q > 0$, реакция называется экзоэнергетической, так как идет с выделением энергии. При $Q < 0$ реакция называется эндоэнергетической и для ее возбуждения необходимо затратить энергию (например, ускорить частицы, т. е. сообщить им достаточную кинетическую энергию).

Деление ядра нейтронами — экзоэнергетическая реакция, при которой ядро, захватывая нейтрон, расщепляется на два (изредка — на три) большей частью неравных радиоактивных осколка, испуская вместе с этим гамма-кванты и 2 — 3 нейтрона. Эти нейтроны, при наличии вокруг достаточного количества делящегося вещества, могут, в свою очередь, вызывать деление окружающих ядер. В этом случае возникает цепная реакция, сопровождающаяся выделением большого количества энергии. Энергия выделяется за счет того, что делящееся ядро обладает или очень малым дефектом массы, или даже избытком массы вместо дефекта, что и является причиной неустойчивости таких ядер по отношению к делению. Ядра — продукты деления — обладают значительно бо́льшими дефектами массы, вследствие чего в рассматриваемом процессе происходит выделение энергии.

17.1. Вычислить массу ядра изотопа $^{16}_{8}O$.

Воспользуемся формулой

$$m_я = M_A - Zm_e.$$

Согласно таблице $M_A = 15{,}9949$ а. е. м.; $Zm_e = 8 \cdot 5{,}4860 \cdot 10^{-4} = 43{,}888 \cdot 10^{-4}$ а. е. м.; $m_я = 15{,}9949 - 0{,}0044 = 15{,}9005$ а. е. м., т. е. практически весь вес атома сосредоточен в ядре.

17.2. Сколько ядер изотопа ^{235}U содержится в 4 г природного урана?

Атомная масса природной смеси изотопов урана ^{238}U, ^{235}U, ^{234}U

$$\overline{M} = aM_{238} + bM_{235} + cM_{234},$$

где a, b и c — процентные содержания изотопов урана в природной смеси. Число атомов (а следовательно, и ядер) в m кг природной смеси составляет $mL/\overline{M}$, где L — число Авогадро. Число ядер ^{235}U в m кг природного урана равно $m\frac{L}{\overline{M}} \cdot a \cdot 10^{-2}$. В данном случае искомое число

$$N = 4 \cdot 10^{-3}\frac{6{,}022 \cdot 10^{26} \cdot 0{,}0072}{0{,}9927 \cdot 238 + 0{,}00721 \cdot 235 + 0{,}000055 \cdot 234} \approx \approx 7{,}3 \cdot 10^{19}.$$

17.3. Найти радиус ядра изотопа ^{235}U.

$$R \approx r_0 A^{1/3} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-13}(235)^{1/3} \approx 8{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

17.4. Найти дефект массы для ядер $^{4}_{2}He$, $^{7}_{3}Li$, $^{59}_{27}Co$, $^{235}_{82}U$ и вычислить дефект массы на 1 нуклон.

$$\Delta m_я = ZM_{^1_1H} + Nm_н - M_A; \quad \delta m = \frac{\Delta m_я}{A},$$

где $M_{^1_1H}$ — масса атома водорода; $m_н$ — масса нейтрона; M_A — масса атома изотопа.

Здесь, как и в других случаях, мы пользуемся массами атомов, а не ядер. Происходит это, во-первых, потому, что экспериментально можно определить только массу атома, а не массу ядра. Во-вторых, масса всех электронов данного ядра с зарядом Z входит в первое слагаемое со знаком (+), а в третье — со знаком (—) и поэтому сокращается.

Для ядра ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ ($Z = 2$; $N = 2$) : $\Delta m = 2 \cdot 1{,}0078 + 2 \cdot 1{,}0087 - 4{,}0026 = 0{,}0304$ а. е. м.; $\delta m = \Delta m/A = 7{,}5944 \cdot 10^{-3}$.

Для ядра ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ ($Z = 3$; $N = 4$) : $\Delta m = 3 \cdot 1{,}0078 + 4 \cdot 1{,}0087 - 7{,}0160 = 0{,}0421$ а. е. м.; $\delta m = 6{,}0189 \cdot 10^{-3}$.

Для ядра ${}^{59}_{27}\mathrm{Co}$ ($Z = 27$; $N = 32$) : $\Delta m = 27 \cdot 1{,}0078 + 32 \cdot 1{,}0087 - 58{,}9332 = 0{,}5554$ а. е. м.; $\delta m = 9{,}4133 \cdot 10^{-3}$.

Для ядра ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ ($Z = 92$; $N = 143$) : $\Delta m = 92 \cdot 1{,}0078 + 143 \cdot 1{,}0087 - 235{,}0439 = 1{,}9151$ а. е. м.; $\delta m = 8{,}15 \cdot 10^{-3}$.

17.5. Найти, сколько ядер дейтерия и кислорода содержится в 1 см^3 тяжелой воды.

Так как число килограммов вещества в 1 м^3 есть его плотность ρ, то число молекул в 1 м^3 вещества равно $\frac{L}{M}\rho$, а в 1 см^3 — равно $\frac{L}{M}\rho \cdot 10^{-6}$.

Формула тяжелой воды D_2O. Однако в число молекул воды входят молекулы, содержащие не только ^{16}O, но также ^{17}O и ^{18}O; процентное содержание различных изотопов кислорода в природной массе обозначим соответственно a, b и c.

Атомные массы этих изотопов обозначим M_{16}, M_{17}, M_{18}, а атомную массу дейтерия — через M_D. Тогда молекулярные массы различных соединений D_2O, входящих в природную тяжелую воду, равны соответственно:

$$D_2^{16}O : 2M_D + M_{^{16}O} \approx 20{,}0231 \text{ а. е. м.};$$
$$D_2^{17}O : 2M_D + M_{^{17}O} \approx 21{,}0273 \text{ а. е. м.};$$
$$D_2^{18}O : 2M_D + M_{^{18}O} \approx 22{,}0274 \text{ а. е. м.}$$

Средняя молекулярная масса природной тяжелой воды

$$\overline{M} = (2M_D + M_{^{16}O}) \cdot a \cdot 10^{-2} + (2M_D + M_{^{17}O}) \cdot b \cdot 10^{-2} + (2M_D + M_{^{18}O}) \cdot c \cdot 10^{-2} \approx 20{,}05 \text{ а. е. м.}$$

Обозначив плотность тяжелой воды при 20° С через ρ, найдем, что число молекул в 1 м^3 D_2O при 20° С равно $L\rho/\overline{M} \approx 3{,}32 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$.

Так как в молекуле тяжелой воды содержатся два атома дейтерия и один атом кислорода, то число ядер дейтерия в 1 см^3 D_2O при 20° С равно $10^{-6} \cdot 2L\rho/\overline{M} \approx 6{,}64 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$.

Число ядер кислорода в тех же условиях равно $10^{-6} \cdot L\rho/\overline{M} \approx 3{,}32 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$.

17.6. Вычислить энергии связи E_B, соответствующие найденным в задаче 17.4 дефектам масс, и среднюю энергию связи ε_B, приходящуюся на 1 нуклон.

Так как 1 а. е. м. ≈ 931,5 МэВ, то для изотопа ^4_2He

$$E_B = 30{,}378 \cdot 10^{-3} \cdot 931{,}5 \text{ МэВ} \approx 28{,}29 \text{ МэВ};$$

$$\varepsilon_B = \frac{E_B}{A} = \frac{28{,}29}{4} \approx 7{,}07 \text{ МэВ}.$$

Для изотопа ^7_3Li

$$E_B = 42{,}132 \cdot 10^{-3} \cdot 931{,}5 \text{ МэВ} \approx 39{,}25 \text{ МэВ};$$

$$\varepsilon_B = \frac{39{,}25}{7} = 5{,}61 \text{ МэВ}.$$

Для изотопа $^{59}_{27}Co$

$$E_B = 555{,}4 \cdot 931{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ МэВ} = 517{,}5 \text{ МэВ};$$

$$\varepsilon_B = \frac{517{,}5}{59} = 8{,}77 \text{ МэВ}.$$

Для изотопа $^{235}_{92}U$

$$E_B = 1915 \cdot 931 \cdot 10^{-3} \text{ МэВ} = 1782 \text{ МэВ};$$

$$\varepsilon_B = \frac{1782}{235} = 7{,}59 \text{ МэВ}.$$

17.7. Изотоп иттрий-91, содержащийся в продуктах деления ядра урана, испускает β-частицы с энергией $q = 1{,}53$ МэВ. Найти массу m иттрия-91, при распаде которой выделится $Q = 80$ Дж тепла, если вся энергия β-частиц превратится в теплоту.

При распаде одного ядра выделяется

$$q = 1{,}53 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} = 2{,}45 \cdot 10^{13} \text{ Дж}.$$

Число ядер в 1 кг иттрия-91 (см. задачу 17.2)

$$N = \frac{L}{M} = \frac{6{,}022 \cdot 10^{26}}{90{,}9069} = 6{,}624 \cdot 10^{24} \text{ кг}^{-1}.$$

Искомое количество иттрия-91

$$m = \frac{Q}{qN} = 4{,}9 \cdot 10^{-11} \text{ кг}.$$

17.8. При делении ядра урана-235 в результате захвата медленного нейтрона образуются осколки: ксенон-139 и стронций-94. Одновременно выделяются три нейтрона. Найти энергию, освобождающуюся при одном акте деления.

Очевидно, что при делении сумма атомных масс результирующих частиц меньше суммы масс исходных частиц на величину

$$\Delta m = M_{^{235}U} + m_н - M_{^{139}Xe} - M_{^{94}Sr} - 3m_н.$$

Предполагая, что вся освобождающаяся при делении энергия переходит в кинетическую энергию осколков, получаем после подстановки числовых значений

$$E \approx 931{,}5 \cdot \Delta m \approx 931{,}5 \cdot 0{,}193 \approx 180 \text{ МэВ}.$$

17.9. Период полураспада $^{226}_{88}Ra$ составляет $T_{1/2} = 1620$ лет. Вычислить постоянную распада λ.

$$\lambda_{Ra} = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{1620 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} \text{ с}^{-1} = 1{,}354 \cdot 10^{-11} \text{с}^{-1}.$$

17.10. Вычислить активность 1 г изолированного изотопа ^{226}Ra и время, через которое активность упадет на 10% (при вычислении воспользоваться данными и результатом задачи 17.9).

1) Удельная активность $\lambda N = \lambda \dfrac{L}{M} = 1{,}354 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{6{,}023 \cdot 10^{23}}{226} =$
$= 3{,}61 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1} = 0{,}975$ Ки;

2) $J = 0{,}9 J_0$. По формулам $J = J_0 e^{-\lambda t}$; $[\ln (J_0/J)]/\lambda$ находим $t \approx 243$ года.

17.11. Найти массу m изотопа $^{60}_{27}Co$, которая необходима для получения активности $C = 1$ кКи. Во сколько раз уменьшится эта активность через $t = 10{,}5$ лет?

Из формулы $C = \dfrac{1{,}13 \cdot 10^{16} m}{M T_{1/2}}$ находим

$$m = \frac{C M T_{1/2}}{1{,}13 \cdot 10^{16}} = \frac{10^3 \cdot 59{,}9338 \cdot 5{,}26 \cdot 3{,}153 \cdot 10^7}{1{,}13 \cdot 10^{16}} \approx 0{,}882 \text{ г}.$$

Из формулы $J = J_0 e^{-0{,}693 t/T_{1/2}}$ получаем

$$J_0/J \approx 4.$$

17.12. Найти энергию, выделяющуюся при делении 1 г урана-235.

Согласно задаче 17.8 при делении одного ядра-235 выделяется энергия $q = 180$ МэВ. Число ядер в 1 г урана-235 равно (см. задачу 17.2)

$$N = (L/M) \cdot 10^{-3},$$

где L — число Авогадро; M — атомная масса урана-235. Если считать, что все ядра испытывают деление, то полная энергия, выделяющаяся при делении 1 г урана-235,

$$Q = qN = qL/M \approx 7{,}3 \cdot 10^{10} \text{ Дж}.$$

17.13. 1 г радия-226, находящийся в равновесии с продуктами распада, выделяет за $t = 1$с $E = 14{,}2 \cdot 10^{11}$ МэВ. Сколько времени потребуется, чтобы нагреть $m = 10$ г воды от 0 до 100° С за счет энергии радиоактивного распада находящегося в воде 1 г радия-226? Потерями пренебречь.

Мощность источника энергии $N = 14{,}2 \cdot 10^{11}$ МэВ/с $= 14{,}2 \cdot 10^{11} \times$ $\times\ 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж/с $\approx 0{,}23$ Вт. Искомое время t определится из выражения

$$Nt = mc(T_2 - T_1),$$

где m — масса, c — теплоемкость; T — температура воды. Отсюда

$$t = \frac{mc(T_2 - T_1)}{N} \approx 5 \text{ ч.}$$

17.14. Ядро с массой m летит со скоростью v. В некоторой точке оно распадается на два осколка равных масс, один из которых вылетает со скоростью v_1 под углом α к первоначальному направлению движения. Найти скорость v_2 и угол β вылета второго осколка.

Рис. 408

Согласно закону сохранения количества движения

$$m\vec{v} = \frac{m}{2}\vec{v}_1 + \frac{m}{2}\vec{v}_2'.$$

Составим выражения проекций на направление движения ядра и на перпендикулярное к нему направление (рис. 408):

$$mv = \frac{m}{2}(v_1 \cos\alpha + v) + \\ + \frac{m}{2}(v_2 \cos\beta + v);$$

$$0 = \frac{m}{2} v_1 \sin\alpha + \frac{m}{2} v_2 \sin\beta.$$

Отсюда

$$v_1 \sin\alpha = -v_2 \sin\beta;$$
$$v_1 \cos\alpha = -v_2 \cos\beta.$$

Разделив одно равенство на другое, получим

$$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha; \ \beta = -\alpha$$

Возведя оба равенства в квадрат и складывая, найдем

$$v_1^2 = v_2^2,$$

откуда

$$|v_1| = |v_2|.$$

17.15. На неподвижное тяжелое ядро с массой m_2 налетает легкая заряженная частица с массой m_1, ускоренная до энергии E_0. При этом происходит центральное упругое столкновение, в результате которого частица отлетает в противоположную сторону с энергией E_1, а ядро приобретает кинетическую энергию E_2, называемую энергией отдачи ядра. Найти энергии E_1 и E_2. Взаимным отталкиванием зарядов пренебречь.

Из законов сохранения энергии и импульса $E_0 = E_1 + E_2$ или $m_1v_0^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2$ и $m_1\vec{v}_0 = -m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ получаем

$$m_1(v_0^2 - u_1^2) = m_2u_2^2;$$
$$m_1(v_0 + u_1) = m_2u_2.$$

Обозначим отношение m_1/m_2 через k и разделим одно равенство на другое:

$$v_0 - u_1 = u_2;\quad v_0 + u_1 = \frac{u_2}{k};$$

$$v_0 = \frac{u_2}{2}\left(\frac{1+k}{k}\right);\quad v_0^2 = \frac{u_2^2}{4}\left(\frac{1+k}{k}\right)^2;$$

$$u_1 = \frac{u_2}{2}\left(\frac{1-k}{k}\right);\quad u_1^2 = \frac{u_2^2}{4}\left(\frac{1-k}{k}\right)^2;$$

$$E_0 = \frac{m_1v_0^2}{2} = \frac{m_1}{2}\frac{u_2^2}{4}\left(\frac{1+k}{k}\right)^2 = \frac{m_1m_2u_2^2}{4m_2 2}\left(\frac{1+k}{k}\right)^2 = \frac{E_2}{4}\frac{(1+k)^2}{k};$$

$$E_2 = \frac{4kE_0}{(1+k)^2} = \frac{4m_1m_2E_0}{(m_1+m_2)^2};\quad E_1 = E_0 - E_2 =$$
$$= \left(\frac{k-1}{1+k}\right)^2 E_0 = \left(\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right)^2 E_0.$$

17.16. Неподвижное ядро распадается, образуя три осколка с массами m_1, m_2 и m_3 и общей кинетической энергией E_0. Найти энергии осколков, если все они разлетаются под углами 120° по отношению друг к другу.

По закону сохранения энергии $m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 + m_3v_3^2/2 = E_0$. Так как исходное количество движения равно нулю, то и конечное количество движения равно нулю. Поскольку углы между векторами количества движения одинаковы и равны 120°, то и сами векторы равны по величине: $m_1v_1 = m_2v_2 = m_3v_3$. Из этих трех уравнений получаем

$$E_1 = \frac{m_2m_3E_0}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3};$$
$$E_2 = \frac{m_1m_3E_0}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3};$$
$$E_3 = \frac{m_1m_2E_0}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}.$$

17.17. Нейтрон с массой m, двигаясь со скоростью v, ударяется о неподвижное ядро с массой nm. Считая удар центральным и упругим, найти, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия нейтрона и относительное уменьшение его скорости.

Согласно законам сохранения энергии и импульса (при $n > 1$ v' направлена в сторону, противоположную v)

$$v = -v' + nv'';$$
$$v^2 = v'^2 + nv''^2.$$

Здесь v' и v'' — скорости бомбардирующей частицы и ядра после удара,

$$v^2 - v'^2 = nv''^2;$$
$$v + v' = nv''.$$

Разделив одно уравнение на другое, находим

$$v - v' = v''; \; v + v' = nv'';$$

$$2v = (n + 1)\, v''; \;\; 2v' = (n - 1)\, v'';$$

$$\frac{v}{v'} = \frac{n+1}{n-1}; \;\; \frac{E}{E'} = \frac{v^2}{v'^2} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2;$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v - v'}{v} = \frac{n + 1 - n + 1}{n+1} = \frac{2}{n+1}.$$

При $n = 1$ бомбардирующая частица останавливается, а бомбардируемое ядро получает энергию и импульс налетающей частицы.

Заметим, что при повторном упругом соударении нейтрона с таким же ядром энергия нейтрона уменьшится в $[(n+1)/(n-1)]^4$ раз. При m столкновениях энергия уменьшится в $[(n+1)/(n-1)]^{2m}$ раз. Из формулы для относительного уменьшения скорости видно, что чем меньше n, тем бóльшую часть скорости теряет при ударе нейтрон. Именно поэтому защита от нейтронного излучения выполняется из веществ, содержащих легкие элементы (парафин, вода, бериллий, графит).

17.18. В условиях задачи 17.17 нейтрон после соударения меняет направление скорости на угол α. Найти скорости нейтрона и ядра после удара.

Выберем ось X вдоль движения нейтрона до удара. Закон сохранения импульса в векторной форме: $m\vec{v} = m\vec{u}_1 + mn\vec{u}_2$. В проекциях

$$v = u_1 \cos\alpha + nu_2 \cos\beta;$$
$$0 = u_1 \sin\alpha - nu_2 \sin\beta.$$

Закон сохранения энергии: $v^2 = u_1^2 + nu_2^2$. Из первых двух уравнений находим, преобразуя их, затем возводя в квадрат и складывая:

$$v - u_1\cos\alpha = nu_2\cos\beta; \;\; v^2 - 2vu_1\cos\alpha + u_1^2\cos^2_\alpha = n^2u^2\cos^2\beta;$$

$$u_1 \sin\alpha = nu_2 \sin\beta; \qquad \frac{u_1^2\sin^2\alpha = n^2u_2^2\sin^2\beta;}{v^2 + u_1^2 - 2vu_1\cos\alpha = n^2u_2^2}.$$

С помощью третьего уравнения исключаем u_2: $(n+1)\,u_1^2 - 2v\cos\alpha u_1 - (n-1)\,v^2 = 0;$

$$u_1 = \frac{v\cos\alpha \pm \sqrt{v^2\cos^2\alpha + (n^2 - 1)\,v^2}}{n+1} = \frac{v\cos\alpha \pm v\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n+1}.$$

Вычислив u_1, находим u_2 по формуле

$$u_2 = \sqrt{\frac{v^2 - u_1^2}{n}}$$

и угол β по формуле

$$\sin\beta = \frac{u_1 \sin\alpha}{nu_2}.$$

17.19. Протон с энергией $E_0 = 0,1$ МэВ рассеивается на ядре $^4_2$He под углом $\theta = 90°$. Определить энергии протона и альфа-частицы после рассеяния.

Согласно закону сохранения импульса (с учетом того, что скорость протона v' после рассеяния направлена под углом 90° к скорости протона до рассеяния) можно написать (рис. 409)

$$m_p^2 v_p^2 + m_p^2 v'^2_p = m_\alpha^2 v_\alpha^2.$$

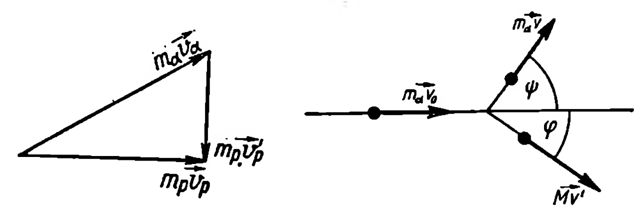


Рис. 409 Рис. 410

Согласно закону сохранения энергии

$$m_p v_p^2 = m_p v'^2_p + m_\alpha v_\alpha^2.$$

Из этих двух уравнений находим

$$E'_p = \frac{m_p v'^2_p}{2} = \frac{m_\alpha - m_p}{m_\alpha + m_p} E_0 \approx 0,06 \text{ МэВ};$$

$$E_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{2m_p}{m_\alpha + m_p} E_0 \approx 0,04 \text{ МэВ}.$$

17.20. Альфа-частица, летящая со скоростью v_0 ($v_0 \ll c$), рассеивается на ядре с массой M. Угол между направлением движения альфа-частицы до удара и направлением вылета ядра отдачи равен φ. Найти скорость ядра отдачи v' (рис. 410).

Запишем законы сохранения энергии и импульса

$$m_\alpha v_0^2 = m_\alpha v^2 + Mv'^2; \quad m_\alpha \vec{v}_0 = m_\alpha \vec{v} + M\vec{v}'.$$

Из второй формулы можно получить следующие соотношения:

$$m_\alpha v \cos\psi = m_\alpha v_0 - Mv' \cos\varphi;$$

$$m_\alpha v \sin\psi = Mv' \sin\varphi.$$

Возводим оба соотношения в квадрат, складываем и результат вычитаем из выражения для закона сохранения энергии, умноженного на m_α:

$$M^2 v'^2 + M m_\alpha v'^2 = 2M m_\alpha v_0 v' \cos\varphi.$$

Сокращая на Mv', получаем

$$(M + m_\alpha) v' = 2m_\alpha v_0 \cos\varphi,$$

откуда $v' = \dfrac{2m_\alpha v_0 \cos\varphi}{M + m_\alpha}$.

17.21. Вычислить энергию реакции ${}^9_4\text{Be}\,(\alpha,\ n){}^{12}_6\text{C}$.

Согласно формуле (с. 511)

$$Q = (m_\alpha + m_{\text{Be}} - m_{\text{C}} - m_{\text{н}}) \cdot 931{,}5 \text{ МэВ}.$$

Как и в других задачах, мы пользуемся атомными массами, поскольку массы электронов автоматически исключаются. Учитывая, что энергии (в частности, энергии реакций) удобнее всего выражать в МэВ, находим

$$Q = (4{,}0026 + 9{,}0122 - 12{,}0000 - 1{,}0087) \cdot 931{,}5 \approx 5{,}7 \text{ МэВ},$$

т. е. реакция экзотермическая и может идти при малых энергиях α-частиц, необходимых лишь для преодоления кулоновских сил отталкивания со стороны ядра.

17.22. Найти наименьшую энергию протона, при которой он смог бы приблизиться на расстояние 10 ферми к ядру ${}^7_3\text{Li}$. Провести такое же вычисление для альфа-частицы и ядра ${}^9_4\text{Be}$ (1 ферми $= 10^{-15}$ м).

Предполагая, что частица летит по линии, проходящей через центр ядра, найдем, что ее кинетической энергии должно хватить, чтобы приблизиться к ядру на расстояние r, где вся эта кинетическая энергия превратится в потенциальную энергию электростатического отталкивания, т. е.

$$W_{\text{к}}^{\text{мин}} = W_{\text{п}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Здесь Z_1 — атомный номер налетающей частицы; Z_2 — атомный номер ядра; e — единичный заряд.

1) $Z_1 = 1$; $Z_2 = 3$;

$$W_{\text{к}}^{\text{мин}} = 0{,}48 \text{ МэВ};$$

2) $Z_1 = 2$; $Z_2 = 4$; $W_\alpha = \dfrac{8}{3} W_p = 1{,}26$ МэВ.

17.23. Вычислить энергию реакции ${}^7_3\text{Li}\,(p,\ n)\,{}^7_4\text{Be}$.

Согласно формуле (с. 511)

$$Q = 931{,}5\,(m_{\text{p}} + m_{\text{Li}} - m_{\text{Be}} - m_{\text{н}}) \text{ МэВ} =$$
$$= 931{,}5\,(1{,}0078 + 7{,}0160 - 7{,}0169 - 1{,}0087) \text{ МэВ} = -1{,}64 \text{ МэВ}.$$

Таким образом, эта реакция эндоэнергетическая и может идти только в том случае, если протон ускорить до необходимой минимальной энергии. Однако последняя оказывается больше, чем 1,64 МэВ. Это объясняется тем, что при соударении ускоренного протона с неподвижным ядром часть кинетической энергии протона обязательно расходуется на то, чтобы сдвинуть с места само ядро. Таким образом,

часть энергии протона переходит в энергию отдачи ядра, и лишь остальная часть может быть использована для ядерной реакции. Минимальная энергия протона, при которой может возникнуть ядерная реакция (с учетом энергии, пошедшей на отдачу ядра), называется пороговой энергией или просто порогом реакции $E_{пор}$. Порог реакции вычисляется по формуле

$$E_{пор} = |Q|\left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

где m — массовое число налетающей частицы; M — массовое число ядра мишени. В данном случае минимальная энергия протона должна равняться

$$E_{пор} = 1{,}64\left(1 + \frac{1}{7}\right) \approx 1{,}88 \text{ МэВ},$$

из которых $1{,}88 - 1{,}64 = 0{,}24$ МэВ переходит в энергию отдачи ядра.

17.24. Альфа-радиоактивный изотоп плутония $^{239}_{94}Pu$ распадается по схеме

$$^{239}_{94}Pu \rightarrow {}^{235}_{92}U^* + {}^{4}_{2}He,$$

причем обозначенный звездочкой уран-235, в свою очередь, испускает γ-квант с энергией $E_\gamma = 0{,}09$ МэВ по схеме

$$^{235}_{92}U^* \rightarrow {}^{235}_{92}U + h\nu.$$

Найти скорость α-частиц, вылетающих при распаде ядер плутония.

Энергия, выделяющаяся при распаде,

$$E = [931{,}5\,(m_{Pu} - m_U - m_\alpha) - E_\gamma] \text{ МэВ}.$$

Эта энергия переходит в кинетическую энергию продуктов распада: ядра ^{235}U и α-частицы, т. е. $E = E_U + E_\alpha$. Закон сохранения количества движения в данном случае: $m_U v_U = m_\alpha v_\alpha$. Возведем это равенство в квадрат и перепишем его в виде $m_U v_U^2 / m_\alpha v_\alpha^2 = E_U/E_\alpha = m_\alpha/m_U$. Так как $m_\alpha \ll m_U$, то $E_\alpha \gg E_U$. Иначе говоря, можно считать, что ядро урана практически остается неподвижным, а всю энергию уносит α-частица, т. е. $E \approx E_\alpha$. Из соотношения $m_\alpha v_\alpha^2/2 = E_\alpha$ находим

$$v = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m}[931{,}5\,(m_{Pu} - m_U - m_\alpha) - E_\gamma]} \approx$$
$$\approx 1{,}58 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

17.25. При столкновении с неподвижным ядром мишени α-частица рассеялась на угол $\varphi = 30°$, а ядро отдачи вылетело под таким же углом. Найти массу ядра мишени (рис. 411).

Согласно закону сохранения импульса

$$m_\alpha v_\alpha = m_\alpha v'_\alpha \cos\varphi + Mv\cos\varphi;$$
$$0 = m_\alpha v'_\alpha \sin\varphi - Mv\sin\varphi;$$
$$m_\alpha v'_\alpha = Mv.$$

Поэтому

$$m_\alpha v_\alpha = 2Mv\cos\varphi.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$m_\alpha v_\alpha^2 = m_\alpha v_\alpha'^2 + Mv^2 \quad \text{или} \quad m_\alpha^2 v_\alpha^2 = m_\alpha^2 v_\alpha'^2 + m_\alpha M v^2.$$

Отсюда

$$4M^2v^2\cos^2\varphi = M^2v^2 + m_\alpha M v^2.$$

Сокращая на Mv^2, получим

$$4M\cos^2\varphi = M + m_\alpha,$$

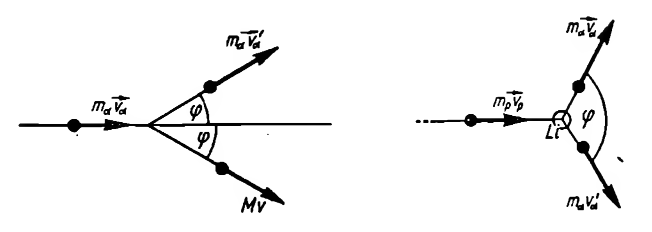


Рис. 411 Рис. 412

откуда

$$M = \frac{m_\alpha}{4\cos^2\varphi - 1}.$$

При $\varphi = 30^\circ$ $M = m_\alpha/2$, т. е. M — масса ядра дейтерия, называемого дейтроном.

17.26. На ядро лития налетает протон с кинетической энергией E_p. В результате реакции образуются две альфа-частицы с одинаковыми энергиями. Найти угол разлета.

Из задачи 17.23 известно, что реакция $\mathrm{Li} + p$ — эндоэнергетическая, и ядру лития должна быть сообщена энергия реакции Q, для того чтобы реакция могла начаться. Энергия отдачи здесь не учитывается, так как образующееся ядро $^8_4\mathrm{Be}$ сразу разваливается на две альфа-частицы, в кинетические энергии которых войдет и энергия отдачи. По этой причине закон сохранения энергии мы запишем в виде

$$E_p + Q = 2E_\alpha,$$

а закон сохранения импульса — в виде (рис. 412)

$$m_p\vec{v}_p = m_\alpha\vec{v}_\alpha + m_\alpha\vec{v}_\alpha'.$$

Очевидно,

$$m_p v_p = 2m_\alpha v_\alpha \cos\varphi/2.$$

Так как

$$v_p = \sqrt{\frac{2E_p}{m_p}} \quad \text{и} \quad v_\alpha = \sqrt{\frac{E_p + Q}{m_\alpha}},$$

то

$$\varphi = 2\arccos\sqrt{\frac{E_p m_p}{2m_\alpha(E_p + Q)}},$$

где $Q = 931{,}5\,(m_{Li} + m_p - 2m_{He})$ аналогично задаче 17.24.

17.27. Определить энергию, освобождающуюся в водородной бомбе при синтезе 1 кг гелия.

Наибольшее энерговыделение дает реакция синтеза

$$^2_1D + {}^3_1T = {}^4_2He + {}^1_0n.$$

При одном акте синтеза выделяется энергия

$$\Delta E = (m_D + m_T - m_\alpha - m_n) \cdot 931{,}5 = 17{,}6 \quad \text{МэВ} = 28{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Эта энергия выделяется за счет того, что ядра дейтерия и трития, обладающие малыми дефектами массы, при слиянии превращаются в ядро гелия, обладающее бóльшим дефектом массы. Это увеличение дефекта массы и приводит к выделению энергии.

Число ядер в 1 кг гелия

$$N = \frac{L}{M} = \frac{6{,}022 \cdot 10^{26}}{4{,}0026} \approx 1{,}5 \cdot 10^{26}.$$

При образовании такого количества ядер выделяется энергия

$$W = N\Delta E = 1{,}5 \cdot 10^{26} \cdot 28{,}2 \cdot 10^{-13} = 4{,}23 \cdot 10^{14} \text{ Дж}.$$

17.28. Почему мощность взрыва, осуществляемого на основе деления ядер, имеет предел? Имеет ли предел мощность термоядерного взрыва?

В процессе цепной реакции происходит повышение температуры и давления. Если в результате этого ядерное горючее разлетится на куски, меньшие определенной величины (критической массы), реакция прекратится.

Мощность термоядерного взрыва такого предела не имеет.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Единицы измерений физических величин в СИ.
2. Универсальные физические постоянные.
3. Данные о Солнце, Земле и Луне.
4. Физические характеристики планет.
5. Орбиты планет.
6. Коэффициент трения скольжения.
7. Момент инерции некоторых однородных тел.
8. Модули упругости и коэффициент Пуассона.
9. Плотность чистых элементов.
10. Плотность сплавов.
11. Плотность веществ при 20° С.
12. Плотность жидкостей.
13. Плотность газов и паров при 0° С и $1{,}013 \cdot 10^5$ Па.
14. Плотность газов в жидком и твердом состояниях.
15. Температурный коэффициент линейного расширения твердых тел.
16. Температурный коэффициент объемного расширения жидкостей при $1{,}013 \cdot 10^5$ Па.
17. Термический коэффициент давления газов.
18. Теплоемкость элементов при 0° С и $1{,}013 \cdot 10^5$ Па.
19. Теплоемкость технических материалов при 298,15 К и $1{,}013 \cdot 10^5$ Па.
20. Температуры плавления и кипения элементов. Теплоты плавления и испарения элементов.
21. Температуры плавления и кипения некоторых органических веществ
22. Критические температуры, давления и плотности для некоторых веществ.
23. Температурная стойкость различных веществ.
24. Коэффициент теплопроводности элементов.
25. Коэффициент теплопроводности некоторых сплавов.
26. Коэффициент теплопроводности различных материалов.
27. Коэффициент теплопроводности некоторых жидкостей.
28. Коэффициент теплопроводности некоторых газов при $1{,}013 \cdot 10^5$ Па.
29. Коэффициент диффузии веществ, растворенных в воде.
30. Вязкость элементов в жидком состоянии.
31. Вязкость жидкостей.
32. Вязкость воды при различных температурах.
33. Коэффициент внутреннего трения (вязкости) газов и паров.
34. Поверхностное натяжение металлов в жидком состоянии.
35. Коэффициент поверхностного натяжения некоторых жидкостей.
36. Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления металлов и сплавов.
37. Удельное сопротивление, пробивное напряжение, диэлектрическая

проницаемость и тангенс угла диэлектрических потерь различных веществ.
38. Электрохимические эквиваленты веществ.
39. Показатели преломления при 20° С относительно воздуха (для длины волны λ=589,3 нм).
40. Предельные углы полного отражения
41. Длины световых волн и соответствующие им цвета видимого спектра.
42. Энергия одного кванта излучения при различных длинах волн.
43. Длина волны фотоэлектрического порога чистых металлов.
44. Работа выхода электронов.
45. Атомные массы элементов
46. Атомные массы, распространенность некоторых стабильных и периоды полураспада некоторых радиоактивных изотопов.

1. Единицы измерений физических величин в СИ

Величина		Единица	
Наименование	Обозначение и определяющее уравнение	Наименование	Обозначение
Основные единицы			
Длина	l	метр	м
Масса	m	килограмм	кг
Время	t	секунда	с
Температура	T	кельвин	К
Сила тока	I	ампер	А
Сила света	J	кандела	кд
Количество вещества	μ	моль	моль *
Дополнительные единицы			
Плоский угол	φ	радиан	рад
Телесный угол	Ω	стерадиан	ср
Производные единицы			
Площадь	$S = l^2$	квадратный метр	$м^2$
Объем	$V = l^3$	кубический метр	$м^3$
Плотность	$\rho = \frac{m}{V}$	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$
Скорость	$v = \frac{l}{t}$	метр в секунду	м/с
Ускорение	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	метр на секунду в квадрате	$м/с^2$
Частота вращения	$n = \frac{1}{t}$	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$
Угловая скорость	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$	радиан на секунду в квадрате	$рад/с^2$
Сила	$F = ma$	ньютон	Н
Давление	$p = \frac{F}{S}$	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	$\sigma = \frac{F}{S}$	паскаль	Па

* Моль — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 с массой 0,012 кг.

Величина		Единица	
Наименование	Обозначение и определяющее уравнение	Наименование	Обозначение
Жесткость	$k = \frac{F}{\Delta l}$	ньютон на метр	Н/м
Количество движения	$p = mv$	килограмм-метр в секунду	кг · м/с
Импульс силы	$I = Ft$	ньютон-секунда	Н · с
Работа	$A = Fl$	джоуль	Дж
Энергия	$E = W = Fl$		
Мощность	$P = \frac{A}{t}$	ватт	Вт
Момент силы	$M = Fl$	ньютон-метр	Н · м
Момент инерции	$J = mr^2$	килограмм-метр в квадрате	кг · м^2
Момент количества движения	$L = J\omega$	килограмм-метр в квадрате на секунду	кг · м^2/с
Период	T	секунда	с
Частота колебательного процесса	$\nu = \frac{1}{T}$	герц	Гц
Фаза колебательного процесса	$\varphi = \omega t + \varphi_0$	радиан	рад
Угловая скорость	$\omega = 2\pi\nu$	радиан в секунду	рад/с
Длина волны	$\lambda = uT$	метр	м
Волновое число	$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$	метр в минус первой степени	м$^{-1}$
Количество теплоты	$Q = A$	джоуль	Дж
Теплоемкость	$C = \frac{Q}{\Delta T}$	джоуль на кельвин	Дж/К
Удельная теплоемкость	$c = \frac{Q}{m\Delta T}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг · К)
Молярная теплоемкость	$C = \frac{Q}{\mu\Delta T}$	джоуль на моль-кельвин	Дж/моль · К
Удельная теплота фазового превращения (плавления, кипения)	$r = \frac{Q}{m}$	джоуль на килограмм	Дж/кг

Продолжение

Величина		Единица	
Наименование	Обозначение и определяющее уравнение	Наименование	Обозначение
Температурный коэффициент линейного расширения	$\alpha = \frac{\Delta l}{l \Delta T}$	кельвин в минус первой степени	$К^{-1}$
Температурный коэффициент объемного расширения	$\beta = \frac{\Delta V}{V \Delta T}$	кельвин в минус первой степени	$К^{-1}$
Теплопроводность	$\lambda = \frac{Q}{tS \frac{\Delta T}{\Delta l}}$	ватт на метр-кельвин	Вт/(м · К)
Коэффициент диффузии	$D = \frac{M}{tS \frac{\Delta \rho}{\Delta l}}$	квадратный метр на секунду	$м^2/с$
Коэффициент внутреннего трения	$\eta = \frac{F}{S \frac{\Delta v}{\Delta l}}$	паскаль-секунда	Па · с
Коэффициент поверхностного натяжения	$\alpha = \frac{F}{l}$	ньютон на метр	Н/м
Электрический заряд	$q = It$	кулон	Кл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = \frac{Cd}{\varepsilon S}$	фарада на метр	Ф/м
Относительная диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon = \frac{E_0}{E}$	—	—
Линейная плотность электрического заряда	$\tau = \frac{q}{l}$	кулон на метр	Кл/м
Поверхностная плотность электрического заряда	$\sigma = \frac{q}{S}$	кулон на квадратный метр	$Кл/м^2$
Объемная плотность электрического заряда	$\rho = \frac{q}{V}$	кулон на кубический метр	$Кл/м^3$
Электрический момент диполя	$p_e = ql$	кулон-метр	Кл · м
Напряженность электрического поля	$E = \frac{U}{l}$	вольт на метр	В/м

Продолжение

Величина		Единица	
Наименование	Обозначение и определяющее уравнение	Наименование	Обозначение
Разность электрических потенциалов	$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}$	вольт	В
Электродвижущая сила	$\mathscr{E} = \frac{A}{q}$	вольт	В
Напряжение	$U = IR$	вольт	В
Электрическая емкость	$C = \frac{q}{U}$	фарада	Ф
Плотность тока	$j = \frac{I}{S}$	ампер на квадратный метр	А/м²
Электрическое сопротивление	$R = \frac{U}{I}$	ом	Ом
Электрическая проводимость	$g = \frac{1}{R}$	сименс	См
Магнитная постоянная	$\mu_0 = \frac{L}{\mu n^2 V}$	генри на метр	Г/м
Магнитная проницаемость	μ	—	—
Магнитная индукция	$B = \frac{\Phi}{S}$	тесла	Т
Магнитный момент электрического тока	$p_m = IS$	ампер-квадратный метр	А · м².
Магнитный поток	$\Phi = B_n S$	вебер	Вб
Индуктивность	$L = \frac{n\Phi}{I}$	генри	Г
Взаимная индуктивность	M	генри	Г
Световой поток	$\Phi = J\omega$	люмен	лм
Освещенность	$E = \frac{\Phi}{S}$	люкс	лк
Яркость	$B = \frac{J}{S_n}$	кандела на квадратный метр	кд/м²
Энергия излучения	W	джоуль	Дж

2. Универсальные физические постоянные

Название	Обозначение	Численное значение
Ускорение свободного падения	g	9,80602 м/с^2
Гравитационная постоянная	γ	6,672 · 10^{-11} м^3/кг · с^2
Абсолютный нуль температур	—	−273,15° С
Тройная точка воды	—	273,16 К = 0,01° С
Мольный объем идеального газа в нормальных условиях (0° С и 101325 Па)	V_0	22,41 м^3/кмоль
Универсальная газовая постоянная	R	8,314 · 10^3 Дж/кмоль · К
Число молекул в киломоле вещества (число Авогадро)	N_A	6,022 · 10^{26} кмоль$^{-1}$
Число молекул в 1 м^3 газа в нормальных условиях (число Лошмидта)	n_0	2,7 · 10^{25} м$^{-3}$
Постоянная Больцмана	$k = \frac{R}{N_A}$	1,38 · 10^{-23} Дж/К
Атомная единица массы	а. е. м.	1,660 · 10^{-27} кг
Масса покоя электрона	m_e	9,1095 · 10^{-31} кг = = 5,486 · 10^{-4} а. е. м.
Масса покоя протона	m_p	1,6726 · 10^{-27} кг = = 1,007276 а. е. м.
Масса атома водорода	$m_{^1_1H}$	1,6735 · 10^{-27} кг = = 1,007825 а. е. м.
Масса покоя нейтрона	m_n	1,675 · 10^{-27} кг = = 1,008665 а. е. м.
Элементарный заряд	e	1,6022 · 10^{-19} Кл
Число Фарадея	F	9,6500 · 10^7 Кл/кмоль
Электрическая постоянная	ε_0	8,8542 · 10^{-12} Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	12,5664 · 10^{-6} Г/м
Постоянная Планка	h	6,626 · 10^{-34} Дж · с
Скорость света в вакууме	c	2,997925 · 10^8 м/с

3. Данные о Солнце, Земле и Луне

Величина	Солнце	Земля	Луна
Средний радиус, км	695,6 · 10^3	6,378 · 10^3	1,738 · 10^3
Масса, кг	1984 · 10^{27}	5,876 · 10^{24}	7,36 · 10^{22}
Средняя плотность, кг/м^3	1409	5516	3340
Ускорение свободного падения на поверхности, м/с^2	273,98	9,806	1,62
Скорость поступательного движения, км/с	20	29,78	1,02
Среднее расстояние до Земли, км	1,496 · 10^8	—	3,844 · 10^5
Период обращения вокруг центрального светила, с	—	3,55 · 10^7	2,36 · 10^6

4. Физические характеристики планет

Объем Земли $V_З = 1{,}08332 \cdot 10^{21}$ м³; масса Земли $M_З = (5{,}977 \pm 0{,}004) \cdot 10^{24}$ кг; ρ — средняя плотность; g — ускорение силы тяжести на поверхности планеты; φ — наклонение экватора к плоскости орбиты; $v_{осв}$ — вторая космическая скорость для данной планеты

Планета	Экваториальный радиус, км	Сжатие	Объем $V_З = 1$	Масса $M_З = 1$	ρ, 10^3, кг/м³	g, м/с²	$v_{осв}$, км/с	Период вращения вокруг собственной оси	φ
Меркурий	2420	0,0	0,055	0,053	5,3	3,60	4,15	58,7 дня	7°
Венера	6200	0,0	0,91	0,815	4,95	8,50	10,25	242,98 дня	< 3°
Земля	6378,39	0,00336	1,000	1,000	5,517	9,8066	11,19	23 ч 56 мин 4,1 с	23° 27′
Марс	3400	0,0052	0,150	0,107	3,95	3,76	5,09	24 ч 37 мин 22,6 с	25° 12′
Юпитер	71 400	0,062	1317	318,0	1,33	26,00	60,2	9 ч 50 мин 30 с	3° 07′
Сатурн	60 400	0,096	762	95,22	0,687	11,20	36,2	10 ч 14 мин	26° 45′
Уран	23 800	0,06	50	14,55	1,56	9,40	21,4	0,89 дня	97° 59′
Нептун	22 800	0,02	42	17,23	2,27	15,00	23,4	0,53 дня	29°
Плутон	3000	—	1,3	0,9	4	8,00	10	6,39 дня	> 50

5. Орбиты планет

Планета	Большая полуось орбиты, млн. км	Период, сутки	Средняя орбитальная скорость, км/с
Меркурий	57,91	87,969	47,90
Венера	108,21	224,701	35,05
Земля	149,60	365,256	29,80
Марс	227,9	686,98	24,14
Юпитер	778,3	4332,6	13,06
Сатурн	1428	10 759,2	9,65
Уран	2872	30 687	6,80
Нептун	4498	60 184	5,43
Плутон	5910	90 700	4,74

6. Коэффициент (k) трения скольжения

Трущиеся материалы	k
Бронза по бронзе	0,2
Бронза по стали без смазки	0,18
Бронза по стали со смазкой	0,02—0,08
Дерево сухое по дереву	0,25—0,5
Лед по льду	0,028
Медь по чугуну	0,27
Резина по твердому грунту	0,4—0,6
Резина по чугуну	0,83
Сталь по железу	0,19
Сталь по льду (коньки)	0,02—0,03
Сталь по стали	0,18
Сталь по чугуну	0,16
Фторопласт по нержавеющей стали	0,06—0,08
Фторопласт-4 по фторопласту	0,05—0,09
Чугун по бронзе	0,21
Чугун по чугуну	0,16

7. Момент инерции (J) некоторых однородных тел, $м^2 \cdot кг$

Тело	Относительно оси	J
Материальная точка с массой m	проходящей на расстоянии r от точки	mr^2

Продолжение

Тело	Относительно оси	J
Тонкий стержень с массой m и длиной l	перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину	$\frac{ml^2}{12}$
Тонкий стержень с массой m и длиной l	перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец	$\frac{ml^2}{3}$
Тонкая труба или кольцо радиусом r	совпадающей с осью трубы	mr^2
Круглый диск или цилиндр с массой m и радиусом r	перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр	$\frac{mr^2}{2}$
Шар с массой m и радиусом r	совпадающей с диаметром	$\frac{2}{5}mr^2$
Круглый цилиндр с массой m, длиной l и радиусом r	перпендикулярной к оси цилиндра и проходящей через его середину	$m\left(\frac{l^2}{12}+\frac{r^2}{4}\right)$
Прямоугольный параллелепипед размерами $2a$, $2b$, $2c$	проходящей через центр и параллельной ребру длины $2a$	$m\frac{b^2+c^2}{3}$

8. Модули упругости и коэффициент Пуассона

Материал	Модуль Юнга E, 10^7 Н/м²	Модуль сдвига G, 10^7 Н/м²	Коэффициент Пуассона μ
Алюминиевая бронза, литье	10300	4100	0,25
Алюминий	6300—7000	2500—2600	0,32—0,36
Бетон	1500—4000	700—1700	0,1—0,15
Висмут	3200	1200	0,33
Гранит, мрамор	3500—5000	1400—4400	0,1—0,15
Дюралюминий катаный	7000	2600	0,31
Известняк плотный	3500	1500	0,2
Инвар	13 500	5500	0,25
Кадмий	5000	1900	0,3
Каучук	0,79	0,27	0,46
Кварцевая нить (плавленая)	7300	3100	0,17
Константан	16 000	6100	0,33
Латунь			
корабельная катаная	9800	3600	0,36
холоднотянутая	8900—9700	3400—3600	0,32—0,42

Материал	Модуль Юнга E. 10^7 Н²/м	Модуль сдвига G, 10^7 Н/м²	Коэффициент Пуассона μ
Манганин	12 300	4600	0,33
Медь			
литье	8 200	—	—
прокатанная	10 800	3900	0,31—0,34
холоднотянутая	12 700	4800	0,33
Никель	20 400	7900	0,28
Плексиглас	525	148	0,35
Резина мягкая вулканизированная	0,15—0,5	0,05—0,15	0,46—0,49
Серебро	8270	3030	0,37
Сталь			
легированная	20 600	8000	0,25—0,30
углеродистая	19 500—20 500	800	0,24—0,28
Стальное литье	17 000	—	—
Стекло	4900—7800	1750—2900	0,2—0,3
Титан	11 600	4100	0,32
Фосфористая бронза катаная	11 300	4100	0,32—0,35
Целлулоид	170—190	65	0,39
Цинк катаный	8200	3100	0,27
Чугун			
белый, серый	11 300—11 600	4400	0,23—0,27
ковкий	15 000	—	—

9. Плотность (ρ) чистых элементов, 10^3 кг/м³

Элемент	t, °C	ρ	Элемент	t, °C	ρ
Алюминий	20	2,70	Гафний	20	13,3
Барий	20	3,78	Германий	20	5,46
Бериллий	20	1,84	Европий	20	3,217
Бор			Железо	20	7,87
кристаллический	20	3,33	Золото	20	19,3
			Индий	20	7,28
аморфный	20	2,34	Иод	20	4,94
			Иридий	17	22,42
Бром жидкий	20	3,12	Иттербий	20	5,5
			Иттрий	20	3,80
Ванадий	20	5,96	Кадмий	20	8,648
Висмут	20	9,747	Калий	20	0,87
Вольфрам	20	18,6—19,1	Калий	62,1	0,851
Гадолиний	20	5,91	Кальций	29	1,55
Галлий	32, 38	6,093	Кобальт	?1	8,71

Продолжение

Элемент	t, °C	ρ	Элемент	t, °C	ρ
Кремний			моно-кристаллическая	20	1,96
кристаллический	20	2,42	аморфная	20	1,92
аморфный	15	2,35	Серебро	20	10,42—10,59
Лантан	—	6,15	Скандий	20	2,5
Литий	20	0,534	Стронций	20	2,54
Магний	5	1,741	Сурьма	20	6,618
Марганец	20	7,42	(аморфная)	20	6,22
Медь	20	8,93	Таллий	20	11,86
Молибден	20	9,01	Тантал	20	16,6
Натрий	20	0,9712	Теллур		
(жидкий)	97,6	0,9287	кристаллический	20	6,25
Неодим	20	6,96	аморфный	20	6,02
Никель	20	8,6—8,9	Тербий	20	4,35
Ниобий	15	8,4	Титан	18	4,5
Олово	20	7,29	Торий	20	11,3—11,1
Осмий	20	22,5	Углерод (алмаз)	20	3,52
Палладий	20	22,16	Углерод (графит)	20	2,25
Платина	20	21,37	Уран	13	18,7
Празеодим	20	6,475	Фосфор		
Рений	20	20,53	белый	20	1,83
Родий	20	12,44	красный	20	2,20
Ртуть			металлический	15	2,34
жидкая	20	13,546	Хром	20	7,1
твердая	—38,8	14,193	Цезий	20	1,873
Рубидий	20	1,532	Церий	20	6,9
Рутений	0	12,06	Цинк	20	6,92
Самарий	20	7,8	Цирконий	20	6,44
Свинец	20	11,342	Эрбий	20	4,77
Селен					
аморфный	20	4,8			
кристаллический	20	4,5			
Сера					
ромбическая	20	2,07			

10. Плотность (ρ) сплавов, 10^3 кг/м^3

Сплав (состав, вес. %)	ρ
Бронза	
оловянистая (90% Cu; 10% Sn)	8,6—9,3
фосфористая (92,5% Cu; 7% Sn; 0,5% P)	8,7—8,9

Продолжение

Сплав (состав, вес. %)	ρ
Дюралюминий (Cu; Mg; Si; Mn)	2,79
Инвар (63,8% Fe; 3,6% Ni; 0,2% C)	8,00
Константан (60% Cu; 40% Ni)	8,88
Латунь (66% Cu; 34% Zn)	8,4—8,7
Магналиум (90% Al; 10% Mg)	2,50
Манганин (84% Cu; 12% Mn; 4% Ni)	8,5
Монель-металл (71% Ni; 27% Cu; 2% Fe)	8,9
Никелин (67% Cu; 30% Ni; 3% Mn)	8,5
Нихром (80% Ni; 20% Cr)	8,1—8,4
Платино-иридиевый сплав (90% Pt; 10% Ir)	21,62
Сплав Вуда (50% Bi; 12,5% Cd; 25% Pb; 12,5% Sn)	9,70
Сталь	
катаная	7,85—8,0
литая	7,5—7,92
Чугун	7,0

11. Плотность (ρ) веществ при 20° С, 10^3 кг/м^3

Вещество	ρ	Вещество	ρ
Дерево (сухое)		Слива	0,66—0,78
Бальза (пробковое)	0,11—0,14	Сосна	
Бамбук	0,31—0,40	белая	0,55—0,50
Бук	0,70—0,90	обыкновенная	0,37—0,60
Береза	0,51—0,77	Тополь	0,35—0,5
Вишня	0,70—0,90	Эбеновое (черное)	1,11—1,33
Груша	0,61—0,73	Яблоня	0,66—0,84
Дуб	0,60—0,90	Ясень	0,65—0,85
Ель канадская	0,48—0,70	**Минералы**	
Железное (бакаут)	1,17—1,33		
Ива	0,40—0,60	Агат	2,5—2,7
Кедр	0,49—0,57	Алебастр	
Кизил	0,76	карбонатный	2,69—2,78
Клен	0,62—0,75	сульфатный	2,26—2,32
Липа	0,32—0,59	Алмаз	3,01—3,52
Можжевельник	0,56	Альбит	2,62—2,65
Ольха	0,42—0,68	Анортит	2,74—2,76
Ореховое	0,64—0,70	Асбест	2,0—2,8
Остролист	0,76	Асбестовый сланец	1,8
Платан	0,40—0,60	Базальт	2,4—3,1
Рожковое	0,67—0,71	Берилл	2,69—2,70
Самшит	0,95—1,16	Газовый уголь	1,88
Сандаловое	0,91	Галенит	7,3—7,6

Вещество	ρ
Гематит	4,9—5,3
Гипс	2,31—2,33
Глина	1,8—2,6
Гранат	3,15—4,3
Гранит	2,64—2,76
Доломит	2,84
Известняк	2,68—2,76
Известь гашеная	1,3—1,4
Кальцит	2,6—2,8
Кварц	
плавленый	2,65
прозрачный	2,21
непрозрачный	2,07
Кокс	1,0—1,7
Копал	1,04—1,14
Корунд	3,9—4,0
Кремень	2,63
Магнетит	4,9—5,2
Малахит	3,7—4,1
Мел	1,9—2,8
Мрамор	2,6—2,84
Наждак	4,0
Опал	2,2
Песчаник	2,14—2,36
Пирит	4,95—5,1
Полевой шпат	2,55—2,75
Порфир	2,6—2,9
Роговая обманка	2,9—3,2
Серпантин	2,5—2,65
Сланец	2,6—3,3
Слюда	
белая	2,76—3,0
обычная	2,6—3,2
черная	2,7—3,1
Соль каменная	2,18
Тальк	2,7—2,8
Топаз	3,5—3,6
Торф прессованный	0,84
Турмалин	3,0—3,2
Уголь	
антрацит	1,4—1,8
битуминозный	1,2—1,5
Флюорит	3,18
Пластмассы и слоистые пластики	
Аминопласт	1,4
Винипласт	1,4
Плексиглас	1,18
Поливинил	1,34—1,4
Полистирол	1,06
Текстолит	1,3—1,4
Фторопласт-4	2,1—2,4
Другие вещества	
Асфальт	1,1—1,5
Бетон	1,8—2,4
Бумага	0,7—1,15
Воск	0,965
Гуммиарабик	1,3—1,4
Гуммигут	1,2
Деготь, смола	1,02
Желатин	1,27
Камень мыльный	2,6—2,8
Камфара	0,99
Картон	0,69
Каучук	
чистый	0,906
технический	0,911
мягкий вулканизированный с 20% серы	0,923
Киноварь	8,12
Кирпич	1,4—2,2
Кожа сухая	0,86
Кость	1,7—2,0
Кость слоновая	1,83—1,92
Клей	1,27
Крахмал	1,53
Лед	0,917
Линолеум	1,18
Охра	3,5
Парафин	0,87—0,91
Пена морская	0,99—1,28
Пемза	0,4
Пирекс	2,25
Пробка	0,22—0,26
Резина	
мягкая	1,1
твердая	1,19
чистая	0,91—0,93
Сахар	1,59
Снег (рыхлый)	0,12
Скипидар	1,07
Стекло	
обыкновенное	2,4—2,8
флинтглас	3,9—5,9

Вещество	ρ	Вещество	ρ
Сургуч	1,8	Целлулоид	1,4
Уголь древесный		Цемент затвердевший	2,7—3,0
дубовый	0,57	Шелк	1,56
сосновый	0,27—0,44	Шерсть	1,61
Фарфор	2,3—2,5	Шлак	2,0—3,0
Фибра красная	1,45	Эбонит	1,15
		Янтарь	1,1

12. Плотность (ρ) жидкостей, 10^3 кг/м^3

Жидкость	t, °C	ρ	Жидкость	t, °C	ρ
Ацетон	20	0,792	Морская вода	20	1,01—1,05
Бензин	20	0,68—0,72	Нефть	20	0,81—0,85
Бензол	0	0,899	Пентан	20	0,626
Вода	4	1,00	Ртуть	0	13,596
Вода тяжелая	20	1,1086	Спирт		
Глицерин	20	1,26	амиловый	20	0,814
Керосин	20	0,82	бутиловый	20	0,80978
2-Ксилол	20	0,88	изобутиловый	20	0,8011
Кислота			изопропиловый	20	0,7854
азотная	20	1,502	пропиловый	20	0,8044
муравьиная	20	1,22	метиловый	20	0,7928
пальмитиновая	62	0,853	этиловый	20	0,7893
серная	20	1,83	Сероуглерод	0	1,293
соляная	20	1,19	Толуол	20	0,866
уксусная	20	1,049	Углерод четыреххлористый	20	1,595
Масло					
вазелиновое	20	0,8	Фторбензол	20	1,024
креозот	15	1,04—1,10	Хлорбензол	20	1,066
машинное	20	0,90—0,92	Хлороформ	20	1,489
парафиновое	20	0,87—0,88	Эфир	0	0,736
скипидарное	20	0,87	Этилацетат	20	0,901
Метилацетат	25	0,9274	Этилбромид	20	1,430
Молоко	20	1,03	Этилиодид	20	1,933
			Этилхлорид	0	0,9214

13. Плотность (ρ) газов и паров при 0° C и 1,013 · 10^5 Па, кг/м³

Элемент или соединение	Формула	ρ	Элемент или соединение	Формула	ρ
Азот	N_2	1,2505	Криптон	Kr	3,74
Аммиак	NH_3	0,7714	Ксенон	Xe	5,89
Аргон	Ar	1,7839	Метан	CH_4	0,7168
Ацетилен	C_2H_2	1,1709	Неон	Ne	0,8999
Бутан	C_4H_{10}	2,703	Озон	O_3	2,22
Водород	H_2	0,08987	Окись азота	NO	1,3402
бромистый	HBr	3,664	Пропан	C_3H_8	2,0037
иодистый	HI	5,789	Пропилен	C_3H_6	1,915
сернистый	H_2S	1,5392	Радон	Rn	9,73
хлористый	HCl	1,6391	Углерод		
Воздух	—	1,2928	двуокись	CO_2	1,9768
при 20° C	—	1,206	скись	CO	1,2500
при 100° C	—	0,945	Фтор	F_2	1,695
при 1000° C	—	0,277	Хлор	Cl_2	3,22
Гелий	He	0,1785	Этан	C_2H_6	1,356
Закись азота	N_2O	1,978	Этилен	C_2H_4	1,2605
Кислород	O_2	1,42904			

14. Плотность (ρ) газов в жидком и твердом состояниях, 10^3 кг/м³

Газ	Жидкое		Твердое	
	t, °C	ρ	t, °C	ρ
Азот	—195,09	0,8043	—253	1,03
Азота окись	—20	1,0	—	—
Аммиак	—10,7	0,65	—	—
	+16,3	0,61	—	—
Аргон	—183,15	1,3739	—233	1,65
Ацетилен	—23,5	0,52	—	—
Водород	—249,89	0,0672	—260	0,076
сернистый	—61	0,86	—	—
фосфористый	—90	0,746	—	—

Продолжение

Газ	Жидкое		Твердое	
	t, °C	ρ	t, °C	ρ
фтористый	+13,6	0,988	—	—
хлористый	—85,8	1,194	—	—
Воздух (20,99 O_2)	—197	0,92	—	—
Гелий	—268,38	0,1139	—	—
Криптон	—147,18	2,3707	—	—
Ксенон	—109,1	3,06	—	—
Кислород	—182,7	1,14	—253	1,41
	—205	1,25	—	—
Метан	—164	0,415	—	—
Метилхлорид	—18	0,920	—	—
Неон	—245,9	1,204	—	—
Озон	—183	1,71	—	—
Серы двуокись	—10	1,46	—	—
Углерод				
двуокись	—60	1,19	—79	1,53
окись	—190	0,79	—	—
Фтор	—187	1,11	—	—
Хлор	—33,6	1,56	—	—
	+20	1,41	—	—
Этан	—88	0,546	—	—
Этилен	—102	5,566	—	—
	—21	0,41	—	—

15. Температурный коэффициент (α) линейного расширения твердых тел, 10^{-6} K^{-1}

Вещество	t, °C	α	Вещество	t, °C	α
Алмаз	0÷78	1,2	Европий	—200÷780	26
Алюмель	20	13,7	Железо	0	11,9
Алюминий	0÷100	23,1		0÷700	15,0
Аминопласты	20	25÷53	Золото	20	14,0
Барий	0÷300	19,45		1100	20,15
Бериллий	0	10,5	Инвар	0÷100	0,01÷2,0
	1200	23,7	Индий	20÷100	30,5
Бор	20	2,0	Иод	0	93,0
Бронза	20	14,9÷20,4	Иридий	0	6,5
Ванадий	20	7,8		1750	10,76
Винипласт	20	40	Иттербий	27÷700	29,9
Висмут	20÷100	13,45	Иттрий	400	10,8
Вольфрам	0	4,3	Кадмий	0	29,0
	2600	7,7	Калий	0	84
Воск	0÷100	240	Кальций	30	22,5
Гадолиний	30÷950	9,7	Капрон	—	100
Галлий	20	18,1	Каучук	20	66
Гафний	0÷200	1,15	Кварц	—196÷16	0,256
Германий	—225	0,00		0÷1200	0,585
	27	5,75	Кобальт	0	12,0
Гетинакс	20	20		900	16,9
Гольмий	400	9,5	Ковар	25÷300	5,0
Гранит	20	8,3	Константан	20	14,4
Графит	0	7,1	Копель	20	14
	1250	10,8	Кремний	27	2,33
Диспрозий	—100÷1000	11,8	Лантан	20÷1100	8,7

Вещество	t, °C	α	Вещество	t, °G	α
Латунь	20	17÷22,7	Селен		
Лед	—10÷0	50,7	аморфн.	0	43,9
Литий	20	56,0	поликристалл	20	37,0
Лютеций	400	12,5	Сера		
Магний	20÷100	25,9	ромбич.	0	74,0
Манганин	20÷100	18,1	моноклин.	0	80
Марганец	0	22,6	Скандий	400	11,4
Медь	20	16,61	Сталь	20÷700	11,1÷15,1
Мельхиор	20	16	Стекло	0÷100	3,8÷9
Молибден	0÷100	5,19	Стеклотекстолит	20÷100	0,8
Монель	20	14,5	Стронций	0÷230	20,6
Мышьяк	0	5,0	Сурьма	0	9,2
Натрий	0÷95	72	Таллий	20	28
Нейзильбер	20	18,4	Тантал	20÷100	6,6
Неодим	100÷260	0,4	Текстолит	20	33÷40
Никель	0÷200	14,0	Теллур	40	16,8
Нихром	20	13	Тербий	20	11,8
Ниобий	0÷100	7,2	Тефлон	20	6÷220

Олово	0÷100	26,2	Титан	0	7,7
Осмий	0	6,1	Торий	20÷100	11,3
Палладий	16÷100	12,4	Тулий	400	11,6
Парафин	20	130	Уран	150÷650	19,2
Платина	0÷100	9,0	Фарфор	20	2÷6
Плексиглас		36	Фаянс	—	5
Плутоний	130÷200	20,9	Фосфор	0	125
Полистирол	20	70	Хром	0	5,88
Полиэтилен	20	230	Хромель	20	12,8
Полоний	—	20,08	Цезий	0	97,0
Празеодим	—	6,5	Целлулоид	20	130
Протактиний	—	11,2	Цемент и бетон	20	10÷14
Резина	20	220	Церий	—	7,1
Рений	—	6,7			
Родий	40	8,5	Цинк	0	30
Ртуть	—78÷—39	41	Цирконий	20	6,3
Рубидий	0÷30	90	Эбонит	30	84,2
Рутений	50	9,91	Эпоксидная смола	—	115
Свинец	0	28,3	Янтарь	—	57

16. Температурный коэффициент (β) объемного расширения жидкостей при 1,013 · 10^5 Па, 10^3 K^{-1}

Вещество	t, °C	β	Вещество	t, °C	β
Анилин	20	0,858	Нефть	—	0,92
Ацетон	20	1,315	Ртуть	50	0,181
Бензин	40	1,496	Сероуглерод	20	1,218
Бензол	20	1,237	Скипидар	—	0,94
Бром	20	1,132	Спирт метиловый	20	1,199
Вода	20	0,207	Спирт этиловый	20	1,12
Глицерин	20	0,505	Толуол	50	1,138
Масло трансформаторное	50	0,705	Хлороформ	20	1,273
			Эфир этиловый	20	1,656

17. Термический коэффициент (α) давления газов, 10^{-3} K^{-1}

Газ	Азот	Аммиак	Водород	Воздух без CO_2	Гелий	Кислород	Углекислый газ
α	3,674	3,802	3,662	3,674	3,660	3,674	3,726

18. Теплоемкость (C_p) элементов при 0° С и 1,013 · 10^5 Па, Дж/(моль · К)

Элемент	C_p	Элемент	C_p
Азот	29,12	Диспрозий	28,17
Алюминий	24,35	Железо	25,2
Аргон	20,79	Золото	25,23
Барий	26,36	Индий	26,7
Бериллий	16,44	Иод	54,44
Бор		Иридий	25,02
кристаллич.	11,09	Кадмий	26,32
аморфный	11,96	Калий	29,96
Бром	75,71	Кальций	26,28
Ванадий	24,7	Кислород	29,36
Висмут	25,52	Кобальт	24,6
Водород	28,83	Кремний	18,24
Вольфрам	24,8	Криптон	20,79
Гадолиний	36,26	Ксенон	20,79
Гафний	25,5	Лантан	27,8
Германий	23,4	Литий	24,65
Дейтерий	29,19	Магний	24,6

Элемент	C_p	Элемент	C_p
Марганец	26,32	Серебро	25,49
Медь	24,52	Стронций	25,11
Молибден	23,8	Сурьма	25,2
Мышьяк	24,64	Таллий	26,32
Натрий	28,12	Тантал	25,4
Неодим	27,49	Теллур	25,7
Неон	20,79	Тербий	28,95
Никель	25,77	Титан	25,02
Необий	24,89	Тритий	28,44
Олово	26,36	Углерод	
Осмий	24,89	алмаз	6,12
Палладий	25,52	графит	8,53
Платина	25,69	Уран	27,8
Рений	25,31	Фосфор	24,69
Родий	25,52	Фтор	31,32
Ртуть	27,98	Хлор	33,84
Рубидий	30,88	Хром	23,22
Рутений	23,85	Цезий	31,4
Самарий	29,53	Церий	28,8
Свинец	26,44	Цинк	25,40
Селен	25,36	Цирконий	25,15
Сера		Эрбий	28,11
ромбическая	22,60		
моноклинная	23,64		

19. Теплоемкость (C_p) технических материалов при 298,15 К и $1{,}013 \cdot 10^5$ Па, Дж/(кг · К)

Вещество	C_p	Вещество	C_p
Алюмель	523,4	Глицерин	2412
Асфальт	1674,8	Гранит	653,2
Ацетон	2155	Дерево	1256,1
Базальт	854	Инвар	502,4
Бензин	2060	Капрон	2302,8
Бензол	1745	Каучук	1674,8
Бетон	837,4	Керосин	2001,4
Бронза фосфористая	366,8	Константан	410
		Латунь	380
Бумага	1507,3	Лед (при 0° С)	4187
Винипласт	1004,9	Манганин	407,4
Вода	4182	Масла растительные	1633—1968
Воздух	1007		
Вуда сплав	147,4	Масло техническое	1885

Продолжение

Вещество	c_p	Вещество	c_p
Нефть	2135,4	Стекло	
Нихром	460,6	кварцевое	891,8
Парафин	1578,5	крон	674,1
Песок	795,5	натриевое	803,9
Плексиглас	1424—1549	оконное	669,9
Полистирол	1340	пирекс	709,7
Полиэтилен	2512,2	термометрическое	832,4
Полиэфирные пластмассы	1088—2303	флинт	490
Пробка	1758	Текстолит	1465
Резина	2135,4	Уголь каменный	1317
Сероуглерод	1006	Фанера	2512
Слюда	879,3	Фарфор	1063,5
Спирт метиловый	2550	Фторопласт-3	921,1
Спирт этиловый	2422	Фторопласт-4	1040
		Хромель	448,0
		Эбонит	1427,8

20. Температуры плавления и кипения элементов, °С. Теплоты плавления и испарения элементов, кДж/моль

Элемент	Температура плавления	Теплота плавления	Температура кипения	Теплота испарения
Азот	—210,01	0,72074	—195,83	5,577
Актиний	(1197)	(14,2)	(3327)	(397)
Алюминий	660,1	10,7	2447	293,7
Аргон	—189,3	1,176	—185,87	6,519
Астат	(300)	(23,8)	(377)	(90,4)
Барий	710	7,66	1637	150,9
Бериллий	1283	12,5	2477	294
Бор (субл. 25°)	2030	22,2	3900	540
Бром	—7,3	10,58	58,2	30,0
Ванадий	1730	17,5	3380	458
Висмут	271,3	1559	10,9	151,5
Водород	—259,2	0,117	—252,8	0,90
Вольфрам	3380	35,2	5530	799
Гадолиний	1350	—	3000	—
Галлий	29,78	5,586	2227	254
Гафний	2220	21,8	5200	661
Гелий	—272	—	—	—
Германий	937,2	29,8	2830	334
Гольмий	1461	—	2600	—
Диспрозий	1500	—	2600	—
Европий	826	—	1489	—
Железо	1535	15,5	3200	—

Продолжение

Элемент	Температура плавления	Теплота плавления	Температура кипения	Теплота испарения
Золото	1063	12,77	2700	324,4
Индий	156,61	3,27	2075	226
Иттербий	824	—	1427	—
Иттрий	1500	17,2	3200	393
Иод	113,6	15,77	182,8	41,71
Иридий	2443	—	4350	—
Кадмий	321,03	6,40	765	99,87
Калий	63,4	2,33	753,8	77,5
Кальций	850	8,66	1487,1	150,0
Кислород	—218,81	0,444	—183,0	192,5
Кобальт	1492	15,3	2255	383
Кремний	1423	46,5	2355	394,5
Криптон	—157,2	1,636	—153,2	9,029
Ксенон	—111,9	2,295	—108,1	12,64
Лантан	920	11,3	3370	400
Литий	180,5	3,01	1317	148,1
Лютеций	1652	—	3327	—
Магний	649,5	8,95	1120	131,8
Марганец	1244	14,6	2095	224,7
Медь	1083,0	13,01	2595	304
Молибден	2625	27,6	4800	594
Мышьяк	814	—	субл. 615	—
Натрий	97,82	2,602	890	89,04
Неодим	1019	14,6	3110	—
Неон	—248,6	0,335	—246,05	1,760
Никель	1453	17,8	2800	380,6
Ниобий	2487	26,8	4900	696
Олово	231,9	7,07	2687	290,4
Осмий	2700	—	—	—
Палладий	1552	17,2	3560	—
Платина	1769	21,7	4310	447
Плутоний	639,5	—	3235	—
Полоний	954	—	962	102,9
Празеодим	919	11,3	3127	—
Прометий	1035	—	2730	—
Протактиний	1600	—	4230	—
Радий	700	—	1536	—
Радон	—71,0	2,67	—62	16,4
Рений	3180	38	5600	707
Родий	1960	—	3960	—
Ртуть	—38,86	2,295	356,73	59,11
Рубидий	38,7	2,20	701	69,20
Рутений	2500	—	4110	—
Самарий	1350	—	1600	—
Свинец	327,3	4,772	1751	179,5
Селен	217,4	5,42	657	—
Сера	115,18	1,718	444,60	90,75

Элемент	Температура плавления	Теплота плавления	Температура кипения	Теплота испарения
Серебро	960,8	11,27	2212	254,0
Скандий	1400	16,1	3900	305
Стронций	770	9,2	1367	138,9
Сурьма	630,5	20,41	1637	128,2
Таллий	303,5	4,201	1457	162,4
Тантал	2996	—	5400	—
Теллур	449,5	17,5	989,8	114,06
Тербий	1356	—	2800	—
Технеций	2140	—	4700	—
Титан	1668	15,5	3280	430
Торий	1695	15,65	4200	544
Тулий	1545	—	1727	—
Углерод (алмаз)	3950	—	—	—
Уран	1133	19,7	3900	412
Фосфор				
белый	44,2	2,51	—	—
красный	590	20,29	281	12,4
Франций	27	—	—	—
Фтор	—218,0	1,556	—188,1	6,538
Хлор	—101	6,406	—34,1	20,41
Хром	1903	14,6	2642	349
Цезий	28,64	2,18	685	65,9
Церий	777	12,9	2900	314
Цинк	419,505	7,28	907	114,7
Цирконий	1855	20	4380	582
Эрбий	1497	—	2900	—

21. Температуры плавления и кипения некоторых органических веществ, °С

Вещество	Формула	Температура плавления	Температура кипения
Метан	CH_4	—182,6	—161,58
Углерод четыреххлористый	CCl_4	—22,9	76,69
Метиловый спирт	CH_3OH	—97,9	64,6
Формальдегид	$HCOH$	—118	—19,3
Этиловый спирт	C_2H_5OH	—114,7	78,4
Уксусная кислота	CH_3COOH	16,6	118,5
Ацетон	CH_3COCH_3	—96,5	56,1
Глицерин	$C_3H_5(OH)_3$	18,2	290,5
Бензол	C_6H_6	5,52	80,10
Аммиак	NH_3	—77,7	—33,35
Двуокись углерода	CO_2	—57,5	возг.

22. Критические температуры ($t_{кр}$), °C, давления (p), атм, и плотности (ρ), 10^3 кг/м^3, для некоторых веществ

Вещество	$t_{кр}$	p	ρ
Азот	—147,0	33,5	0,31
Аммиак	132,4	111,5	0,24
Аргон	—122,4	48,0	0,53
Ацетилен	35,9	62,0	0,23
Вода	374,15	218,3	0,32
Водород	—239,92	12,8	0,031
Воздух	—140,7	37,2	0,31
Гелий	—267,9	2,26	0,07
Кислород	—118,4	50,1	0,41
Криптон	—63,7	54,9	0,91
Ксенон	—16,7	58,2	1,15
Метан	—82,1	45,6	0,16
Неон	—228,7	26,9	0,48
Окись азота	—92,9	64,6	0,52
Окись углерода	—140,0	34,5	0,30
Ртуть	1460	103,5	5,0
Спирт			
метиловый	240,0	78,5	0,27
этиловый	243,0	63,0	0,27
Толуол	320,6	41,6	0,29
Углекислый газ	31,0	72,9	0,47
Фреон-12	111,7	39,6	0,36
Хлор	144,0	76,1	0,57
Этилен	9,5	50,7	0,28
Эфир этиловый	193,8	35,5	0,26

23. Температурная стойкость различных веществ

Обозначения: $t_{от}$ — температура отвердевания; $t_н$ — нагревостойкость; $t_р$ — температура размягчения; $t_{пл}$ — температура плавления

Вещество	°C
Смолы	
Анилинформальдегидные	$t_в = 85$
Карбамидные	$t_н = 75$
Кремнийорганические	$t_н = 200$
Полиакрилаты	$t_н = 65$
Полиамидные	$t_н = 100$
Полистирольные	$t_н = 80$
Политетрафторэтиленовые	$t_н = 190$
Полихлорвиниловые	$t_н = 60$
Полиэтиленовые	$t_н = 100$
Полиэфирные	$t_н = 115$
Фенолформальдегидные	$t_н = 115$
Эпоксидные	$t_н = 135$
Полимеры и целлюлозные материалы	
Винипласт	$t_н = 65$
Капрон	$t_н = 60$
	$t_{пл} = 215$
Лавсан	$t_н = 175$
	$t_р = 230$
	$t_{пл} = 265$
Найлон	$t_{от} = 49$
	$t_н = 60$
	$t_{пл} = 225$
Оргстекло	$t_н = 55$
	$t_{пл} = 120$
Пенопласт	$t_н = 130$
Поливинилхлорид	$t_{от} = -18$
	$t_{пл} = 100$
Полипропилен	$t_{пл} = 170$
Полиэтилен (высокого давления)	$t_н = 110$
	$t_{пл} = 115$
Полиэтилен (низкого давления)	$t_{пл} = 135$
Совенит	$t_н = 110$
Терилен	$t_{от} = 67$
	$t_{пл} = 264$
Триацетатцеллюлоза	$t_н = 110$
Фторопласт-3	$t_н = 90$
Фторопласт-4	$t_{от} = -113$
	$t_н = 250$
	$t_р = 400$
Целлофан	$t_н = 60$
Целлулоид	$t_н = 40$
Энант	$t_{от} = 190$
	$t_{пл} = 225$
Прессованные и строительные материалы	
Аминопласты	$t_н = 110$
Аминопласты теплостойкие	$t_н = 170$
Волокнит	$t_н = 115$
Гетинакс	$t_н = 150$

Продолжение

Вещество	°C	Вещество	°C
Глина		**Масла, природные смолы, лаки**	
обыкновенная	$t_р > 1100$	Вазелин	$t_{пл} = 52$
огнеупорная	$t_р > 1580$	Воск	$t_{от} = 60$
Дельта-древесина	$t_н = 140$		$t_{пл} = 64$
Стекловолокнит	$t_н = 170$	Канифоль	$t_{пл} = 68$
Стеклотекстолит	$t_н = 170$	Мазут	$t_р = 40$
Текстолит	$t_н = 130$	Масло	
Туф	$t_{пл} = 1200$	авиационное	$t_{от} < -14$
Фенопласты	$t_н = 120$	вазелиновое	$t_{от} < -20$
Фибра	$t_н = 100$	веретенное	$t_{от} < -15$
Шамот	$t_{пл} > 1500$	конопляное	$t_{от} < -20$
Стекла, слюда		машинное	$t_{от} < -10$
Стекло		соляровое	$t_{от} < -20$
оконное	$t_н = 400$	трансформаторное	$t_{от} < -45$
№ 23	$t_р = 550$	Нефть	$t_{пл} = -20 \div -10$
№ 846	$t_р = 600$	Олеин	$t_{пл} < -6$
нейтральное	$t_р = 600$	Парафин	$t_{пл} = 45$
белое	$t_р = 560$	Стеарин	$t_р = 33$
№ 59	$t_р = 600$	Шеллак	$t_{пл} = 110$
кварцевое	$t_н = 1500$	Янтарь	$t_{пл} = 360$
	$t_р = 1750$	**Разные материалы**	
титановое	$t_н = 1000$	Бакелит	$t_р = 100$
пирекс	$t_р = 660$	Битум	$t_р = 70$
Слюда		Каолин	$t_{пл} = 1700$
природная	$t_н = 600$	Эбонит	$t_н = 70$
синтетическая	$t_н = 800$		

24. Коэффициент (λ) теплопроводности элементов*, Вт/(м · К)

Элемент	t, °C	λ	Элемент	t, °C	λ
Азот	0	0,0243	Неон	0	0,0464
Алюминий	27	207	Никель	20	92
Аргон	7	0,0167	Ниобий	27	53
Бериллий	27	182	Олово	20	65
Бор	27—87	1,5	Осмий	20	88
Ванадий	20	33,2	Палладий	20	76,2
Висмут	20	8	Платина	20	74,1
Водород	0	0,168	Плутоний	27	5,23
Вольфрам	27	130	Рений	20	50,2
Галлий	27	33	Родий	18	125
Гафний	20	20,9	Ртуть	20	8,447
Гелий	0	0,143	Рубидий	20	35,5
Германий	0	60,3	Рутений	20	108
Железо	0	75	Свинец	20	34,89
Золото	0	310	Селен	25	0,13
Индий	20	88	Сера	0	0,208
Иод	24,4	0,419	Серебро	27	418
Иридий	20	138	Сурьма	20	23
Кадмий	20	93	Таллий	27	47
Калий	7	100	Тантал	27	63
Кальций	0	98	Теллур	20	58,15
Кислород	7	0,025	Титан	20	15,5
Кобальт	17	70,9	Торий	27	35,6
Кремний	0	167	Углерод	20	114
Криптон	27	0,0097	Уран	27	22,5
Ксенон	0	0,0052	Фтор	0	0,0248
Литий	182	71	Хлор	0	0,0079
Магний	0	165	Хром	27	67
Медь	20	400	Цезий	20	23,8
Молибден	27	162	Цинк	20	111
Мышьяк	20	36,8	Цирконий	20	21,4
Натрий	27	133			

* Для большинства элементов коэффициент теплопроводности нелинейно меняется с температурой в десятки и сотни раз. Поэтому приведенные в таблице значения справедливы лишь для указанных температур.

25. Коэффициент (λ) теплопроводности некоторых сплавов, Вт/(м · К)

Вещество	λ	Вещество	λ
Алюмель	32,7	Баббит	
Армко-железо	77,9	Б 6	21
		Б 16	25
		Б 83	33
		Б 89	39

Продолжение

Вещество	λ	Вещество	λ
Бронза	32÷153	Нейзильбер	125
Инвар	11,0	Нихром	12,2÷17,1
Константан	20,9	Припой ПОС 30	39
Копель	24,2	Сплав Вуда	13,4
Латунь	70÷183	Сталь 20	56,9
Манганин	21,7	Сталь 45	48,1
Мельхиор	37,1	Сталь У-8	50,2
Монель	22,1		

26. Коэффициент (λ) теплопроводности различных материалов, Вт/(м · К)

Материал	Объемный вес, кг/м³	t, °C	λ
Теплоизоляционные материалы			
Асбест	470÷900	20	0,16÷0,37
Бумага	—	—	0,06÷0,13
Вата хлопковая	—	—	0,03
Вата шлаковая	100÷800	100	0,05÷0,14
Войлок	—	—	0,04
Воск	—	—	0,04
Картон	—	—	0,14
Кожа	1000	50	0,18÷0,19
Лед	900	0	2,22
Льняное полотно	—	—	0,09
Опилки	—	—	0,05
Песок морской	1630	50	0,03
Пробка			
измельченная	37	50	0,04
прессованная	400	—	0,07
Полистирол	1060	20	0,08
Резина вулканизированная	—	20	0,22÷0,29
Снег			
свежевыпавший	—	—	0,10
уплотненный	—	—	0,21
Фарфор	—	—	1,05
Фланель	—	—	0,1
Целлюлоза	—	—	0,46
Шелк	100	0	0,04÷0,05
Шлак	—	—	0,84
Эбонит	—	—	0,18

Продолжение

Материал	Объемный вес, кг/м³	t, °C	λ
Древесина			
Береза	720	—	0,15
Дуб	850	—	0,17
Кедр	470	—	0,095
Кипарис	385	—	0,1
Клен	630	—	0,12
Лиственница	600	—	0,13
Пихта	—	—	0,04÷0,13
Пробковое дерево	—	—	0,04
Секвойя	500	—	0,11
Сосна	440	—	0,08÷0,11
Тополь	450	—	0,1
Фанера	—	—	0,125
Ясень	700	—	0,15
Стекла			
Крон обыкновенный	—	45	1
Кварц плавленый	—	100	1,46
Пирекс	2230	20	1,14
Флинт			
обыкновенный	—	0	0,795
тяжелый	—	0	0,78
Хрусталь	2720	20	0,9
Растительные масла и нефтепродукты			
Бензин	—	50	0,11
Вазелин	—	25	0,184
Газолин	—	30	0,14
Глицерин	—	20	0,276
Керосин	—	0	0,12
Масло			
касторовое	—	20	0,18
оливковое	—	20	0,165
парафиновое	—	30	0,123
трансформаторное	—	30	0,128
Нефть	—	—	0,14
Парафин	—	30	0,12
Топливо дизельное	—	20	0,12
Строительные материалы			
Асфальт	2100	20	0,699
Базальт	—	—	2,177

Продолжение

Материал	Объемный вес, кг/м³	t, °C	λ
Бетон с гравием	—	—	1,5
Битум	1050	20	0,963
Гранит	2600÷2700	—	2,68÷3,35

27. Коэффициент (λ) теплопроводности некоторых жидкостей, Вт/(м · К)

Жидкость	t, °C	λ	Жидкость	t, °C	λ
Ацетон	0	0,177	Нефть	13	0,149
Бензол	12	0,139	Нитробензол	12,5	0,159
Вода	4,1	0,54	Сероуглерод	12	0,144
Вода тяжелая	0	0,559	Спирт метиловый	12	0,207
Гексан	4	0,152	Спирт этиловый 90%	15	0,184
Глицерин	12	0,281	Толуол	0	0,146
Дихлорэтан	—	0,147	Углерод четыреххлористый	12	0,106
Кислота			Хлороформ	12	0,121
серная 90%	32	0,354			
соляная 38%	32	0,440			
уксусная	—	0,18			

28. Коэффициент (λ) теплопроводности некоторых газов при 1,013 · 10⁵ Па, Вт/(м · К)

Газ	t, °C	λ	Газ	t, °C	λ
Азот	0	0,024	Водород	0	0,168
Аммиак	0	0,022	Воздух	—191	0,008
Аргон	0	0,016		0	0,024
Вода (пар)	100	0,0235÷÷0,025		200	0,037
			Гелий	0	0,143
	300	0,043	Кислород	0	0,024
	500	0,069	Криптон	0	0,009
	700	0,098	Ксенон	0	0,005
Вода тяжелая (пар)	100	0,024	Неон	0	0,046
	300	0,044	Сероводород	0	0,013
	500	0,072	Хлор	0	0,007

29. Коэффициент (*D*) диффузии веществ, растворенных в воде, 10^{-9} м²/с

Вещество	Концентрация, моль/л	*t*, °C	*D*
Азот	0	18	1,63
Аммиак	3,55	4,5	1,23
Бром	0,005	25	1,18
Вода	0,99	20	1,05
Вода тяжелая	0	25	2,5
Водород	0	18	3,6
Глицерин	0,125	10	0,63
Двуокись углерода	0	18	1,46
Калий			
азотнокислый	0,05	18	1,45
бромистый	1,0	10	1,2
едкий	0,1	13,5	2,0
иодистый	0,01	18	1,7
сернокислый	0,05	19,6	1,12
углекислый	3,0	10	0,70
хлористый	1,0	18	1,54
Кальций хлористый	0,29	9	0,79
Кислород	0	25	2,60
Кислота			
азотная	0,84	5,5	1,7
соляная	0	25	3,1
уксусная	0	12,5	0,91
Магний сернокислый	0,5	15,5	0,54
Медь сернокислая	0,5	17	0,34
Медь хлористая	1,5	10	0,5
Натрий			
азотнокислый	0,6	13	1,04
бромистый	2,9	10	1,0
едкий	0,02	12	1,3
иодистый	1,0	10	0,93
сернокислый	1,4	10	0,76
углекислый	2,4	10	0,45
хлористый	0,05	18,5	1,26
Сероводород	0	15	1,43
Спирт			
метиловый	0	15	1,28
этиловый	0	15	1,00
Хлор	0,1	16,3	1,3

30. Вязкость (η) элементов в жидком состоянии, 10^{-3} кг/(м · с)

Вещество	t, °C	η	Вещество	t, °C	η
Алюминий	700	2,90		700	1,356
	800	1,40		800	1,23
Висмут	304	1,662	Сера	123	10,94
	451	1,272		156,3	7,19
	600	1,000		159,2	9,48
Калий	100	0,466		159,5	14,45
	200	0,324		160,0	22,83
	500	0,185		160,3	77,32
	700	0,14		165	500
Медь	1100	3,33		175	4500
	1200	3,12		184	16000
Натрий	100	0,814		200	21500
	132	0,742		220	18600
	183	0,635	Серебро	1167	3,02
	400	0,25		1200	2,98
	700	0,18	Сурьма	650	1,50
Олово	240	1,91		700	1,26
	300	1,67		800	1,08
	400	1,38		850	1,05
	500	1,18	Фосфор	43,2	1,73
	600	1,05		50,5	1,60
	700	0,94		60,2	1,45
	800	0,87		79,9	1,21
Свинец	300	2,649	Цинк	450	3,168
	400	1,315		500	2,779
	450	2,057		600	2,233
	500	1,850		700	1,865
	600	1,540			

31. Вязкость (η) жидкостей, 10^{-3} кг/(м · с)

Вещество	При температуре, °C				
	0	10	20	50	100
Анилин	10,2	6,5	4,40	1,80	0,80
Ацетон	0,395	0,356	0,322	0,246	—
Бензол	0,91	0,76	0,65	0,436	0,261
Бром	1,253	1,107	0,992	0,746	—
Вода	—	1,304	1,002	0,548	—
Глицерин	12100	3950	1499	—	—
Кислота уксусная	—	—	1,22	0,74	0,46

Продолжение

Вещество	При температуре, °С				
	0	10	20	50	100
Масло					
касторовое	—	2420	986	—	16,9
машинное легкое	—	—	—	—	4,9
цилиндровое очищенное	—	—	—	—	18,7
Нитробензол	3,09	2,46	2,01	1,24	0,70
Пентан	0,283	0,254	0,229	—	—
Ртуть	1,685	1,615	1,554	1,407	1,240
Сероуглерод	0,433	0,396	0,366	—	—
Силикон	201	135	99,1	47,6	21,5
Спирт					
метиловый	0,817	0,68	0,584	0,396	—
этиловый	1,78	1,41	1,19	0,701	0,326
Толуол	0,768	0,667	0,586	0,420	0,271
Углерод четыреххлористый	1,35	1,13	0,97	0,65	0,387
Хлороформ	0,70	0,63	0,57	0,426	—
Эфир этиловый	0,296	0,268	0,243	—	0,118

82. Вязкость (η) воды при различных температурах (t), 10^{-6} кг/(м · с)

t, °С	0	5	10	15	20	25	30	40	50	60
η	1797	1518	1307	1140	1004	895	803	655	551	470
t, °С	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
η	407	357	317	284	256	232	212	196	184	174

33. Коэффициент (η) внутреннего трения (вязкости) газов и паров, кг/(м · с)

Газ, пар	t, °C	η	Газ, пар	t, °C	η
Азот	0	0,00167	Кислород	0	0,00192
	15	0,00174		14,2	0,00197
	23	0,00177		23,0	0,00204
Аргон	23	0,00221	Метан	17	0,00109
Водород	0	0,00084	Неон	0	0,00297
	28,1	0,00089	Окись углерода	0	0,00166
Воздух	0	0,00172		15	0,00174
	16	0,00181	Пары воды	0	0,00087
	21,6	0,00184		100	0,00123
Гелий	0	0,00186	Пары ртути	0	0,00162
	23	0,00198		300	0,00532
Двуокись углерода	0	0,00137	Пары эфира	14,2	0,00072
	23	0,00147	Хлор	20	0,00132

34. Поверхностное натяжение (σ) металлов в жидком состоянии, 10^{-3} Н/м

Металл	t, °C	σ	Металл	t, °C	σ
Алюминий	750	520	Ртуть	20	465
Висмут	300	376		112	454
	400	370		200	436
	500	363		300	405
Калий (в атм. CO_2)	64	410		354	394
			Свинец	350	442
Натрий	100	206,4		450	438
	250	199,5		500	431
Олово	300	526			
	400	518			
	500	510			

35. Коэффициент (σ) поверхностного натяжения некоторых жидкостей, 10^{-3} Н/м

Вещество	Формула	t, °C	σ
Азотная кислота	HNO_3		59,4
Анилин	$C_6H_5NH_2$	19,5	40,84
Ацетон	CH_3COCH_3	16,8	23,35
Бензол	C_6H_6	17,5	29,16

Вещество	Формула	t, °C	σ
Вода	H_2O	20	72,58
Гексан	C_6H_{14}	8,2	18,54
Глицерин	$C_3H_5(OH)_3$	18,0	64,7
Керосин	—	0	28,9
Масло касторовое	—	—	36,4
Нефть	—	—	26
Нитробензол	$C_6H_5NO_2$		43,9
Ртуть	Hg	20	471,6
Серная кислота (85%)	H_2SO_4		57,4
Спирт метиловый	CH_3OH	20	23,02
Спирт этиловый	C_2H_5OH	20	22,03
Толуол	C_7H_8	17,5	28,52
Уксусная кислота	CH_3COOH	20	23,46
Хлороформ	$CHCl_3$	25	26,2
Четыреххлористый углерод	CCl_4	20	25,68
Эфир этиловый	$(C_2H_5)_2O$	25,3	16,7

36. Удельное сопротивление (ρ), 10^{-8} Ом · м, и температурный коэффициент сопротивления (α), 10^{-3} K^{-1}, металлов и сплавов

Металл, сплав	t, °C	ρ	α
Алюминий	20	2,69	4,2
Барий	0	36	6,1
Бериллий	0	2,78	2,5
Бронза			
бериллиевая	20	3,52	—
фосфористая	—	2,58	—
Ванадий	20	26	2,8
Висмут	20	116	4,2
Вольфрам	20	5,5	4,6
	3500	131,4	—
Гадолиний	25	140,5	—
Галлий	0	13,7	—
Гафний	0	26,5	4,4
Германий	—	$46 \cdot 10^6$	—
Гольмий	25	87	—
Графит	0	800—1400	—0,5
Диспрозий	25	56	—
Европий	25	81,3	—
Железо	20	9,71	6,51
Золото	0	2,065	4,5
Индий	0	8,2	5,1
Иридий	20	5,3	4,9

Продолжение

Металл, сплав	t, °C	ρ	α
Иттербий	25	27	—
Иттрий	25	64,9	—
Кадмий	20	7,4	4,3
Калий	0	6,15	5,8
Кальций	20	4,1	4,6
Кобальт	20	6,24	6,04
Константан	20	45—50	0,01
Кремний	20	10^6	—
Лантан	25	56,8	—
Латунь Л-62	20	7,1	1,7
Литий	0	8,5	4,37
Лютеций	25	79	—
Магний	20	4,4	4,2
Манганин	20	48	0,03
Марганец	0	710	0,17
Медь	20	1,673	4,30
Молибден	0	5,03	4,7
Мышьяк	20	35	—
Натрий	20	4,88	5,0
Неодим	25	64,3	—
Никель	20	6,844	6,00
Никелин	20	42	0,02
Ниобий	18	13,1	3,95
Нихром			
X20 H80	—	111	0,2
OX2505	—	140	0,05
Олово	20	12,8	4,2
Осмий	20	9,5	4,2
Палладий	0	9,1	3,79
Платина	0	9,81	3,927
Плутоний	0	160	—2,97
Полоний	20	42	—
Празеодим	25	68	—
Рений	0	19,3	4,1
Реотан	20	0,5	0,4
Родий	0	4,3	4,57
Ртуть	20	95,8	0,89
Рубидий	0	11,6	5,3
Рутений	0	6,83	3,59
Самарий	25	88	—
Свинец	20	20,6	3,36
Серебро	0	1,468	4,033
Сталь нержавеющая 1X18H9T	20	7,5	—
Стронций	0	20	5,0
Сурьма	0	32,1	5,1
Таллий	0	15	5,2

Продолжение

Металл, сплав	t, °C	ρ	α
Тантал	0	12,4	3,6
Теллур	19,6	$2 \cdot 10^5$	—
Тербий	—	135,5	—
Титан	20	55	3,5
Торий	20	18,62	2,3
Тулий	25	79	—
Уран	20	29	3,4
Фехраль	20	110÷130	0,1
Франций	—	53,4	—
Хром	20	18,9	5,88
Цезий	20	21	4,8
Церий	25	75,3	—
Цинк	20	5,92	4,2
Цирконий	0	40,5	4,0
Эрбий	25	107	—

37. Удельное сопротивление (ρ), Ом · м, пробивное напряжение (*E*), кВ/мм, диэлектрическая проницаемость (ε) и тангенс угла диэлектрических потерь (tg δ) различных веществ

Вещество	t, °C	ρ	E	ε	tg δ
Твердые неорганические вещества					
Алюминия окись	20	10^{14}	—	10	$5 \cdot 10^{-4}$
Асбест	20	$10^8 \div 10^{10}$	2	—	—
Асбестоцемент	20	$10^8 \div 10^{10}$	2—3	—	—
Бария титанат	—	—	—	1200	—
Бериллия окись	600	$4 \cdot 10^6$	—	7,5	$3 \cdot 10^4$
Бора нитрид	2000	19	—	—	—
Калий					
бромистый	300	$5 \cdot 10^6$	—	4,9	—
хлористый	300	$5 \cdot 10^6$	—	4,68	—
Кварц плавленый	20	10^{13}	—	3,75	0,003
Керамика конденсаторная	20	$10^9 \div 10^{13}$	15÷20	10÷100	$10^{-2} \div 10^{-4}$
Лед	—18	—	—	3,2	—
Магния окись	850	$2 \cdot 10^6$	—	—	—
Мрамор	20	$10^9 \div 10^{11}$	2,5	8÷10	0,005÷0,001

Вещество	t, °C	ρ	E	ε	tg δ
Натрий					
бромистый	300	$3 \cdot 10^5$	$9{,}8 \cdot 10^4$	6,1	—
хлористый	300	10^7	$15{,}6 \cdot 10^4$	5,9	—
Слюда					
мусковит	20	10^{13}	$10^5 \div 10^6$	$6{,}8 \div 7{,}5$	$2 \div 6 \cdot 10^{-4}$
флогопит	20	$10^{11} \div 10^{12}$	200	5,5	$0{,}0025 \div 0{,}01$
Стеатит высоковольтный	20	10^{13}	$20 \div 25$	6—6,5	0,002
Стекло					
3С5	200	$4 \cdot 10^7$	—	—	—
боросиликатное № 24	200	$3 \cdot 10^{11}$	—	8,4	0,0009
пирекс натриевый	200	$2 \cdot 10^6$	—	5,3	0,0035
Стекло пирекс					
калиевый	200	$8 \cdot 10^9$	—	5,7	0,0018
титановое	200	$1 \cdot 10^{11}$	—	11	0,0012
Тория двуокись	20	$4 \cdot 10^{11}$	—	17	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$
Фарфор	—	$10^{10} \div 10^{12}$	—	$4{,}4 \div 6{,}8$	—
Циркония двуокись	385	$1 \cdot 10^4$	—	—	—
Твердые органические вещества					
Антрацен	17	—	—	3,46	—
Винипласт	20	$10^{12} \div 10^{14}$	45	$3{,}1 \div 3{,}5$	$0{,}025 \div 0{,}04$
Воск пчелиный	20	$5\text{—}12 \cdot 10^{11}$	$25 \div 30$	$2{,}8 \div 2{,}9$	$0{,}02 \div 0{,}03$
Гетинакс	20	$10^8 \div 10^9$	$16 \div 25$	$7 \div 8$	$0{,}045 \div 0{,}1$
Древесина, дуб воздушно-сухой	20	$8 \cdot 10^8$	$3 \div 5{,}5$	$2{,}2 \div 3{,}7$	—
Канифоль	20	$10^{13} \div 10^{14}$	$10 \div 15$	3	$< 0{,}05$
Капрон	20	$2 \cdot 10^{12}$	22	3,6	0,032
Каучук натуральный	20	$5 \cdot 10^{13} \div 10^{14}$	—	$2{,}3 \div 2{,}4$	$0{,}001 \div 0{,}003$
Парафин	20	$10^{13} \div 10^{15}$	$20 \div 30$	$1{,}9 \div 2{,}2$	$3{,}7 \cdot 10^{-4}$
Плексиглас	20	$10^{12} \div 10^{14}$	$18 \div 35$	$2{,}7 \div 4{,}5$	$0{,}04 \div 0{,}06$
Полиизобутилен	20	$10^{13} \div 10^{14}$	$16 \div 23$	$2{,}25 \div 2{,}35$	$3\text{—}5 \cdot 10^{-4}$
Полистирол	20	$10^{15} \div 10^{16}$	$20 \div 35$	$2{,}45 \div 2{,}65$	$(1 \div 8) \cdot 10^{-4}$
Политетрафторэтилен (тефлон)	20	$10^{13} \div 10^{14}$	$20 \div 30$	2	0,0002
Полихлорвинил	20	$10^{12} \div 10^{14}$	$14 \div 20$	3—5	$0{,}03 \div 0{,}05$
Полиэтилен	20	$10^{13} \div 10^{15}$	18—20	$2{,}2 \div 2{,}3$	0,0002
Резина электроизоляционная	20	$10^{12} \div 10^{13}$	20—40	$2{,}5 \div 5$	$0{,}01 \div 0{,}03$
Резина кремнийорганическая	20	10^{12}	20	4	$0{,}008 \div 0{,}01$
Смола эпоксидная	20	$10^{11} \div 10^{12}$	16	3,7	0,019

Вещество	t, °C	ρ	E	ε	tg δ
Текстолит	20	$10^7 \div 10^8$	3,5—6	8	0,07
Стеклотекстолит	20	10^{10}	10—12	—	$0,05 \div 0,06$
Фенопласт	20	10^{12}	12	7	0,01
Церезин	20	10^{14}	15	$2,1 \div 2,3$	$2 \cdot 10^{-5}$
Шеллак	20	$10^{13} \div 10^{14}$	20—30	3,6	0,01
Эбонит	20	$10^{13} \div 10^{14}$	—	$2,7 \div 3,0$	$0,01 \div 0,015$
Янтарь	20	до 10^{17}	—	2,8	0,01
Жидкости					
Азот (ж)	−198,4	—	—	1,445	—
Аммиак (ж)	—77,7	$1,3 \cdot 10^5$	—	25,0	—
Аргон (ж)	−184,4	—	—	1,516	—
Ацетон	25		—	20,74	—
Бензол	20	$1 \cdot 10^{16}$	—	2,275	—
Бром	—17,2	$1,3 \cdot 10^{11}$	—	3,22	—
Вода					
(перегнанная в вакууме)	18	$4,44 \cdot 10^6$	—	78,3 (25°)	—
дистиллированная	20—25	$(1 \div 4) \times 10^4$	—	80	—
Водород (ж)	−252,85	—	—	1,225	—
Водород хлористый (ж)	—96	$1 \cdot 10^6$	—	—	—
Гексан	18	$1 \cdot 10^{16}$	—	—	—
Гелий (ж)	—269	—	—	1,048	—
Глицерин	25	$6,4 \cdot 10^6$	—	42,4	—
Кислород (ж)	−182,9	—	—	1,463	—
Кислота					
муравьиная	18	$5,6 \cdot 10^3$	—	57,9	—
олеиновая	15	$2 \cdot 10^8$	—	—	—
серная	25	1	—	—	—
уксусная	25	$1,1 \cdot 10^6$	—	6,19	—
Масло					
касторовое	20	$5 \cdot 10^8 - 5 \cdot 10^{10}$	$14 \div 16$	$4 \div 4,5$	$0,01 \div 0,03$
кремнийорганическое	20	$10^{13} \div 10^{15}$	20 ÷ 43,5	$2,5 \div 3,5$	$(2 \div 5) \cdot 10^{-4}$
трансформаторное	20	$10^{12} \div 10^{14}$	20 ÷ 25	$2,1 \div 2,2$	$0,01 \div 0,0002$
Сероводород	—61,8	$1 \cdot 10^9$	—	8,04	—
Сероуглерод	25	—	—	2,625	—
Скипидар	—	—	—	$2,2 \div 2,3$	—
Спирт					
метиловый	20	$5,8 \cdot 10^4$	—	37,92 (0°)	—
этиловый	18	$6,4 \cdot 10^6$	—	26,4 (10°)	—
Толуол	19,5	$< 1 \cdot 10^{12}$	—	2,435 (0°)	—
Углерод четыреххлористый	20	—	—	2,24	—

Вещество	t, °C	ρ	E	ε	tg δ
Фтор (ж)	−189,97	—	—	1,517	—
Хлор (ж)	−70	$1 \cdot 10^{14}$	—	2,048	—
Эфир диэтиловый	25	$4 \cdot 10^{11}$	—	4,22	—
Газы*					
Азот	0	—	1,0	1,00058	
Аргон	0	—	0,25	1,000554	
Водяной пар	110	—	—	1,0126	
Водород	0	—	0,6	1,00027	
Воздух	0	—	1,0	1,00057	
Гелий	0	—	0,2	1,000068	
Фреон-12	—	—	2,4—2,6	1,00355	
Кислород	0	—	0,9	1,000532	
Ксенон	25	—	—	1,000768	
Неон	0	—	0,15	1,000127	
Ртуть	400	—	—	1,00074	
Углекислый газ	0	—	0,9	1,00099	
Элегаз	25	—	2,3—2,5	1,002049	

* Пробивное напряжение для газов дается по отношению к воздуху, для которого $E = 32$ кВ/см при $d = 1$ см и $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па.

38. Электрохимические эквиваленты (k) веществ, 10^{-6} кг/Кл

Ионы	k	Ионы	k	Ионы	k
Катионы				Анионы	
$Ag^{\cdot}$	1,1180	$Li^{\cdot}$	0,072	Br'	0,828
$Al^{\cdot\cdot\cdot}$	0,0932	$Mg^{\cdot\cdot}$	0,126	BrO_3'	1,326
$Au^{\cdot}$	2,043	$Mn^{\cdot\cdot}$	0,285	CHO_2'	0,466
$Au^{\cdot\cdot\cdot}$	0,681	$NH_4^{\cdot}$	0,187	$C_2H_3O_2'$	0,612
$Ba^{\cdot\cdot}$	0,712	$Na^{\cdot}$	0,238	C_2O_4''	0,456
$Bi^{\cdot\cdot\cdot}$	0,719	$Ni^{\cdot\cdot}$	0,304	CO_3''	0,311
$Ca^{\cdot\cdot}$	0,208	$Ni^{\cdot\cdot\cdot}$	0,203	Cl'	0,367
$Cd^{\cdot\cdot}$	0,582	$Pb^{\cdot\cdot}$	1,074	ClO_3'	0,865
$Co^{\cdot\cdot}$	0,306	$Pd^{\cdot\cdot}$	0,553	CN'	0,270
$Co^{\cdot\cdot\cdot}$	0,204	$Pt^{\cdot\cdot}$	1,010	CrO_4''	0,601
$Cr^{\cdot\cdot\cdot}$	0,180	$Pt^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$	0,506	F'	0,197
$Cu^{\cdot}$	0,660	$Sb^{\cdot\cdot\cdot}$	0,421	I'	1,315
$Cu^{\cdot\cdot}$	0,329	$Sb^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}$	0,252	IO_3'	1,813
$Fe^{\cdot\cdot}$	0,289	$Sn^{\cdot\cdot}$	0,616	NO_3'	0,643
$Fe^{\cdot\cdot\cdot}$	0,193	$Sn^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$	0,308	OH'	0,177
$H^{\cdot}$	0,01045	$Sr^{\cdot\cdot}$	0,454	S''	0,167
$Hg_2^{\cdot\cdot}$	2,079	$Tl^{\cdot}$	2,118	SO_4''	0,499
$Hg^{\cdot\cdot}$	1,039	$Tl^{\cdot\cdot\cdot}$	0,706	Se''	0,411
$K^{\cdot}$	0,405	$Zn^{\cdot\cdot}$	0,339	SiO_3	0,395
				O''	0,0829

39. Показатели преломления (n) при 20° С относительно воздуха (для длины волны $\lambda = 589{,}3$ нм)

Вещество	n	Вещество	n
Твердые тела		Глицерин	1,470
Алмаз	2,417	Канадский бальзам	1,530
Берилл (изумруд)	1,581	Масло	
Калий		гвоздичное	1,532
бромистый	1,560	касторовое	1,48
иодистый	1,6664	кедровое	1,516
хлористый (сильвин)	1,4904	коричное	1,601
Кальций фтористый (флюорит)	1,4339	льняное	1,47
Каменная соль	1,544	парафиновое	1,440
Кварц		подсолнечное	1,47
кристаллический	1,544	прованское	1,460
плавленый	1,458	Метилацетат	1,450
Корунд (сапфир, рубин)	1,769	Метилен иодистый	1,737
Лед	1,31	Метилсалицилат	1,538
Литий фтористый	1,392	*α*-Монобромнафталин	1,660
Натрий		Паральдегид	1,405
фтористый	1,3255	Парафин жидкий	1,480
хлористый	1,5443	Серная кислота	1,43
Плексиглас	1,50	Сероводород	1,885
Сахар	1,56	Сероуглерод	1,63
Слюда	1,56—1,60	Скипидар	1,470
Стекло		Соляная кислота	1,254
(флинт)	1,60—1,80	Спирт	
(крон)	1,56—1,60	метиловый	1,33
Топаз	1,63	этиловый	1,362
Турмалин	1,669	Толуол	1,497
Шпат исландский	1,659	Углерод четыреххлористый	1,460
Жидкости		Фосфор (раствор в CS_2)	1,950
Анилин	1,586	Хинолин	1,627
Ацетон	1,36	Хлорбензол	1,525
Бензол	1,501	Хлороформ	1,449
Вода	1,333	Этил коричный	1,559
		Этилсалицилат	1,523
		Эфир этиловый	1,354
		Янтарь	1,546

40. Предельные углы (φ) полного отражения (в градусах)

Вещество	φ	Вещество	φ
Вода	49	Сероуглерод	38
Глицерин	43	Стекло (тяжелый флинт)	34
Стекло (легкий крон)	40	Алмаз	24
Спирт	47	Эфир этиловый	47

Примечание. В таблице приведены значения углов при отражении на границе с воздухом (для линии натрия $\lambda = 589{,}3$ нм).

41. Длины световых волн и соответствующие им цвета видимого спектра

Человеческий глаз наиболее чувствителен к средней, зеленой, части видимого спектра, соответствующей длине волны около 550 нм.

Длина волны, нм	Цвет спектра	Длина волны, нм	Цвет спектра
760÷620	Красный	500÷480	Голубой
620÷590	Оранжевый	480÷450	Синий
590÷560	Желтый	450÷380	Фиолетовый
560÷500	Зеленый		

42. Энергия одного кванта излучения при различных длинах волн

Длина волны	Энергия, эВ	Длина волны	Энергия, эВ
1 мм	$1{,}22 \cdot 10^{-3}$	300 нм	4,10
300 мкм	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$	100	$1{,}22 \cdot 10$
1 мкм	1,22	10	$1{,}22 \cdot 10^{2}$
800 нм	1,52	1,0	$1{,}22 \cdot 10^{3}$
700	1,75	0,1	$1{,}22 \cdot 10^{4}$
620	1,96	0,01	$1{,}22 \cdot 10^{5}$
500	2,44	0,001	$1{,}22 \cdot 10^{6}$
400	3,06	0,0001	$1{,}22 \cdot 10^{7}$
		0,00001	$1{,}22 \cdot 10^{8}$

43. Длина волны ($\lambda_п$) фотоэлектрического порога чистых металлов, нм

Металл	$\lambda_п$	Металл	$\lambda_п$	Металл	$\lambda_п$
Церий	480	Титан	315	Хром	284
Кальций	385	Тантал	308	Вольфрам	270
Торий	365	Кадмий	292	Железо	268
Уран	340	Висмут	287	Никель	255
Магний	335	Молибден	285	Платина	200

44. Работа выхода (w) электронов, эВ

Вещество	w	Вещество	w
Элементы		Натрий	2,35
		Никель	4,50
		Ниобий	3,99
Алюминий	4,25	Олово	4,38
Барий	2,49	Осмий	4,7
Бериллий	3,92	Палладий	4,8
Бор	4,5	Платина	5,32
Ванадий	4,12	Рений	5,0
Висмут	4,4	Родий	4,75
Вольфрам	4,54	Ртуть	4,52
Галлий	3,96	Рубидий	2,16
Гафний	3,53	Рутений	4,60
Германий	4,76	Свинец	4,0
Железо	4,31	Селен	4,72
Золото	4,30	Серебро	4,3
Индий	3,8	Скандий	3,3
Иридий	4,7	Стронций	2,35
Иттрий	3,3	Сурьма	4,08
Кадмий	4,1	Таллий	3,7
Калий	2,22	Тантал	4,12
Кальций	2,80	Теллур	4,73
Кобальт	4,41	Титан	3,95
Кремний	4,8	Торий	3,3
Лантан	3,3	Углерод	4,7
Литий	2,38	Уран	3,3
Магний	3,64	Хром	4,58
Марганец	3,83	Цезий	1,81
Медь	4,40	Церий	2,7
Молибден	4,3	Цинк	4,24
Мышьяк	4,72	Цирконий	3,9

Продолжение

Вещество	w	Вещество	w
Сложные катоды		Барий на вольфраме	1,8 ÷ 2,0
BaO — SrO — оксидный катод	1,6	Цезий на вольфраме	1,31
		BaO на окисленном вольфраме	1,0—1,1

45. Атомные массы (*M*) элементов, а. е. м.

Атомный номер	Элемент	M	Атомный номер	Элемент	M
1	H	1,00797	35	Br	79,909
2	He	4,0026	36	Kr	83,80
3	Li	6,639	37	Rb	85,47
4	Be	9,0122	38	Sr	87,62
5	B	10,811	39	Y	88,905
6	C	12,01115	40	Zr	91,22
7	N	14,0067	41	Nb	92,906
8	O	15,9994	42	Mo	95,94
9	F	18,9984	43	Tc	99
10	Ne	20,183	44	Ru	101,07
11	Na	22,9898	45	Rh	102,905
12	Mg	24,312	46	Pd	106,4
13	Al	26,9815	47	Ag	107,870
14	Si	28,086	48	Cd	112,40
15	P	30,9738	49	In	114,82
16	S	32,064	50	Sn	118,69
17	Cl	35,453	51	Sb	121,75
18	Ar	39,948	52	Te	127,60
19	K	39,102	53	I	126,9044
20	Ca	40,08	54	Xe	131,30
21	Sc	44,956	55	Cs	132,905
22	Ti	47,90	56	Ba	137,34
23	V	50,942	57	La	138,91
24	Cr	51,996	58	Ce	140,12
25	Mn	54,9380	59	Pr	140,907
26	Fe	55,847	60	Nd	144,24
27	Co	58,9332	61	Pm	147
28	Ni	58,71	62	Sm	150,35
29	Cu	63,54	63	Eu	151,96
30	Zn	65,37	64	Gd	157,25
31	Ga	69,72	65	Tb	158,924
32	Ge	72,59	66	Dy	162,50
33	As	74,9216	67	Ho	164,930
34	Se	78,96	68	Er	167,26

Продолжение

Атомный номер	Элемент	M	Атомный номер	Элемент	M
69	Tm	168,934	82	Pb	207,19
70	Yb	173,04	83	Bi	208,980
71	Lu	174,97	84	Po	210
72	Hf	178,49	85	At	211
73	Ta	180,948	86	Rn	222
74	W	183,85	87	Fr	223
75	Re	186,2	88	Ra	226,12
76	Os	190,2	89	Ac	227
77	Ir	192,2	90	Th	232,038
78	Pt	195,09	91	Pa	231
79	Au	196,967	92	U	238,03
80	Hg	200,59	93	Np	237
81	Tl	204,37	94	Pu	242

46. Атомные массы (*M*), а. е. м., распространенность некоторых стабильных и периоды полураспада ($T_{1/2}$) некоторых радиоактивных изотопов

Изотоп	M	Содержание, %, в природной смеси	$T_{1/2}$
${}^{1}_{1}H$	1,00782522	99,985	—
${}^{2}_{1}D$	2,01410222	0,015	—
${}^{3}_{1}T$	3,01604971	—	12,26 г
${}^{3}_{2}He$	3,01602968	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	—
${}^{4}_{2}He$	4,00260361	~100	—
${}^{6}_{3}Li$	6,0151432	7,42	—
${}^{7}_{3}Li$	7,0160053	92,58	—
${}^{7}_{4}Be$	7,0169293	—	53,3 д
${}^{9}_{4}Be$	9,0121858	100	—
${}^{12}_{6}C$	12,0000000	98,892	—
${}^{13}_{6}C$	13,00335502	1,108	—
${}^{14}_{6}C$	14,0032420	—	5730 г
${}^{14}_{7}N$	14,00307440	99,635	—

Изотоп	M	Содержание, %, в природной смеси	$T_{1/2}$
$^{15}_{7}N$	15,0001091	0,365	—
$^{16}_{8}O$	15,99491494	99,7590	—
$^{17}_{8}O$	16,9991334	0,0373	—
$^{18}_{8}O$	17,9991598	0,2037	—
$^{23}_{11}Na$	22,9897707	100	—
$^{40}_{19}K$	39,964000	0,0118	$1{,}27 \cdot 10^{9}$ г
$^{40}_{20}Ca$	39,962592	96,97	—
$^{59}_{27}Co$	58,933188	100	—
$^{60}_{27}Co$	59,93[illegible]811	—	5,26 г
$^{90}_{38}Sr$	89,9077490	—	28,5 г
$^{94}_{38}Sr$	93,91547	—	76,5 с
$^{89}_{39}Y$	88,9058628	100	—
$^{91}_{39}Y$	90,9069	—	58,9 д
$^{139}_{54}Xe$	138,91844	—	39,7 с
$^{139}_{57}La$	138,906404	99,911	—
$^{222}_{86}Rn$	222,017605	—	3,82 д
$^{226}_{88}Ra$	226,025433	—	1620 г
$^{234}_{92}U$	234,040971	0,0055	$2{,}48 \cdot 10^{5}$ г
$^{235}_{92}U$	235,043941	0,7205	$7{,}13 \cdot 10^{8}$ г
$^{238}_{92}U$	238,050812	99,274	$4{,}51 \cdot 10^{9}$ г
$^{239}_{94}Pu$	239,051223	—	10^{16} г

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аменицкая Р. В. и др.* Сборник задач по радиохимии. Под ред. проф. И. А. Коршунова. Изд. 2-е, испр. и доп. М., «Высш. школа», 1969.
2. *Ащеулов С. В., Барышев В. А.* Задачи по элементарной физике. Л., Изд. ЛГУ, 1974.
3. *Баканина Л. П. и др.* Сборник задач по физике. Изд. 3-е. М., «Наука», 1975.
4. *Балаш В. А.* Задачи по физике и методы их решения. Изд. 3-е, перераб. и испр. М., «Просвещение», 1974.
5. *Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах, **1**, **2**, **3**. Изд. 5-е, стереотип. М., Наука», 1972.
6. *Боровой А. А. и др.* Механика (теория и задачи). Б-ка физ.-мат. школы. М., «Наука», 1967.
7. *Буховцев Б. Б. и др.* Сборник задач по элементарной физике. Изд. 4-е, перераб. М., «Наука», 1974.
8. *Варикаш В. М., Цедрик М. С.* Избранные задачи по физике с решениями. Изд. 3-е, стереотип. Минск. «Вышэйшая школа», 1967.
9. *Вачугова Л. И., Зорина О. В., Шилова Р. Я.* Задачи по физике для поступающих в вузы. Казань, Таткнигоиздат, 1971.
10. *Волькенштейн В. С.* Сборник задач по общему курсу физики. Изд. 9-е, стереотип. М., «Наука», 1976.
11. *Гладкова Р. А. и др.* Сборник задач и вопросов по физике для средних специальных учебных заведений. Под ред. Л. С. Жданова. М., «Наука», 1972.
12. *Гольдфарб Н. И.* Сборник вопросов и задач по физике. Изд. 3-е, перераб. и доп. М., «Высшая школа», 1973.
13. *Гончаренко С. У.* Конкурсні задачі з фізики. Вид. 3-є. К., «Техніка», 1969.
14. *Гороновский И. Т., Назаренко Ю. П., Некряч Е. Ф.* Краткий справочник по химии. Изд. 4-е, испр. и доп. Под ред. О. Д. Куриленко. К., «Наукова думка», 1974.
15. *Гурьев Л. Г. и др.* Сборник задач по общему курсу физики. Изд. 2-е, испр. и доп. М., «Высш. школа», 1972.
16. *Зайцева А. М.* Задачник-практикум по общей физике. Механика. Под ред. проф. И. В. Александрова. М., «Просвещение», 1972.
17. *Зубов В. Г., Шальнов В. П.* Задачи по физике. Пособие для самообразования. Изд. 10-е, стереотип. М., «Наука», 1975.
18. *Ирліна М. Є., Савченко М. О.* Збірник задач з фізики для технікумів. Вид. 2-е, переробл. и доп. К., «Вища школа», 1973.
19. *Иродов И. Е., Савельев И. В., Замша О. И.* Сборник задач по общей физике. Под ред. проф. И. В. Савельева. Изд. 2-е, перераб. М., «Наука», 1972.

20. *Кобушкин В. К.* Методика решения задач по физике. Изд. 2-е. Л., Изд. ЛГУ, 1972.
21. *Коган Б. Ю.* Задачи по физике. М., «Просвещение», 1971.
22. *Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по элементарной физике. Изд. 6-е, стереотип. М., «Наука», 1974.
23. *Сахаров Д. И.* Сборник задач по физике. Изд. 12-е, перераб. М., «Просвещение», 1973.
24. *Соколовский Ю. И.* Элементарный задачник по теории относительности. М., «Наука», 1971. (Б-ка физ.-мат. школы).
25. *Сперанський М. М.* Як розв'язувати задачі з фізики. К., «Радянська школа», 1972.
26. Таблицы физических величин. Справочник. Под ред. акад. И. К. Кикоина. М., Атомиздат, 1976.
27. *Тарасов Л. В., Тарасова А. И.* Вопросы и задачи по физике. Под ред. проф. Г. И. Епифанова. М., «Высш. школа», 1968.
28. *Фефилов Б. В.* Задачник по прикладной оптике. Изд. 2-е, М., «Высшая школа», 1974.
29. *Чертов А. Г., Воробьев А. А., Федоров М. Ф.* Задачник по физике с примерами решения задач и справочными материалами. Изд. 3-е, испр. и доп. М., «Высш. школа», 1973.
30. *Шаскольская М. П., Эльцин И. А.* Сборник избранных задач по физике. Изд. 3-е, стереотип. М., «Наука», 1969.
31. *Mordus G.* Rechenübungen der Kerntechnik, München, Verlag K., Tiemig K. G., 1968.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЮЛИЙ
ВЛАДИМИРОВИЧ
ГОФМАН

ЗАКОНЫ, ФОРМУЛЫ, ЗАДАЧИ ФИЗИКИ.

Справочник

Редакторы В. А. Корнилов, Е. А. Воронько
Оформление художника В. Г. Самсонова
Художественный редактор В. М. Тепляков
Технический редактор И. Н. Лукашенко
Корректоры Л. М. Тищенко, И. В. Точаненко

Информ. бланк № 245.

БФ 01718. Сдано в набор 9.VIII 1976 г.
Подписано в печать 4.IV.1977 г.
Формат 84×108 1/32. Бумага № 3.
Усл. печ. л. 30,24. Учетно-изд. л. 31,23.
Тираж 300000 экз. Изд. № 325.
Заказ 6-319. Цена 1 руб. 26 коп.

Издательство «Наукова думка»,
252601, Киев-601, ГСП, ул. Репина, 3.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе
Республиканского производственного объединения
«Полиграфкнига» Госкомиздата УССР,
Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.